

SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

Voja Radovanović
Fizički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2015. godine

Sadržaj

1	Postulati specijalne relativnosti i posledice	5
1.1	Maksvelove jednačine i Galilejeva simetrija	5
1.2	Majkelson-Morlijev eksperiment	8
1.3	Lorencov bust i posledice	10
1.4	Prostorno-vremenski dijagrami	14
1.5	Relativnost istovremenosti događaja i sinhronizacija časovnika	16
1.6	Kontrakcija dužine	17
1.7	Paradoks kola i garaže	19
1.8	Dilatacija vremena	20
1.9	Paradoks blizanaca	24
1.10	Slaganje brzina	26
1.11	Aberacija svetlosti	27
1.12	Zadaci	28
2	Četvorodimenziona formulacija specijalne relativnosti	33
2.1	Prostor Minkovskog	33
2.2	Koordinatne transformacije	34
2.3	Lorencove transformacije	37
2.4	Lorencova grupa	40
2.5	Poenkareova simetrija	41
2.6	Svetlosni konus	42
2.7	Zadaci	44
3	Mehanika specijalne relativnosti	47
3.1	Četvorovektor brzine	47
3.2	Impuls, sila i energija	48
3.2.1	Relativistički impuls	48
3.2.2	Energija relativističke čestice	50
3.2.3	Četvorovektor impulsa	51
3.3	Četvoroubrzanje	53
3.4	Kovarijantni oblik drugog Njutnovog zakona	54
3.5	Rasejanja	56
3.6	Elastično rasejanje	57

3.7	Komptonovo rasejanje	59
3.8	Energija praga reakcije	60
3.9	Mandelstamove varijable	61
3.10	Dejstvo za slobodnu relativističku česticu	62
3.11	Zadaci	64

Glava 1

Postulati specijalne relativnosti i posledice

Njutnova mehanika korektno opisuje kretanja čestica brzinama mnogo manjim od brzine svetlosti. Zakoni Njutnove mehanike važe u svim inercijalnim sistemima. Simetrija Njutnove mehanike je Galilejeva simetrija koja je zasnovana na principu apsolutnosti prostora i vremena. U ovoj glavi pokazaćemo da simetrija Maksvelove elektromagnetne teorije nije ista kao simetrija Njutnove mehanike. Zakoni Njutnove mehanike ne važe za svetlost. Videćemo da je simetrija relativističke teorije zasnovana na invarijantnosti brzine svetlosti i principu kovarijantnosti. Specijalna relativnost je relevantna za opis fizičkih procesa kada se tela kreću brzinama reda brzine svetlosti. Izložićemo Ajnštajnovе postulate specijalne relativnosti, a potom analizirati osnovne posledice ovih postulata kao što su: dilatacija vremena, kontrakcija dužine, problem istovremenosti događaja i druge.

1.1 Maksvelove jednačine i Galilejeva simetrija

Događaj je fizička pojava koja se desila u nekom trenutku vremena t i na nekom mestu, tj. u tački x, y, z . Dakle, događaj opisujemo sa četiri broja. Primer događaja je paljenje sijalice ili stizanje voza u stanicu. Koordinate događaja u inercijalnom sistemu S su t, x, y, z , a tog istog događaja za drugog inercijalnog posmatrača iz sistema S' su t', x', y', z' . Inercijalni sistemi u Njutnovoј mehanici su povezani Galilejevim transformacijama u skladu sa apsolutnošću prostora i vremena. Pri prelasku iz inercijalnog sistema S u drugi sistem S' koji se kreće konstantnom brzinom \mathbf{V} , koordinate događaja prema Galilejevim transformacijama se transformišu prema

$$\begin{aligned}t' &= t \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t .\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

Prepostavili smo da se sistemi S i S' poklapaju u početnom trenutku. Prva relacija u (1.1.1) izražava činjenicu da je vreme apsolutna koordinata. Ono isto teče u oba sistema. Veza između Dekartovih koordinata događaja je posledica pretpostavke o apsolutnosti prostora.

Iz prethodnih relacija sledi klasični zakon sabiranja brzina. Ako je \mathbf{v} brzina čestice u sistemu S onda je njena brzina u sistemu S' data sa

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} . \quad (1.1.2)$$

Iz zakona slaganja brzina dobijamo da su ubrzanja čestice ista u inercijalnim sistemima,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} . \quad (1.1.3)$$

Njutnov zakon

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.1.4)$$

je invarijantan na transformacije (1.1.1), tj. u sistemu S' on ima isti oblik

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad (1.1.5)$$

kao i u sistemu S . Razmatrali smo jedan specijalan slučaj Galilejevih transformacija. Ovakve transformacije (prelazak iz jednog inercijalnog sistema u drugi koji se kreće konstantnom brzinom) se nazivaju bustovima. Pored bustova Galilejeve transformacije su rotacije koordinatnog sistema, vremenska translacija i prostorna translacija. Dakle, proizvoljna Galilejeva transformacija ima oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= R\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{r}_0 \\ t' &= t + \tau , \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

gde je R je 3×3 ortogonalna matrica, \mathbf{V} i \mathbf{r}_0 su konstantni vektori, a τ je konstanta.

Maksvelova teorija elektromagnetizma ujedinjuje elektricitet i magnetizam i vodi do izvanrednih zaključaka o prirodi svetlosti. Maksvelove jednačine za elektromagnetno polje u vakuumu su

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)/\varepsilon_0 \quad (1.1.7)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1.8)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.9)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) . \quad (1.1.10)$$

One povezuju izvore polja: zapreminsku gustinu naelektrisanja ρ i struje \mathbf{j} sa jačinama polja \mathbf{E} , \mathbf{B} .

Posmatrajmo deo prostora u kome nemamo naelektrisanja, tj. gde važi $\rho = 0$ i $\mathbf{j} = 0$. Uzimanjem rotora treće Maksvelove jednačine

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial(\operatorname{rot}\mathbf{E})}{\partial t} \quad (1.1.11)$$

dobijamo

$$\operatorname{graddiv}\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1.1.12)$$

što nakon primene druge Maksvelove jednačine prelazi u

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 .$$

Slično, uzimanjem rotora treće Maksvelove jednačine dobijamo

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.1.13)$$

Električno i magnetno polje zadovoljavaju talasne jednačine. Dakle, u oblasti prostora gde nema naelektrisanja u vakuumu postoji elektromagnetni talas. Fazna brzina elektromagnetnog talasa je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} .$$

Herz je dokazao postojanje elektromagnetnih talasa.

Ozbiljan problem u fizici početkom dvadesetog veka bila je činjenica da Maksvelove jednačine menjaju oblik pri Galilejevim transformacijama. Pogledajmo kako se operator

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.1.14)$$

transformiše pri Galilejevom bustu duž x -ose. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} V \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &\neq \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} , \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

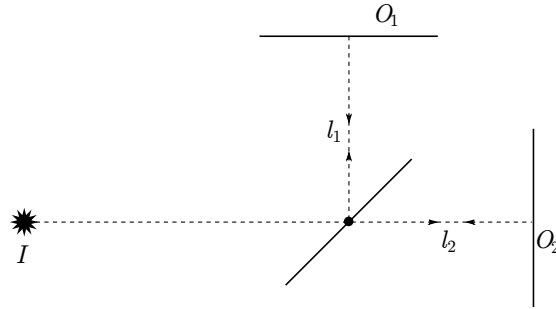
gde smo uzeli da se primovani sistem kreće duž x -ose brzinom V . Iz ovoga je jasno da forma talasne jednačine nije invarijantna na Galilejeve transformacije.

Nekovarijantnost Maksvelovih jednačina pri Galilejevim transformacijama se vidi i iz sledećeg jednostavnog razmatranja. Neka se ravan monohromatski elektromagnetni talas talasnog vektora $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \mathbf{e}_x$ i frekvence $\omega = ck$ prostire duž x - ose. Električno i magnetno polje su dati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + ikx} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + ikx} , \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

gde su \mathbf{E}_0 i \mathbf{B}_0 amplitude električnog, odnosno magnetnog polja. Iz prve i druge Maksvelove jednačine sledi da su \mathbf{E}_0 i \mathbf{B}_0 ortogonalni na x - osu, tj. elektromagnetni talas u vakuumu je transverzalan. Za posmatrača S' koji se kreće duž x - ose brzinom V brzina talasa po klasičnom zakonu slaganja brzina je $c - V$, pa je frekvencija talasa $\omega' = k(c - V)$. Za posmatrača S' elektromagnetno polje talasa je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_0 e^{-ik(c-V)t + ikx'} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}_0 e^{-ik(c-V)t + ikx'} . \end{aligned} \quad (1.1.17)$$



Slika 1.1: Šema Majkelson-Morlijevog eksperimenta

Za $V = c$ ovaj talas postaje nezavisan od vremena

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_0 e^{ikx'} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}_0 e^{ikx'} . \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Medjutim, (1.1.18) ne zadovoljava treću i četvrtu Maksvelovu jednačinu u sistemu S' . Dakle, Galilejeve transformacije jedno specijalno rešenje Maksvelovih jednačina prebacuju u nešto što nije rešenje. To znači da Galilejeve transformacije nisu transformacije simetrije Maksvelove teorije.

Jedna mogućnost je da Maksvelove jednačine nisu korektne; mora da postoji neka teorija elektromagnetizma invarijantna na Galilejeve transformacije. Nasuprot tome možda su Maksvelove jednačine korektne, a Galilejeve transformacije nisu ispravna veza izmedju inercijalnih sistema. Tačno je ovo drugo.

Pri prostiranju zvučnih talasa pored izvora zvuka potrebna je i sredina kroz koju se talas prostire. Zvuk se ne prostire u vakuumu. Iz tog razloga je smatrano da mora da postoji nekakva hipotetična supstanca u celom svemiru neophodna za prostiranje elektromagnetnih talasa. Ona je nazvana etrom.

1.2 Majkelson-Morlijev eksperiment

Šema Majkelson-Morlijevog interferometra prikazana je na slici 1.1. Svetlost iz izvora I delimično se reflektuje i transmituje na ogledalu O . Reflektovani zrak 1 reflektuje se na ogledalu O_1 , a zrak 2 ide do ogledala O_2 od koga se odbija. Reflektovani zruci od ogledala O_1 , odnosno O_2 , posle odbijanja, odnosno transmisije na ogledalu O su koherentni. Na ekranu dobijamo interferencionu sliku. Primenom klasičnog zakona sabiranja brzina odredićemo faznu razliku izmedju zraka 1 i 2 u ovom eksperimentu. Neka je \mathbf{v} brzina Zemlje u odnosu na etar, \mathbf{c} brzina svetlosti u odnosu na etar, a \mathbf{c}' brzina svetlosti u odnosu na Zemlju. Po klasičnom zakonu slaganja brzina je

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{v} . \quad (1.2.19)$$

Uzmimo da je brzina Zemlje, v duž zraka 2. Vreme potrebno da zrak 2 ode do ogledala O_2 i da se vrati do O je

$$t_2 = \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.2.20)$$

Vreme kretanja zraka 1, od ogledala O do ogledala O_1 i natrag do ogledala O je

$$t_1 = \frac{2l_1}{c'} = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.2.21)$$

Fazna razlika izmedju ova dva zraka je

$$\delta = \frac{2\pi c}{\lambda} (t_1 - t_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right), \quad (1.2.22)$$

gde je λ talasna dužina svetlosti. Intenzitet svetlosti na ekranu je proporcionalan sa faktorom $\cos^2(\delta/2)$, tj. fazna razlika izmedju dva koherentna talasa određuje interferencionu sliku.

Ako sada okrenemo aparaturu za 90° , tako da je zrak 1 duž vektora v onda je fazna razlika data sa

$$\delta' = \frac{2\pi c}{\lambda} (t'_1 - t'_2) = -\frac{4\pi}{\lambda} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (1.2.23)$$

Jasno je da $\delta \neq \delta'$ tako da očekujemo da se nakon rotiranja aparature interferencionna slika promeni. Razlika faznih razlika je

$$\delta' - \delta = 4\pi \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (1.2.24)$$

Kada je Majkelson izveo eksperiment 1881. godine, zbir $l_1 + l_2$ je bio mali, oko 1m. Talasna dužina svetlosti je $\lambda = 10^{-6}$ m. Brzina Zemlje u odnosu na Sunce je $v = 30$ km/s, pa je odnos

$$\frac{v}{c} \approx 10^{-4} \quad (1.2.25)$$

mali, te je

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} &\approx 1 + \frac{v^2}{c^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &\approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Zamenom (1.2.26) u (1.2.24) dobija se

$$\delta - \delta' = 2\pi \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \approx 2\pi \cdot 10^{-2}. \quad (1.2.27)$$

U vreme kada je Majkelson izveo eksperiment ovako mala promena interferencione slike nije mogla biti opservabilna. Majkelson je eksperiment ponovio šest godina kasnije zajedno sa Morlijem. Tada je ukupna dužina bila $l_1 + l_2 = 25\text{m}$, pa je razlika $\delta - \delta' = 2\pi \cdot 0,25$, što bi trebalo da se registruje kroz promenu interferencione slike. Međutim, rezultat eksperimenta je bio negativan. Nema promene interferencione slike, tj. $\delta' = \delta$. U prethodnom računu koristili smo klasični zakon sabiranja brzina i hipotezu etra. I jedno i drugo je pogrešno. Mnogi značajni fizičari sa početka dvadesetog veka nisu prihvatili činjenicu da etra nema. H. Lorenc i Ficdžerald su nezavisno jedan od drugog shvatili da se negativan rezultat Majkelson-Morlijevog eksperimenta može objasniti ako se pretpostavi da se dužina tela koje se kreće smanjuje. Naime, dužina tela u sistemu u kome se telo kreće brzinom v u odnosu na etar je

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.2.28)$$

gde je L_0 dužina tela u miru. Lorenc je smatrao do kontrakcije dužine tela dolazi zbog interakcije interferometra sa etrom. Pretpostavka o kontrakciji dužine je bila dobra, ali fizička interpretacija je bila pogrešna. Uzrok kontrakcije nije interakcija aparature sa etrom. Problem je rešio Albert Ajnštajn u svom čuvenom radu iz 1905. godine. Ajnštajn je uveo dva postulata specijalne teorije relativnosti¹:

1. Fizički zakoni su isti u svim inercijalnim sistemima.
2. Brzina svetlosti u vakuumu je nezavisna od toga da li se izvor ili posmatrač kreću i ista je u svim inercijalnim sistemima.

Prvi postulat je postulat relativnosti, a drugi konstantnosti brzine svetlosti. Ova dva postulata radikalno menjaju našu predstavu o prostoru i vremenu. U Njutnovoju mehanici vreme i prostor su apsolutni, dok je po specijalnoj relativnosti brzina svetlosti apsolutna, tj. ista za sve inercijalne posmatrače. Njutnovi zakoni imaju isti oblik u inercijalnim sistemima, pa princip relativnosti važi i u Njutnovoju mehanici, ali ako Galilejeve transformacije povezuju inercijalne sisteme. Galilejeva simetrija nije kompatibilna sa drugim postulatom.

1.3 Lorencov bust i posledice

Neka su S i S' dva inercijalna sistema i neka se sistem S' kreće duž x ose brzinom V u odnosu na sistem S , kao što je prikazano slici 1.2. Uzećemo da su se u početnom trenutku ova dva sistema poklapala. Ovakvu konfiguraciju sistema S i S' zvaćemo standardnom konfiguracijom. Neka u koordinatnom početku sistema S imamo izvor svetlosti. Svetlost se emituje u početnom trenutku, $t' = t = 0$. Sferni talasni front za posmatrača S u trenutku t dostigao je tačku (x, y, z) pa je

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.3.29)$$

odnosno

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (1.3.30)$$

¹Termin specijalna se odnosi na činjenicu da se razmatraju samo inercijalni sistemi. Neinercijalni sistemi se razmatraju u okviru opšte teorije relativnosti koja je teorija gravitacije.

Posmatrač u sistemu S' ima svoje lenjire i svoj sat. On događaj "dolazak talasnog fronta" vidi u trenutku t' , u tački (x', y', z') . Kako se i za njega svetlost kreće brzinom c (drugi Ajnštajnov postulat) to je

$$ct' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} , \quad (1.3.31)$$

odnosno

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 . \quad (1.3.32)$$

Dakle, za oba posmatrača veličina $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, koja se naziva kvadratom intervala, jednaka je nuli. Kvadrat intervala između događaja (t_1, x_1, y_1, z_1) i (t_2, x_2, y_2, z_2) je

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 . \quad (1.3.33)$$

Za infinitezimalno bliske događaje (t, x, y, z) i $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ kvadrat intervala je

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 . \quad (1.3.34)$$

Za posmatrača iz S' ova veličina je

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 . \quad (1.3.35)$$

Kao što smo rekli, za svetlost su i ds^2 i ds'^2 jednaki nuli, pa je

$$ds'^2 = f(t, x, y, z, \mathbf{V})ds^2 , \quad (1.3.36)$$

gde je f neka funkcija. Zbog homogenosti vremena i prostora ona ne može zavisiti od t odnosno x, y, z . Svi pravci su ravnopravni, tj. prostor je izotropan, pa funkcija f zavisi samo od intenziteta brzine

$$ds'^2 = f(V)ds^2 . \quad (1.3.37)$$

Za posmatrača iz S' sistem S se kreće brzinom $-V\mathbf{e}_x$ pa je

$$ds^2 = f(V)ds'^2 . \quad (1.3.38)$$

Zamenom (1.3.38) u (1.3.37) dobijamo $f^2 = 1$, tj. $f = \pm 1$. Da li je $f = 1$ ili $f = -1$ vidimo iz sledećeg specijalnog slučaja. Ako je $V = 0$, tj. $S = S'$ tada je

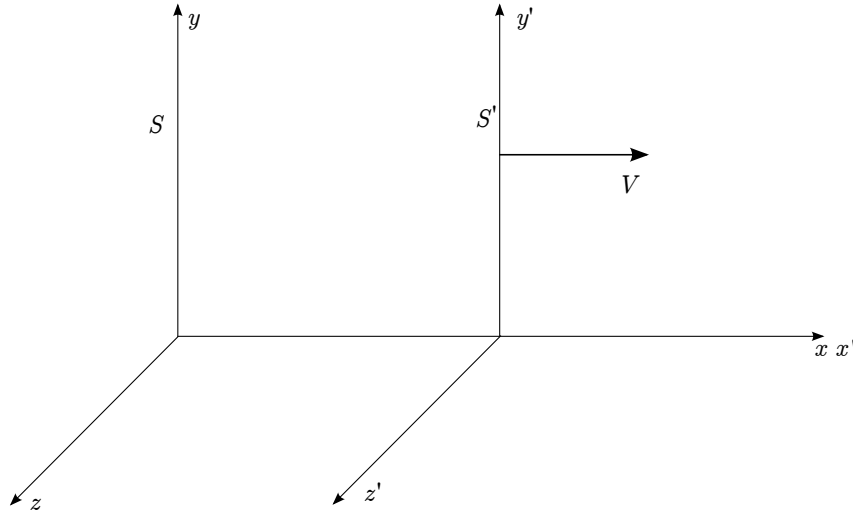
$$ds^2 = ds'^2 , \quad (1.3.39)$$

pa konačno zaključujemo da je $f = 1$, odnosno

$$ds'^2 = ds^2 . \quad (1.3.40)$$

Za događaje na konačnom rastojanju je

$$s^2 = s'^2 . \quad (1.3.41)$$



Slika 1.2: Standardna konfiguracija.

Invarijantnost intervala između događaja (1.3.40) je osnovni zaključak ove analize. Lorencove transformacije su transformacije koordinata koje zadovoljavaju ovaj uslov. Jedno rešenje uslova $s'^2 = s^2$ je

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.3.42)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.3.43)$$

$$y' = y \quad (1.3.44)$$

$$z' = z, \quad (1.3.45)$$

što se lako proverava. Za male brzine, $V \ll c$ gornje transformacije postaju

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

Ovo je Galilejeva transformacija za prelazak iz inercijalnog sistema S u sistem S' koji se duž x ose kreće konstantnom brzinom V . Prema tome, Lorencova transformacija (1.3.42-1.3.45) je prelazak iz S u sistem koji se kreće duž x ose kreće konstantnom brzinom V . Ovakva transformacija se naziva bustom (eng. boost), ili specijalnom Lorencovom transformacijom. Ako uvedemo $\beta = V/c$ i

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.3.47)$$

transformacije (1.3.42-1.3.45) postaju

$$\begin{aligned}
 (ct') &= \gamma(ct) - \beta\gamma x \\
 x' &= -\beta\gamma(ct) + \gamma x \\
 y' &= y \\
 z' &= z .
 \end{aligned}
 \tag{1.3.48}$$

Ako dalje uvedemo tzv. hiperbolni parametar φ , sa $\tanh \varphi = V/c$, onda je $\gamma = \cosh \varphi$ i $\beta\gamma = \sinh \varphi$, pa je

$$\begin{aligned}
 (ct') &= (ct) \cosh \varphi - x \sinh \varphi \\
 x' &= -(ct) \sinh \varphi + x \cosh \varphi \\
 y' &= y \\
 z' &= z .
 \end{aligned}
 \tag{1.3.49}$$

Ovaj oblik Lorencovog busta podseća na rotaciju, samo što su trigonometrijske funkcije \sin i \cos zamenjene sa odgovarajućim hiperbolnim funkcijama. U prethodnim redovima smo 'pogodili' Lorencovu transformaciju. Uzimajući u obzir formulu

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$

mogli smo lako pretpostaviti oblik Lorencovog busta (1.3.49).

Sada ćemo iz jednostavnih razmatranja izvesti (1.3.42-1.3.45). Neka su S i S' inercijalni sistemi i neka se S' kreće konstantnom brzinom V duž x - ose sistema S . U početnom trenutku ova dva sistema su se poklapala. Slobodna čestica u S se kreće po pravoj $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, gde su \mathbf{r}_0 početni položaj, a \mathbf{v} brzina čestice. Za posmatrača iz S' čestica se takodje kreće pravolinijski po analognoj jednačini $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'t'$. Transformacije koordinata moraju biti linearne, da bi pravu transformisale u pravu, tj.

$$\begin{aligned}
 t' &= At + Bx + Cy + Dz \\
 x' &= Et + Fx + Gy + Hz \\
 y' &= Jt + Kx + Ly + Mz \\
 z' &= Nt + Px + Qy + Rz .
 \end{aligned}$$

A, B, C, \dots su konstante. Drugim rečima ovakva transformacija koordinata je posledica homogenosti prostora i vremena u inercijalnim sistemima.

Izbor koordinatnog početka je proizvoljan u yz -ravni, pa t' i x' ne treba da zavise od y i z . Dakle $C = D = G = H = 0$. Koordinatni početak sistema S' se kreće po $x = Vt$, $y = z = 0$ za posmatrača iz S , dok za onog iz primovanog sistema važi $x' = y' = z' = 0$. Oдавde je

$$\begin{aligned}
 E &= -FV \\
 J &= -KV \\
 N &= -PV .
 \end{aligned}
 \tag{1.3.50}$$

Pošto se x osa poklapa sa x' osom, onda mora da iz $y = z = 0$ sledi $y' = z' = 0$. Ovo vodi do $K = P = J = N = 0$. Došli smo do

$$\begin{aligned} t' &= At + Bx \\ x' &= F(x - Vt) \\ y' &= Ly + Mz \\ z' &= Qy + Rz . \end{aligned} \tag{1.3.51}$$

U zadnje dve jednačine se ne pojavljuje vreme, pa iz činjenice da su ose y i y' , kao i z i z' paralelne sledi $y' = y$ i $z' = z$, tj. $L = R = 1$ i $M = Q = 0$. Konačno, zamenom dobijenih transformacija u uslov

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

dobijamo

$$F = A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B = -\frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \tag{1.3.52}$$

Dobili smo ponovo (1.3.42-1.3.45).

Ako se sistem S' kreće konstantnom brzinom \mathbf{V} u proizvoljnom smeru u odnosu na inercijalni sistem S , Lorencove transformacije imaju oblik

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{V} \frac{\gamma - 1}{V^2} - \gamma t \mathbf{V} , \end{aligned} \tag{1.3.53}$$

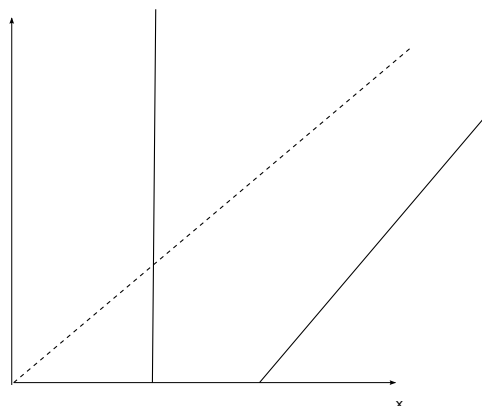
gde je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$.

1.4 Prostorno-vremenski dijagrami

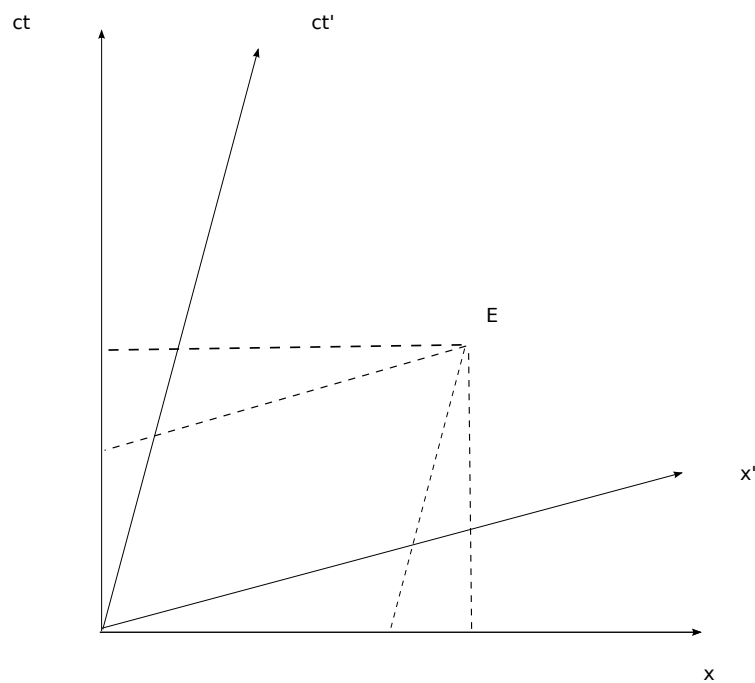
Događaj je tačka u prostor-vremenu; karakterišemo ga sa četiri broja t, x, y, z . Koordinate y i z možemo ignorisati, jer razmatramo tzv. standardnu konfiguraciju sistema S i S' . Uzećemo da je ct vertikalna, a x horizontalna osa koordinatnog sistema. Svaka tačka u ovom dvodimenzionom dijagramu reprezentuje događaj. Trajektorija čestice se naziva svetskom linijom. Svetlost se kreće po pravoj $ct = x + \text{const}$, prikazanoj tačkastom linijom na slici 1.3. Svetska linija tela koje miruje u tački $x = x_0$ je prava linija paralelna sa ct -osom, dok je svetska linija čestice koja se kreće ravnomerno brzinom v takodje prikazana na slici 1.3. To je jednačina prave

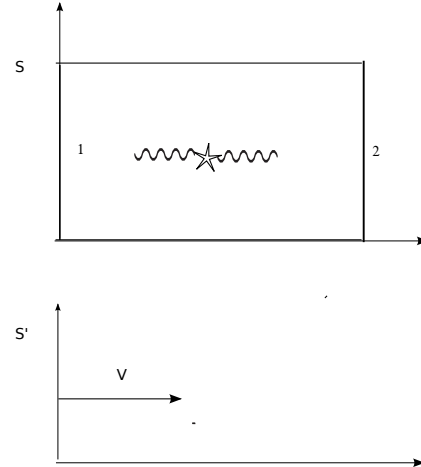
$$ct = \frac{c}{v} x + \text{const} .$$

Na slici 1.4 nacrtaćemo i ose sistema S' koji se kreće duž x -ose brzinom V . x' -osa određena je sa $ct' = 0$, pa je to prava $ct = \frac{V}{c} x$. Analogno ct' -osa je određena sa $x' = 0$, odakle sledi da ona data sa $ct = \frac{c}{V} x$. Uglovi između primovane i odgovarajuće neprimovane ose su jednaki i njihov tangens je $\tan \alpha = V/c$. Na slici 1.4 sa E smo obeležili događaj. Koordinate ovog događaja u ova dva sistema reference nisu iste. Ovo je pasivna interpretacija Lorencove transformacije.



Slika 1.3: Prostorno-vremenski dijagram

Slika 1.4: Koordinate događaja E u dva inercijalna sistema.



Slika 1.5: Paljene sijalice posmatrano iz dva vagona, od kojih se jedan kreće brzinom V .

1.5 Relativnost istovremenosti događaja i sinhronizacija časovnika

Neka je A_1 događaj. Vremenski trenutak kada se ovaj događaj desio određujemo pomoću časovnika koji se nalazi u tački A_1 . Neka on pokazuje vreme t_1 . Udaljeni časovnik u tački A_2 registruje paljene sijalice A_1 kada do njega stigne signal iz A_1 , a to je u trenutku

$$t_2 = t_1 + (\text{vreme potrebno da svetlost predje put od } A_1 \text{ do } A_2) .$$

Ako su časovnici ovako podešeni kažemo da su sinhronizovani. Da bismo merili vreme u svakoj tački prostora moramo imati časovnike i svi ti časovnici treba da budu međusobno sinhronizovani.

Ako su dva događaja istovremena u jednom sistemu reference, $t_1 = t_2$ oni ne moraju biti simultani za posmatrača iz drugog sistema. Neka se na sredini vagona, prikazanom na slici 1.5 nalazi sijalica koja se upali. Svetlosni signal će istovremeno stići u tačke 1 i 2 za posmatrača u vagonu; tj. $t_1 = t_2$. Neka se drugi vagon (sistem S') kreće brzinom V kao na slici 1.5. Za

posmatrača iz drugog vagona vremenski interval između događaja 1 i 2 je

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.5.54)$$

Koordinate prvog odnosno drugog događaja u sistemu S su x_1 , odnosno x_2 . Uzimajući da je $t_1 = t_2$ imamo

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= -\frac{V}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= -\frac{V}{c^2} \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (1.5.55)$$

Kako je $x_2 > x_1$, onda je $\Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$, tj. za posmatrača u S' prvo se desio događaj 2, pa onda događaj 1.

Na prostorno-vremenskom dijagramu prikazanom na slici 1.6 se jasno vidi da su događaji 1 i 2 simultani u sistemu S , a da nisu simultani u sistemu S' .

1.6 Kontrakcija dužine

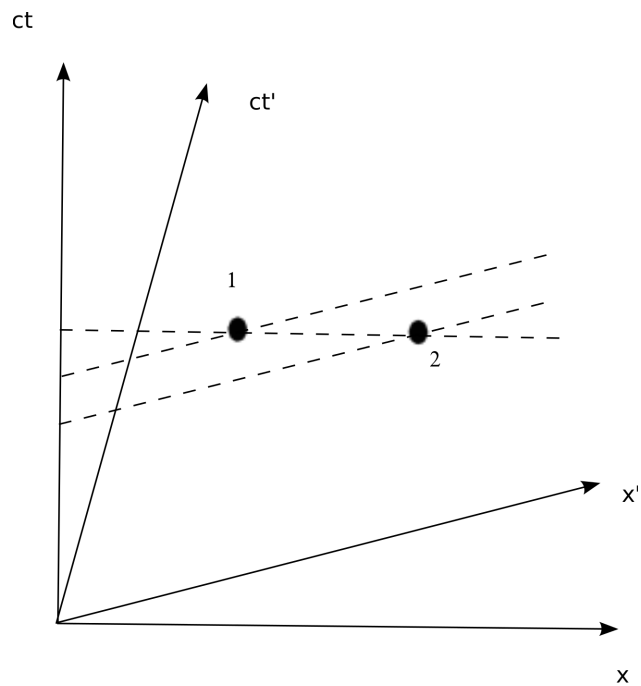
Sistem S' se kreće konstantnom brzinom V duž x - ose u odnosu na inercijalan sistem S . Neka je štap AB postavljen duž x' ose, i neka on miruje u sistemu S' , kao što je prikazano na slici 1.7. Dužina štapa u S' je $l_0 = x'_B - x'_A$. Ova dužina se naziva sopstvenom dužinom, jer štap miruje u tom sistemu. Krajevi štapa su dva događaja A i B . Kolika je dužina tog štapa za posmatrača u S ? To je razlika koordinata $x_B - x_A$ uz uslov da su ova dva događaja istovremena za posmatrača S , tj. $t_A = t_B$. Za posmatrača iz sistema S štap se kreće, te on mora levi i desni kraj štapa da 'uoči' u istom trenutku vremena po svom satu da bi izmerio dužinu. Primenom (1.3.43) imamo

$$\begin{aligned} l_0 = x'_B - x'_A &= \frac{x_B - Vt_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_A - Vt_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (1.6.56)$$

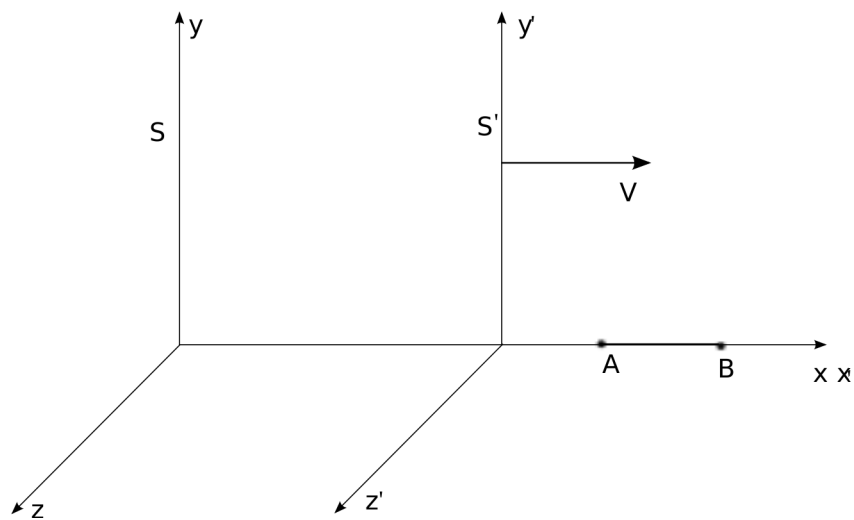
odnosno

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (1.6.57)$$

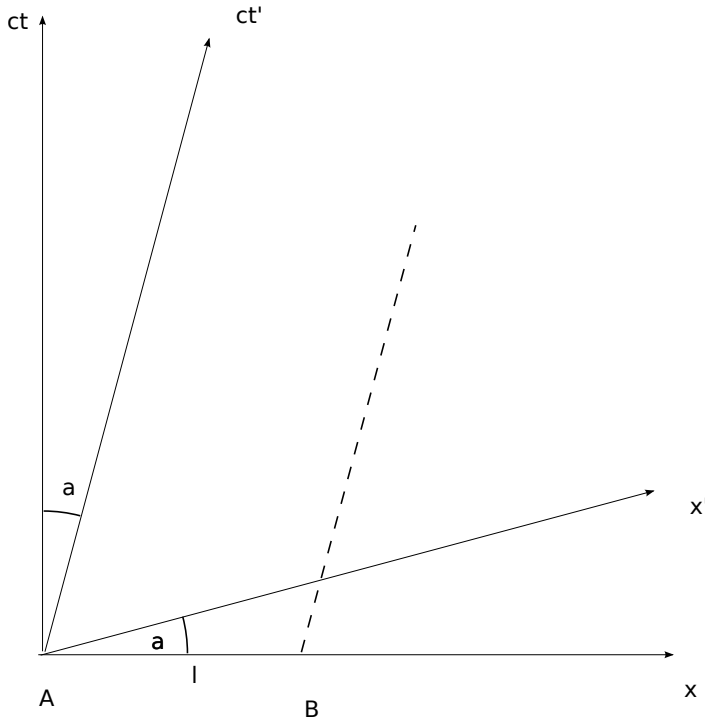
Iz zadnje formule vidimo da je dužina štapa u sistemu S manja od sopstvene dužine štapa. Ovo je tzv. kontrakcija dužine. Iz Lorencovih transformacija (1.3.42-1.3.45) je jasno da do kontrakcije neće doći ako je štap postavljen duž y odnosno z ose.



Slika 1.6: Dogajaji 1 i 2 su simultani za posmatrača iz S , a nisu za posmatrača iz sistema S'



Slika 1.7: Kontrakcija dužine



Slika 1.8: Kontrakcija dužine preko prostorno-vremenskog dijagrama.

Kontrakcija dužine se lako vidi koristeći prostorno-vremenski dijagram na slici 1.8. Uglovi trougla ABC su α , $90 + \alpha$ i $90 - 2\alpha$. Jednostavnosti radi uzećemo da je $t_A = 0$, $x_A = 0$. Događaj B je istovremen sa događajem A u sistemu S , pa je $t_B = 0$. Onda je $l = x_B$ i $l_0 = x'_B$. Primenom sinusne teoreme sledi

$$\frac{\cos 2\alpha}{l} = \frac{\cos \alpha}{l_0}, \quad (1.6.58)$$

odakle se, uz odgovarajuće trigonometrijske relacije dobija (1.6.57).

Prostorno vremenski dijagrami ne zadovoljavaju Euklidsku geometriju, pa pojam rastojanja nije isti kao u Euklidskoj geometriji.

1.7 Paradoks kola i garaže

Kola sopstvene dužine l_0 kreću se brzinom v i treba da udju u garažu čija je sopstvena dužina takodje l_0 . Garaža ima prednja i zadnja vrata. Kada prednji kraj kola dodje do garaže prednja vrata garaže se otvore, a kada zadnji kraj kola udje u garažu prednja vrata garaže se zatvore. Kada prednji kraj kola dodje do zadnjih vrata garaže ona se otvore, kola prodju i na kraju kada zadnji kraj kola dodje do kraja garaže vrata garaže se zatvore. Za posmatrača iz garaže dužina kola je $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l_0$, pa su kola kompletno u garaži. Kako je situacija simetrična za posmatrača iz kola, garaža se kreće brzinom $-v$. Sada je dužina garaže l , a kola l_0 pa kola ne mogu da stanu u garažu. Ko je u pravu? Da li su kola u garaži ili ne? Problem je vezan

sa merenjem dužine, a da bi izmerili dužinu moramo imati simultane događaje. Medjutim, simultanost događaja je relativna. Mi smo gore opisali četiri događaja i izgleda nam da smo ih redjali po vremenskom sledu. To je videćemo tačno, ali za posmatrača iz garaže.

Analizirajmo situaciju preciznije. Imamo četiri događaja. Prvi je A , prednji kraj kola ulazi u garažu. Događaj B je zadnji kraj kola prolazi pored ulaza u garažu, događaj C je prednji kraj kola prolazi pored zadnjeg kraja garaže. I na kraju događaj D je da zadnji kraj kola prolazi pored izlaza iz garaže. Koordinate događaja A za posmatrača iz garaže su $(ct_1 = -cl/v, x_1 = 0)$, a za posmatrača iz kola $(ct'_1 = -cl_0/v, x'_1 = l_0)$. Događaj B je kada se koordinatni počeci poklapaju i tad smo uzeli da oba časovnika pokazuju 0. Naime $B(ct_2 = 0, x_2 = 0)$ odnosno $B(ct'_2 = 0, x'_2 = 0)$. Koordinate događaja C u sistemu garaže su $(ct_3 = c(l_0 - l)/v, x_3 = l_0)$, a u sistemu kola $(ct'_3 = c(l - l_0)/v, x'_3 = l_0)$. Koordinate događaja D za posmatrača iz garaže su $(ct_4 = cl_0/v, x_4 = l_0)$, a za posmatrača iz kola $(ct'_4 = cl/v, x'_4 = 0)$.

Za posmatrača iz garaže kola imaju dužinu l_0/γ i ona su kompletno u garaži izmedju trenutka t_2 i t_3 . Događaji su prikazani na prostorno-vremenskom dijagramu 1.9.

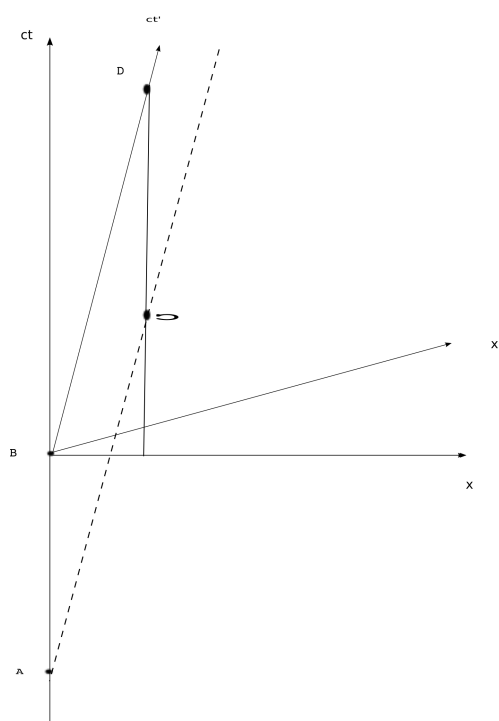
U sistemu kola prvo se desio događaj C pa onda B . To se i vidi i iz $t'_2 = 0$ a $t'_3 = (l - l_0)/v < 0$. Za posmatrača iz kola prvo prednji kraj kola dodje do kraja garaže, pa tek kada prednji kraj napusti garažu zadnji kraj kola prodje pored ulaza u garažu. Kola nikad nisu kompletno u garaži, a i ne mogu, jer im je dužina l_0 veća od dužine garaže. Nema nikakvog paradoksa. Recimo još na kraju da je interval izmedju događaj B i C prostornog tipa.

Zanimljivo je da razmotrite i sledeći primer. Neka je brzina kola $v = \sqrt{3}c/\sqrt{2}$, sopstvena dužina kola l_0 , a garaže $l_0/2$. Za posmatrača iz garaže dužina kola će biti $l_0/2$ i staće kompletno u garažu. Ali za posmatrača iz kola, kola imaju dužinu l_0 , a garaža $l_0/4$. Događaji B i C u ovom slučaju su simultani za posmatrača iz garaže, ali nisu za posmatrača iz kola.

Na kraju da rezimiramo: Oba posmatrača su u pravu. Da li su kola stala u garažu ili nisu zavisi od toga da li su događaji B i C simultani ili nisu. Simultanost događaja je relativna, tj. zavisi od sistema reference.

1.8 Dilatacija vremena

Neka su A i B dva događaja koja su na istom mestu u sistemu S' . To npr. mogu biti dva otkucaja sata koji miruje u ovom sistemu. Vremenski interval izmedju ova dva događaja za posmatrača u S' je $t'_B - t'_A = \Delta t_0$. Ovo vreme se naziva sopstveno vreme, jer je izmereno u sistemu u kome sat miruje. Za posmatrača iz S ova dva događaja nisu na istom mestu. Posmatrač u sistemu S koristi svoj sat, vremenski interval izmedju ova dva događaja je $\Delta t = t_B - t_A$. Primenom



Slika 1.9:

Lorencovih transformacija imamo

$$\begin{aligned}
 t_B - t_A &= \frac{t'_B + \frac{V}{c^2}x'_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t'_A + \frac{V}{c^2}x'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 &= \frac{t'_B - t'_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
 &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{1.8.59}
 \end{aligned}$$

gde smo iskoristili $x'_B = x'_A$. Dakle,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{1.8.60}$$

Vremenski interval izmedju ova dva događaja u S je duži nego u sopstvenom sistemu, $\Delta t > \Delta t_0$. Ovo produženje vremena se naziva dilatacija vremena. U pokretnom sistemu vreme teče sporije; vremenski interval izmedju dva događaja je najkraći u sistemu u kojem sat miruje.

Na prostorno-vremenskom dijagramu prikazanom na slici 1.10 uzeli smo da su događaji A i B u koordinatnom početku sistema S' , tj. $x'_B = x'_A = 0$. Sa slike je jasno da vremenski interval izmedju ova dva događaja u sistemu S nije isti kao u pokretnom sistemu. Rezultat za dilataciju vremena se ne može dobiti sa slike 1.10 primenom trigonometrijskih relacija, jer geometrija prostor-vremena nije Euklidska.

Neka se čestica u trenutku t nalazi u tački $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i neka za laboratorijsko vreme dt čestica dodje u tačku $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Početni i krajnji položaji čestice su dva infinitezimalno bliska događaja: (t, \mathbf{r}) i $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$. Kvadrat intervala izmedju ova dva događaja je

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right) = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{1.8.61}$$

Sistem koji se kreće zajedno sa česticom (sopstveni sistem) je u malom vremenskom intervalu $(t, t + dt)$ inercijalan. U njemu je

$$ds'^2 = c^2 d\tau^2, \tag{1.8.62}$$

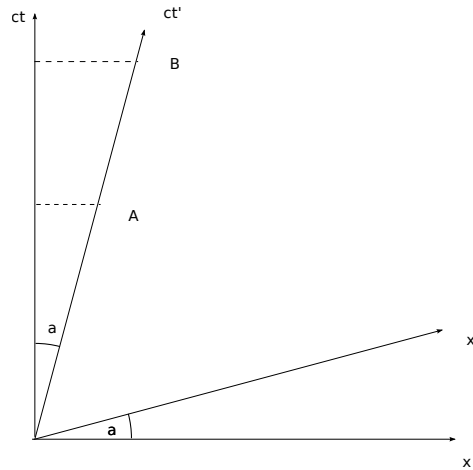
jer je $d\mathbf{r}'^2 = 0$, a $d\tau$ je interval sopstvenog vremena. Iz $ds'^2 = ds^2$ sledi formula za dilataciju vremena

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{1.8.63}$$

odakle je sopstveno vreme dato sa

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{1.8.64}$$

Kosmički zraci (uglavnom protoni) pri sudarima u gornjim slojevima atmosfere kreiraju pi-mezone (π), koji se brzo raspadaju na mione. Mion μ^- je čestica koja je slična elektronu, samo



Slika 1.10: Dilatacija vremena preko prostorno-vremenskog dijagrama.

je oko 200 puta veće mase. Mion se brzo raspada na elektron, antielektronski neutrino i mionski neutrino



Srednje vreme života miona je $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6} s$ u sistemu u kome mion miruje. Ako bi se mion kretao brzinom svetlosti (što nije moguće) onda bi prešao put $c\tau = 0,66 km$. Medjutim mioni predju mnogo veći put pre nego što se raspadnu. Njih detektujemo na površini Zemlje, tj. oni predju put od oko desetak kilometara. Kako je to moguće? Rešenje je jednostavno. Vreme kretanja miona za posmatrača sa Zemlje je veće nego njegovo sopstveno vreme. Put koji mion predje je dat sa

$$l = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v . \quad (1.8.66)$$

Ako je npr. $v = 0,997c$, tada je $l = 9 km$.

1.9 Paradoks blizanaca

Ana i Bojan su blizanci. Bojan sedne u raketu i krene ka zvezdi Alfa Kentauri sa konstantnom brzinom v , a Ana ostane na Zemlji. Posle vremena T po Aninom satu Bojan je stigao do zvezde, ali odluči da se odmah vrati na Zemlju i to sa istom brzinom. Po Aninom satu Bojan je stigao na Zemlju posle vremena $2T$. Medjutim, saglasno Bojanovom satu njegovo putovanje trajalo je $2T' = \frac{2T}{\gamma}$. Ovaj efekat je dilatacija vremena i on je realan, tj. nije naučna fantastika. Rastojanje od Zemlje do zvezde Alfa Kentauri je 4 svetl.god.. Ako je $v = 0,8c$, onda po Aninom satu, Bojanovo putovanje do zveze i nazad traje $2T = 10$ god. Po Bojanovom satu to vreme je $2T' = 6$ god. Bojan je mlađi od Ane.

Da li možemo situaciju da obrnemo? U Bojanovom sistemu reference on miruje, a Ana se kreće, pa bi njen sat trebalo da sporije radi a ne njegov. Ona bi pri njihovom susretu bila mlađja, a on stariji. Rešenje paradoksa je vrlo jednostavno. Anin sistem je inercijalan, a Bojanov neinercijalan, jer on ne može trenutno da dostigne brzinu v , niti da se zaustavi kada dodje do zvezde. Dakle, nema simetrije izmedju ova dva sistema i nema paradoksa. Bojan je definitivno mlađi od Ane².

Neka je dolazak Bojana na zvezdu dogadjaj P . Ako uzmemo da se Bojan u odnosu na Anu kretao konstantnom brzinom, onda su oba sistema inercijalna. Koordinate dogadjaja P u Aninim koordinatama su $(ct = cT, x = vT)$, a u Bojanovom $(ct' = cT' = cT/\gamma, x' = 0)$. Dogadjaj C na slici 1.11 je simultan sa dogadjajem P u Aninom sistemu, ali ova dva dogadjaja nisu simultana u Bojanovom sistemu. Linija simultanosti kroz tačku P u Bojanovom sistemu je data sa

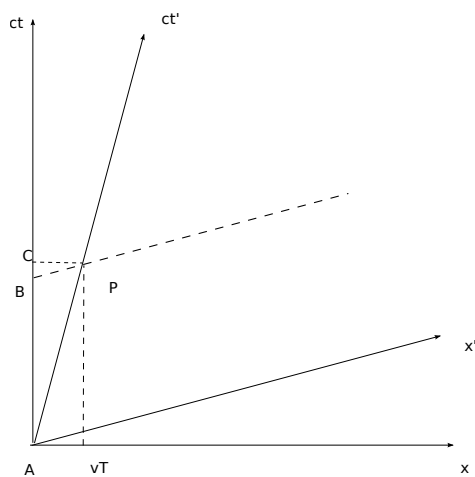
$$ct = \frac{v}{c}x + cT\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Kada je Bojan stigao do zvezde Alfa Kentauri on misli da se Ana nalazi u tački B (slika 1.11) i da je ona ostarila za $T'/\gamma = T/\gamma^2 = \frac{9}{5}$ god. Oba sistema su inercijalna i postoji simetrija izmedju njih. U odnosu na Bojana Ana se kreće brzinom $-v$. Vreme T' za Anu iznosi T'/γ . Umesto da Bojan koči, i zatim se ponovo ubrzavajući do brzine v vraća ka Zemlji razmatraćemo drugu situaciju. Kada Bojan stigne do zvezde sinhronizuje svoj časovnik sa Markom koji ide ka Zemlji brzinom v . Linije simultanosti u Markovom sistemu su $t'' = \text{const.}$, u koordinatama Aninog sistema linija koja prolazi kroz P i D je

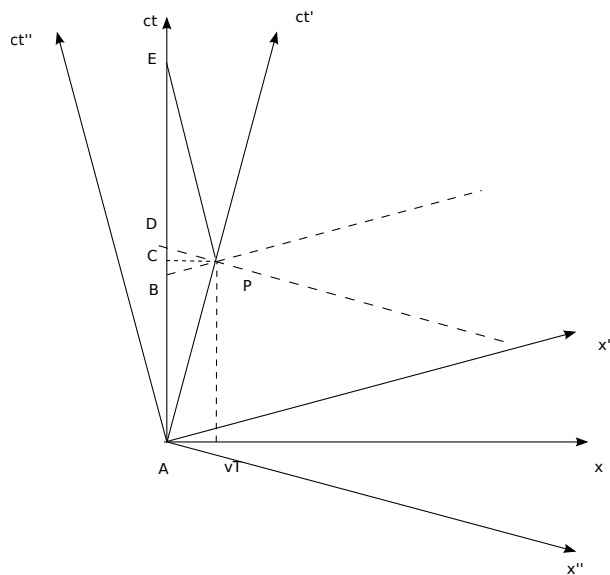
$$ct = -\frac{v}{c}x + cT\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Koordinate tačke D su $(ct = cT\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right), x = 0)$. Ovo znači sledeće. Kada Marko krene sa zvezde ka Zemlji (tačka P na slici 1.12) on misli da je Ana u tački D . Markov sat pokazuje T , a Anin, po Markovom satu $T\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$. Marko se po svom časovniku kreće do Zemlje za vreme T' , za to vreme iz Markove perspektive Ana je ostarila za T/γ^2 . Bojanovo kretanje od A do P i Anino od A do B je potpuno simetrično. Isto važi i za Anino kretanje od D do E i Markovo od P do E . Sistemi su tada inercijalni i sve je simetrično. Ali kako je Ana brzo ostarila od B do C ? Po njenom satu to vreme je $2T\frac{v^2}{c^2}$ i ono odgovara 'prelasku' iz Bojanovog u Markov sistem.

²Neinercijalnost sistema takodje utiče na tok vremena, ali to nećemo sada razmatrati.



Slika 1.11: Bojanov i Anin sistem



Slika 1.12: Bojan, Marko i Ana

Realističnija situacija bi bila kad bi pretpostavili da Bojan usporava približavajući se zvezdi, zaustavlja se, kreće nazad ubrzavajući do v . Svetska linija je glatka, bez diskontinuiteta brzine.

1.10 Slaganje brzina

Neka se telo kreće brzinom $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ u odnosu na inercijalni sistem S . Sistem S' se kreće brzinom \mathbf{V} u odnosu na inercijalni sistem S . Odredimo brzinu tela u odnosu na sistem S' . Ovu brzinu ćemo obeležiti sa $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$. Pretpostavimo da su ova dva sistema u standardnoj konfiguraciji.

Diferenciranjem Lorencovih transformacija, (1.3.42-1.3.45) dobijamo

$$dt' = \frac{dt - \frac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.10.67)$$

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (1.10.68)$$

$$dy' = dy \quad (1.10.69)$$

$$dz' = dz . \quad (1.10.70)$$

Projekcija brzine čestice na x' osu je

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} \\ &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} . \end{aligned} \quad (1.10.71)$$

Slično se dobijaju i sledeće dve formule:

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \quad (1.10.72)$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} . \quad (1.10.73)$$

Izrazi (1.10.71-1.10.73) predstavljaju relativističko slaganje brzina. One daju projekcije brzine tela u primovanom sistemu preko projekcija brzine u neprimovanom sistemu. U nerelativističkom limesu ove izrazi postaju klasični zakon sabiranja brzina.

Neka se foton kreće duž x - ose u sistemu S , tj. $v_x = c, v_y = v_z = 0$. Za posmatrača u S' projekcije brzine su

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c \\ v'_y &= 0 \\ v'_z &= 0 . \end{aligned} \quad (1.10.74)$$

Zaključujemo da je brzina fotona u sistemu S' takodje c , što je u skladu sa prvim Ajnštajnovim postulatom.

1.11 Aberacija svetlosti

Neka je sistem S vezan za neku udaljenu zvezdu, a neka je S' sistem vezan za Zemlju. Zemlja se kreće brzinom $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$ u odnosu na zvezdu. Svetlost emitovana sa zvezde stiže na Zemlju. Uzmimo da se svetlost kreće u Oxy ravni pod uglom θ prema x -osi za posmatrača sa zvezde. Za posmatrača sa Zemlje ovaj ugao je θ' . Ova dva ugla nisu ista i to se naziva aberacijom svetlosti. Aberacija je dakle pojava da ugao pod kojim se vidi neki objekat zavisi od relativne brzine dva inercijalna sistema. Komponente brzine svetlosti u sistemu zvezde su

$$\begin{aligned}v_x &= c \cos \theta \\v_y &= c \sin \theta \\v_z &= 0 .\end{aligned}\tag{1.11.75}$$

Primenom relativističkog slaganja brzina (1.10.71,1.10.72) i (1.10.73) dobijamo komponente brzine za posmatrača sa Zemlje:

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{c \cos \theta - V}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \\v'_y &= \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \\v'_z &= 0 .\end{aligned}\tag{1.11.76}$$

Lako se vidi da je brzina svetlosti invarijantna, tj. da je $v_x^2 + v_y^2 = v_x'^2 + v_y'^2 = c^2$. Ugao θ' je određen sa

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{c \sin \theta}{c \cos \theta - V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .\tag{1.11.77}$$

Primenom trigonometrijskih identiteta dobijamo

$$\cos \theta' = \frac{-V/c + \cos \theta}{1 - V \cos \theta/c} .\tag{1.11.78}$$

Brzina kretanja Zemlje $V = 30\text{km/s}$ pa je $V/c = 10^{-4}$. Kretanje Zemlje je nerelativističko, pa iz (1.11.78) sledi

$$\cos \theta' \approx \cos \theta - \frac{V}{c} \sin^2 \theta + O\left(\frac{V}{c}\right) .\tag{1.11.79}$$

Ako uvedemo mali ugao $\Delta\theta$ sa $\theta' = \theta + \Delta\theta$ dobijamo

$$\Delta\theta \approx \frac{V}{c} \sin \theta .\tag{1.11.80}$$

Ovaj nerelativistički rezultat za aberaciju svetlosti je poznat i pre nastanka specijalne relativnosti. Aberaciju svetlosti je zapazio 1725. godine engleski astronom Bredli.

1.12 Zadaci

Zadatak 1. Tanak štap se kreće duž sebe konstantnom brzinom i prolazi pored markera A koji se nalazi u fiksnoj tački u nepokretnom inercijalnom sistemu. Vreme koje je potrebno da štap prodje pored markera u laboratorijskom sistemu je $\Delta t = 8\text{ns}$. Za nepokretnog posmatrača vezanog za štap vreme potrebno da marker prodje pored njega je $\Delta t' = 10\text{ns}$. Kolika je sopstvena dužina štapa?

Rešenje: Iz formula

$$\Delta t = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} \quad (1.12.81)$$

i

$$\Delta t' = \frac{l_0}{v} \quad (1.12.82)$$

sledi

$$l_0 = c\sqrt{(\Delta t')^2 - (\Delta t)^2} = 1,8\text{m} . \quad (1.12.83)$$

Zadatak 2. Raketa se udaljava od Zemlje, brzinom $v = 4c/5$ u odnosu na nju. Sa rakete se emituju dva svetlosna signala prema Zemlji. Vremenski interval izmedju ova dva signala, za posmatrača sa rakete je $\Delta t' = 5\text{s}$. Koliko je vremenski interval izmedju prijema ova dva svetlosna signala na Zemlji za posmatrača sa Zemlje?

Rešenje: Neka je emisija prvog, odnosno drugog svetlosnog signala događaj A , odnosno B . Sistem vezan za Zemlju obeležićemo sa S , a za raketu sa S' . Uzećemo da se raketa kreće duž x -ose. Koordinate događaja A u sistemu S' su (t'_A, x'_A) , a u sistemu S su (t_A, x_A) . Koordinate događaja B u sistemu S' su $(t'_B = t'_A + \Delta t', x'_A)$, a u sistemu S su (t_B, x_B) . Prema Lorencovim transformacijama imamo

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_A = \frac{t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x_B &= \frac{x'_A + v(t'_A + \Delta t')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_B = \frac{t'_A + \Delta t' + \frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \end{aligned} \quad (1.12.84)$$

Prvi signal će na Zemlju da stigne u trenutku $t_A + \frac{x_A}{c}$, a drugi $t_B + \frac{x_B}{c}$. Vremenski interval izmedju njih je

$$\Delta t = t_B - t_A + \frac{x_B - x_A}{c} . \quad (1.12.85)$$

Nakon zamene gornjih izraza dobijamo

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \Delta t' = 15\text{s} . \quad (1.12.86)$$

Zadatak 3. Dve rakete, svaka sopstvene dužine l_0 prilaze Zemlji sa suprotnih strana brzinama $v = c/2$. Rakete se kreću duž istog pravca. Kolika je dužina jedne rakete za posmatrača sa druge rakete?

Rešenje: Neka je sistem S vezan levu raketu, S' za Zemlju. Zemlja se kreće brzinom $V = -c/2$ u odnosu na sistem S . Desna raketa kreće se brzinom $v'_x = -c/2$ u odnosu na Zemlju. Brzina desne rakete u odnosu na levu raketu, tj. sistem S određena je sa

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} = \frac{-c}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}c. \quad (1.12.87)$$

Dužina desne rakete za posmatrača sa leve rakete je

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = \frac{3}{5}l_0. \quad (1.12.88)$$

Naravno, zbog simetrije, to je i dužina leve rakete za posmatrača sa desne.

Zadatak 4. Dve čestice se kreću u laboratorijskom sistemu jedna duž x -ose, a druga duž y -ose. Brzina prve čestice je $v_1 = 0,8c$, a druge $v_2 = 0,6c$. Kolika je brzina jedne čestice iz sistema reference vezanog za drugu česticu?

Rešenje: Brzina jedne čestice u sistemu reference druge čestice je

$$v'_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} = 0,72c.$$

Zadatak 5. Platforma sopstvene dužine l_0 kreće se brzinom u u odnosu na Zemlju. Sa zadnjeg kraja platforme ispali se metak brzinom v' u odnosu na platformu. Brzina metka je u smeru vektora brzine platforme. Odrediti put koji metak predje dok ne pogodi prednji kraj platforme za posmatrača sa Zemlje. Uticaj gravitacije Zemlje na kretanje metka zanemariti.

Rešenje: Sistem platforme ćemo obeležiti sa S' , a sistem vezan za Zemlju sa S . Neka se metak ispali u trenutku $t'_1 = 0$ iz tačke $x'_1 = 0$ za posmatrača iz S' . Za posmatrača iz sistema S ovaj događaj ima koordinate $(t_1 = 0, x_1 = 0)$. Pogodak metka u prednji kraj platforme je drugi događaj. Njegove koordinate za posmatrača sa platforme su $(t'_2 = \frac{l_0}{v'}, x'_2 = l_0)$. Brzina metka u odnosu na sistem S je

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{uv'}{c^2}}. \quad (1.12.89)$$

Put koji metak predje za posmatrača sa Zemlje je

$$s = v(t_2 - t_1) = v \frac{t'_2 + \frac{ul_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.12.90)$$

Ako dalje zamenimo vrednosti za t'_2 i v dobijamo

$$s = \left(1 + \frac{u}{v'}\right) \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1.12.91)$$

Zadatak 6. Štap dužine l_0 u sistemu u kojem miruje nagnut je pod uglom α' u odnosu na x' osu. Primovan sistem S' je vezan za štap. Štap se kreće duž x ose laboratorijskog sistema S

koja je paralelna sa x' osom.

a) Kolika je dužina štapa u sistemu S i koliki ugao zaklapa štapa sa x -osom.

b) Posmatrač iz sistema S fotografiše štapa. Foto-ploča se nalazi duž x ose. Svetlosni zraci padaju na ploču paralelno sa y osom. Kolika je dužina štapa na fotografiji?

Rešenje:

a) Dužina x projekcije štapa je

$$l_x = l_0 \cos \alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.12.92)$$

dok je dužina štapa duž y ose nepromenjena $l_y = l_0 \sin \alpha'$.

b) Formula za kontrakciju dužine zasnovana je na merenju dužine štapa kao rastojanju izmedju istovremenih događaja na krajevima štapa. U ovom delu zadatka treba da odredimo dužinu štapa koju vidi, odnosno fotografiše posmatrač. Neka je događaj A emisija fotona sa levog, a događaj B sa desnog kraja štapa. Lik se formira na fotoploči od fotona koji istovremeno stignu na foroploču. Dakle, događaji A i B nisu istovremeni. Događaj B se desio pre događaja A za vreme $l_0 \sin \alpha' / c$ za posmatrača iz sistema S . Koordinate događaja A u sistemu S su $(t_1, x_1, y_1 = 0)$, a događaja B su $(t_2 = t_1 - l_0 \sin \alpha' / c, x_2, y_2)$. Po Lorencovim transformacijama je

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.12.93)$$

Kako je $x'_2 - x'_1 = l_0 \cos \alpha'$ to je dužina štapa na fotografskoj ploči data sa

$$l = x_2 - x_1 = \left| l_0 \cos \alpha' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_0 v \sin \alpha'}{c} \right|. \quad (1.12.94)$$

Zadatak 7. Dve rakete, A i B svaka sopstvene dužine $l_0 = 100\text{m}$ kreću se u susret jedna drugoj. Posmatrač iz svake rakete vidi da se ona druga raketa kreće brzinom v . Normalno rastojanje izmedju pravaca raketa je jako malo i dovoljno da se rakete ne bi sudarile. Kada se za posmatrača iz rakete A vrh rakete A poklopi sa repom rakete B iz rakete A ispaljuje se metak prema raketi B , kao na slici. Zanimariti vreme potrebno da metak stigne od rakete A do rakete B . Zbog kontrakcije rakete B ovaj hitac će promašiti raketu B za posmatrača iz A . Medjutim, za posmatrača iz rakete B dužina rakete A je skraćena, pa će metak pogoditi raketu B . Koji posmatrač je u pravu?

Rešenje: Neka je koordinatni početak x ose u vrhu rakete A , a x' ose u vrhu rakete B . Neka su x ose u pravcu kretanja raketa i obe su usmerene u desno. Neka je prvi događaj poklapanje vrha rakete A sa vrhom rakete B za posmatrača iz rakete A . Koordinate ovog događaja za posmatrača iz rakete A su $(t_1 = 0, x_1 = 0)$, a za posmatrača iz rakete B su $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$. Drugi događaj je poklapanje vrha rakete A sa repom rakete B . Koordinate ovog događaja za posmatrača iz rakete S su $(t_2 = \frac{l_0}{v\gamma}, x_2 = 0)$. Naredni, treći događaj je ispaljivanje metka sa repa rakete A ; njegove koordinate su $(t_3 = \frac{l_0}{v\gamma}, x_3 = -l_0)$. Četvrti događaj, poklapanje vrha rakete B sa repom rakete A ima koordinate $(t_4 = \frac{l_0}{v}, x_4 = -l_0)$. Peti događaj je poklapanje repa rakete A

sa repom rakete B . Koordinate ovog događaja za posmatrača iz A su $(t_5 = \frac{l_0}{v} + \frac{l_0}{v\gamma}, x_5 = -l_0)$. Zamenom brojnih podataka dobijamo

$$t_1 = 0, t_2 = \frac{4}{5} \cdot 10^{-6}\text{s}, t_3 = \frac{4}{5} \cdot 10^{-6}\text{s}, t_4 = 10^{-6}\text{s}, t_5 = \frac{9}{5} \cdot 10^{-6}\text{s}.$$

Za posmatrača iz rakete A događaji su se dešavali vremenskim sledom kojim smo ih navodili. Metak će očigledno promašiti raketu B , jer je za posmatrača iz rakete A dužina rakete B manja od l_0 .

Za posmatrača iz rakete B , raketa A se kreće udesno sa brzinom v i njena dužina je $\frac{l_0}{\gamma}$. Koordinate događaja za posmatrača iz rakete B se dobijaju primenom Lorencovih transformacija

$$x' = (x + vt)\gamma, \quad t' = (t + \frac{vx}{c^2})\gamma. \quad (1.12.95)$$

Koordinate prvog događaja za posmatrača iz rakete B su $(t'_1 = 0, x'_1 = 0)$. Koordinate drugog događaja su

$$(t'_2 = \frac{l_0}{v} = 10^{-6}\text{s}, x'_2 = l_0).$$

Ispaljivanje metka sa rakete A , tj. treći događaj je

$$(t'_3 = \frac{l_0}{v} - \frac{l_0 v}{c^2} \gamma = 0,55 \cdot 10^{-6}\text{s}, x'_3 = l_0(1 - \gamma)).$$

Koordinate četvrtog događaja za posmatrača iz rakete B su

$$(t'_4 = \frac{l_0}{v\gamma} = \frac{4}{5} \cdot 10^{-6}\text{s}, x'_4 = 0).$$

Konačno koordinate petog događaja su

$$(t'_5 = \frac{l_0}{v} + \frac{l_0 v}{v\gamma} \gamma = \frac{9}{5} \cdot 10^{-6}\text{s}, x'_5 = l_0).$$

Na osnovu gornjih izraza vidimo da vremenski sled događaja u sistemu rakete B nije isti kao za posmatrača iz rakete A . Posle prvog događaja desio se događaj 'tri', tj. ispaljivanje metka, pa zatim četvrti, zatim drugi i na kraju peti. Raketa se ispali pre nego što rep od rakete A se poklopi sa vrhom rakete B . To znači da će metak promašiti raketu B . U sistemu A događaji 'dva' i 'tri' su simultani, ali za posmatrača iz rakete B nisu. Dakle, oba posmatrača se slažu da metak nije pogodio raketu B .

Zadatak 8. Dva fotona kreću se duž x - ose i nalaze se na rastojanju L jedan od drugog. Odrediti rastojanje između ova dva fotona u sistemu koji se kreće brzinom v u smeru kretanja fotona.

Rešenje: Jednačina kretanja prvog fotona u sistemu S je $x = ct$, a drugog $x = ct + L$. Posmatrajmo najpre prvi foton sa stanovišta posmatrača S' . Primenom Lorencovih transformacija imamo

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ct - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ako iz druge jednačine izrazimo t preko t' i ubacimo u prvu jednačinu, dobijamo da je jednačina kretanja prvog fotona u sistemu S' data sa $x' = ct'$. Potom, ponovimo postupak i za drugi foton. Lorencove transformacije daju

$$x' = \frac{ct + L - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}(ct + L)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Opet izrazimo t preko t' , ubacimo u prvu jednačinu i dobijemo

$$x' = ct' + L\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Kad uporedimo jednačine prvog i drugog fotona, vidimo da je rastojanje između njih u S' jednako

$$L' = L\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Glava 2

Četvorodimenziona formulacija specijalne relativnosti

U ovoj glavi specijalnu relativnost ćemo izložiti formalnijim jezikom. Uvešćemo četvorodimenzioni prostor Minkovskog. Lorencove transformacije će biti predstavljene kao transformacije koordinata prostora Minkovskog.

2.1 Prostor Minkovskog

Prostor Minkovskog je realan četvorodimenzionalan prostor u kome je definisana metrika. Tačke u prostoru Minkovskog su vektori položaja

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gde su x^μ kontravarijantne komponente vektora \mathbf{x} u bazi

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Metrika prostora Minkovskog je

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Metrika g deluje neobično, ali je ključ za razumevanje specijalne relativnosti. Ona služi za određivanje dužine vektora. Kvadrat dužine četvorovektora položaja x je

$$\begin{aligned} x^2 = x^T g x &= (ct \ x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 . \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

2.2 Koordinatne transformacije

Sada ćemo razmatrati proizvoljne transformacije koordinata

$$x^0, x^1, x^2, x^3 \rightarrow x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 \quad (2.2.2)$$

tj.

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (2.2.3)$$

nekeg prostora.¹ Ove transformacije moraju biti invertibilne, tj. odgovarajući jakobijan transformacije mora biti različit od nule

$$\left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| \neq 0 . \quad (2.2.4)$$

Za komponente $A^\mu(x)$ reći ćemo da su komponente jednog kontravarijantnog četvorovektora ako pri transformacijama koordinata (2.2.3) se transformišu po sledećem pravilu

$$A'^\mu(x') = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) . \quad (2.2.5)$$

Kontravarijantni vektori imaju gornji indeks. Diferencijali koordinata dx^μ , koji su infinitezimalna razlika koordinata dve infinitezimalno bliske tačke, su komponente jednog kontravarijantnog četvorovektora,² što se vidi iz

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu . \quad (2.2.6)$$

Za komponente $B_\mu(x)$ reći ćemo da su komponente jednog kovarijantnog četvorovektora ako pri transformacijama koordinata (2.2.3) se transformišu po

$$B'_\mu(x') = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu(x) . \quad (2.2.7)$$

¹Taj prostor može biti opštiji od prostora Minkovskog; ne mora biti uopšte vektorski prostor. Npr. posmatrajmo površinu sfere poluprečnika R . Sfera je 'prostor' (preciznije to je mnogostrukost) koji je dvodimenzion. Koordinate θ, φ su koordinate tog prostora, ali $(\theta, \varphi)^T$ nije vektor.

²U diferencijalnoj geometriji dx^μ ima drugačiji smisao od ovog gore navedenog.

Indeks kovarijantnih vektora je donji. Primetimo da su matrice transformacija u ova dva zakona medjusobno inverzne. Moderniji naziv za kovarijantan vektor je jedan-forma, dok se kontravarijantan vektor naziva samo vektorom. Primetimo još da govorimo o komponentama vektora, A^μ odnosno B_μ . Izbegli smo da govorimo o samim vektorima, tj. o bazisima u kojim su ove komponente zadate. Funkcija $F = F(x)$ je skalar (invarijanta) ako se ne menja pri transformacijama koordinata

$$F'(x') = F(x) . \quad (2.2.8)$$

Pokažimo da su $\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}$ komponente jednog kovarijantnog četvorovektora. Treba da proverimo da li važi pravilo transformacije (2.2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'(x')}{\partial x'^\mu} &= \sum_\nu \frac{\partial F(x(x'))}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \\ &= \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial F(x(x'))}{\partial x^\nu} . \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Tenzor $T^{\mu\nu}$ koji se transformiše prema

$$T'^{\mu\nu}(x') = \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma}(x) \quad (2.2.10)$$

je dva puta kontravarijantan tenzor ili tenzor ranga (2, 0). Slično, jednom kovarijantan i jednom kontravarijantan tenzor (tenzor tipa (1, 1)) se transformiše prema

$$T'^\mu{}_\nu(x') = \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\rho{}_\sigma(x) . \quad (2.2.11)$$

Analogno se definišu i drugi tenzori.

Sada ćemo se vratiti na prostor–vreme Minkovskog. Svakom kontravarijantnom vektoru pridružujemo kovarijantne komponente pomoću metrike

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu . \quad (2.2.12)$$

Od sada ćemo koristiti Ajnštajnovu sumacionu konvenciju po kojoj se sumira po ponovljenom indeksu koji je jednom gornji, a jednom donji. Znak sume se ne piše. U prethodnom izrazu se, znači, sumira po indeksu ν . Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} A_0 &= g_{0\nu} A^\nu = g_{00} A^0 + g_{01} A^1 + g_{02} A^2 + g_{03} A^3 = A^0 \\ A_1 &= g_{1\nu} A^\nu = g_{10} A^0 + g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 = -A^1 . \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Slično se dobija $A_2 = -A^2$ i $A_3 = -A^3$. Spuštanje vremenskog indeksa ne menja znak dok spuštanje prostornog indeksa njenja znak. Prostorne indeksi se obeležavaju latiničnim slovima $i = 1, 2, 3$. Dakle,

$$A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i . \quad (2.2.14)$$

Kovarijantne komponente vektora položaja su

$$\begin{aligned}x_0 &= x^0 = ct, \\x_1 &= -x^1 = -x, \\x_2 &= -x^2 = -y, \\x_3 &= -x^3 = -z .\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

Inverzni metrički tenzor g^{-1} je definisan

$$gg^{-1} = g^{-1}g = I ,\tag{2.2.16}$$

gde je I jedinična matrica. Numerički se lako dobija da je $g^{-1} = g$. Medjutim tenzori g i g^{-1} imaju različit raspored indeksa. Prepišimo (2.2.16) preko komponenti

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} .\tag{2.2.17}$$

Sada je jasno da je

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\tag{2.2.18}$$

tj. inverzna metrika ima gornje indekse. Inverzna metrika omogućava da donje indekse transformišemo u gornje, tj. $A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}$. Indeksi na metrici u poslednjem izrazu su gornji i po tome se vidi da je to inverzna metrika.

Skalarni proizvod dva vektora $A^{\mu} = (A^0, \mathbf{A})$ i $B^{\mu} = (B^0, \mathbf{B})$ u prostoru Minkovskog je definisan sa

$$\begin{aligned}A \cdot B &= g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} = A_{\mu}B^{\mu} \\&= A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3 \\&= A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \\&= A^0B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} .\end{aligned}\tag{2.2.19}$$

Lako se pokazuje da je proizvod $A \cdot B$ skalar:

$$\begin{aligned}A'_{\mu}B'^{\mu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A_{\alpha}B^{\beta} \\&= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} A_{\alpha}B^{\beta} = A_{\alpha}B^{\alpha} .\end{aligned}\tag{2.2.20}$$

Kvadrat dužine vektora x je

$$x^2 = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = x_{\mu}x^{\mu} = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2 .\tag{2.2.21}$$

Infinitezimalni kvadrat rastojanja izmedju tačaka x i $x + dx$ je

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{r})^2 .\tag{2.2.22}$$

2.3 Lorencove transformacije

Lorencov bust duž x -ose prepisaćemo u obliku

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma x^0 - \beta \gamma x^1 \\x'^1 &= -\beta \gamma x^0 + \gamma x^1 \\x'^2 &= x^2 \\x'^3 &= x^3\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

gde je

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{2.3.24}$$

U matičnom obliku prethodne jednačine su

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Matrica 4×4 u prethodnom izrazu je matrica Lorencove transformacije Λ^μ_ν . Gornja matična jednačina u komponentnoj notaciji je

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu.\tag{2.3.25}$$

U oznaci matičnog elementa Lorencove matrice Λ^μ_ν , indeks μ je indeks vrste, a indeks ν je indeks kolone. Važno je da se indeksi ne pišu jedan iznad drugog, jer tada ne bi znali koji je od njih indeks vrste, a koji kolone.

Lorencove transformacije su one linearne transformacije koordinata $x' = \Lambda x$, gde je Λ realna 4×4 matrica, koje ne menjaju kvadrat dužine četvorovektora, tj. za koje važi $x'^2 = x^2$. Prethodni uslov daje

$$\begin{aligned}x'^T g x' &= x^T g x \\x^T \Lambda^T g \Lambda x &= x^T g x,\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\Lambda^T g \Lambda = g.\tag{2.3.26}$$

Dakle, svaka realna 4×4 matrica koja zadovoljava uslov (2.3.26) je Lorencova transformacija. Prethodna matična jednačina sadrži deset uslova na matricu Λ , pa su Lorencove transformacije određene sa $16 - 10 = 6$ nezavisnih parametara. Lako se vidi da matrica busta duž x -ose zadovoljava uslov (2.3.26), tj. ona je Lorencova transformacija. Ako uvedemo parametar φ_1 sa $\tanh \varphi_1 = \beta_1 = v_x/c$ onda je

$$\cosh \varphi_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}},$$

i $\sinh \varphi_1 = \beta_1 \gamma_1$. Matrica busta duž x -ose ima oblik

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & -\sinh \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.27)$$

Bustovi duž y i z ose se dobijaju analogno. Bust duž y -ose je

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_2 & 0 & -\sinh \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_2 & 0 & \cosh \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.28)$$

gde je parametar $\tan \varphi_2 = \beta_y$. Analogno bust duž z ose je

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_3 & 0 & 0 & -\sinh \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sinh \varphi_3 & 0 & 0 & \cosh \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3.29)$$

gde je $\tanh \varphi_3 = \beta_3 = v_z/c$.

Ako se inercijalni sistem S' kreće u proizvoljnom pravcu brzinom \mathbf{V} onda Lorencova transformacija koja povezuje S i S' je

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad (2.3.30)$$

gde je

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{V_x}{c} \\ \beta_y &= \frac{V_y}{c} \\ \beta_z &= \frac{V_z}{c} \\ \beta^2 &= \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Rotacije koordinatnog sistema sistema su takodje Lorencove transformacije. Rotacija za ugao θ oko z -ose

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je takodje Lorencova transformacija. Bust (2.3.27) podseća na obične rotacije samo što umesto trigonometrijskih funkcija sin i cos on sadrži hiperbolne funkcije cosh i sinh. Bustovi se nazivaju još i hiperbolnim rotacijama. Parametar φ se naziva hiperbolni parametar³. Šest nezavisnih Lorencovih transformacija su tri busta (duž x, y i z ose) i tri rotacije.

Ispitajmo kako se x_μ transformiše pri Lorencovim transformacijama. Komponente x'_μ su $x'_\mu = g_{\mu\nu}x'^\nu$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} x'_\mu &= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma} x_\sigma . \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Iz $\Lambda^T g \Lambda = g$ sledi $\Lambda^{T-1} = g \Lambda g^{-1}$ pa je

$$\begin{aligned} x'_\mu &= (g \Lambda g^{-1})_\mu{}^\sigma x_\sigma \\ &= (\Lambda^{T-1})_\mu{}^\sigma x_\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu x_\sigma \\ &= \Lambda_\mu{}^\sigma x_\sigma . \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Zaključujemo da se kontravarijantne, odnosno kovarijantne komponente transformišu prema:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu . \end{aligned}$$

Neka je $A(x) = A^\mu(x)\mathbf{e}_\mu$ vektor, tj. vektorsko polje. Kontravarijantne komponente ovog vektora, $A^\mu(x)$ se pri Lorencovim transformacijama transformišu kao

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) . \quad (2.3.34)$$

Kovarijantne komponente vektora definisane su sa $A_\mu(x) = g_{\mu\nu}A^\nu(x)$. Pri Lorencovim transformacijama one se transformišu prema

$$A'_\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu(x) . \quad (2.3.35)$$

Koordinate tačaka Minkovskog prostora x^μ , odnosno x_μ se transformišu po istim pravilima. Ovo je specifičnost prostora Minkovskog. To ne važi generalno, za proizvoljan prostor.

Parcijalni izvodi po x^μ su

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) . \quad (2.3.36)$$

Ispitajmo njegov zakon transformacije:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} . \quad (2.3.37)$$

Množeći prethodni izraz sa $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma$ dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu} .$$

³Na engleskom rapidity.

Dakle, izvod po kontravarijantnoj komponenti vektora transformiše se kao kovarijantna komponenta četvorovektora pa ćemo koristiti notaciju

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} .$$

Slično

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

su komponente kontravarijantnog vektora.

2.4 Lorencova grupa

Lorencove transformacije čine grupu. Da bi ovo pokazali potrebno je da proverimo da li su aksiome grupe zadovoljeni:

1. Neka su Λ_1 i Λ_2 Lorencove transformacije. Primenimo prvo transformaciju Λ_1 a zatim Λ_2 . Vektor koordinate x posle prve Lorencove transformacije prelazi u $x' = \Lambda_1 x$. Ako sada primenimo transformaciju Λ_2 dobićemo

$$x'' = \Lambda_2 x' = \Lambda_2 \Lambda_1 x .$$

Sada ćemo pokazati da je $\Lambda_2 \Lambda_1$ Lorencova transformacija. To se vidi direktno:

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T g (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^T (\Lambda_2^T g \Lambda_2) \Lambda_1 = \Lambda_1^T g \Lambda_1 = g .$$

Ovim smo pokazali aksiomu zatvorenosti.

2. Jedinični element grupe je jedinična matrica.

3. Množenje matrica je asocijativno, pa asocijativnost važi i za Lorencove transformacije.

4. Iz (2.3.26) sledi da je inverzni element $\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g$. On je takodje Lorencova transformacija, jer je

$$(\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g .$$

Time smo pokazali da Lorencove transformacije čine grupu.

Uslov (2.3.26) u komponentnoj notaciji ima oblik

$$\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} . \quad (2.4.38)$$

Za $\rho = \sigma = 0$ iz ove jednačine sledi

$$\Lambda^\mu{}_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = 1 , \quad (2.4.39)$$

odnosno

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 . \quad (2.4.40)$$

Odavde je $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, odnosno

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{ili} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 . \quad (2.4.41)$$

Ukoliko je $\Lambda^0_0 \geq 1$ ovakve Lorencove transformacije ne menjaju smer vremena i nazivaju se ortohronim Lorencovim transformacijama. Transformacije za koje je $\Lambda^0_0 \leq -1$ menjaju smer vremena.

Uzimanjem determinante od $\Lambda^T g \Lambda = g$ dobijamo

$$\det \Lambda = \pm 1 . \quad (2.4.42)$$

Zanimljivo, determinanta Lorencovih transformacija je ili 1 (prave Lorencove transformacije) ili -1 .

Pod relativističkom kovarijantnošću neke teorije podrazumeva se njena kovarijantnost ne na celu Lorencovu grupu, već samo na prave ortohrone Lorencove transformacije, za koje važi:

$$\det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1 . \quad (2.4.43)$$

Bustovi i rotacije zadovoljavaju ovaj uslov i ove transformacije su podgrupa cele Lorencove grupe.

Prostorna inverzija je definisana sa

$$t \rightarrow t' = t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r} . \quad (2.4.44)$$

Matrica ove transformacije je

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ona je Lorencova transformacija, jer zadovoljava uslov $\Lambda^T g \Lambda = g$, ali nije prava ortohrona Lorencova transformacija jer je determinanta ove transformacije -1 . Prostorna inverzija je diskretna transformacija.

Vremenska inverzija je definisana sa

$$t \rightarrow t' = -t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} . \quad (2.4.45)$$

Matrica ove transformacije je

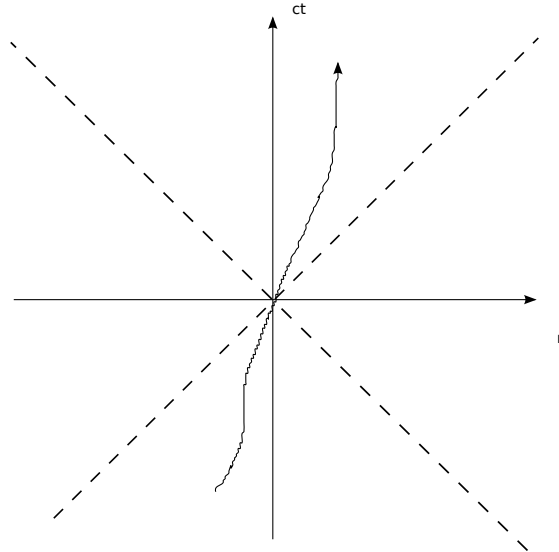
$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ona je Lorencova transformacija jer zadovoljava uslov $\Lambda^T g \Lambda = g$, ali $\Lambda^0_0 = -1$ nije ortohrona.

2.5 Poenkareova simetrija

Poenkareove transformacije su izometrije prostora Minkovskog. Sastoje se od Lorencovih transformacija i translacija u prostoru Minkovskog

$$x'^\mu = (\Lambda, a)x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu ,$$



Slika 2.1: Svetlosni konus

gde je Λ Lorencova transformacija, a a^μ je konstantan četvorovektor. Kvadrat intervala između dve tačke $s^2 = (x - y)^2$ je invarijantan na Poenkareove transformacije. Poenkareove transformacije čine grupu, ali to nećemo sada dokazivati. U nerelativističkom limesu one prelaze u Galilejeve transformacije.

2.6 Svetlosni konus

Tačke prostora Minkovskog su događaji. Trajektorija fotona koji se kreće duž x - ose je⁴ $x^0 = \pm cx^1$. Ovo su dve prave linije u $x^0 - x^1$ ravni čiji je nagibni ugao 45° odnosno 135° . Čestica koja se kreće konstantnom brzinom v duž x ose za vreme t doći će u tačku $x = vt$. Njena trajektorija u prostoru Minkovskog je

$$x^0 = \frac{c}{v}x^1 . \quad (2.6.46)$$

Ovo je jednačina prave u $x^0 - x^1$ ravni. Nagib ove prave je veći od 45° , jer je $v < c$. U četvorodimenzionom prostor-vremenu svetlost (foton) se kreće po

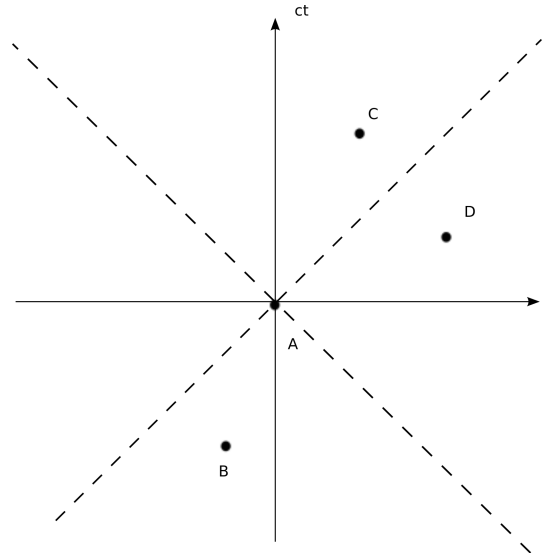
$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 , \quad (2.6.47)$$

ukoliko je u početnom trenutku foton bio u koordinatnom početku, slika 2.1. Ovo je jednačina konusa u prostoru Minkovskog. Svetlost se, dakle, kreće po svetlosnom konusu. Masene čestice se kreću unutar svetlosnog konusa. One ne mogu da izađu iz svetlosnog konusa, jer bi im tada brzina bila veća od brzine svetlost.

Kvadrat intervala između dva događaja (t_1, x_1, y_1, z_1) i (t_2, x_2, y_2, z_2) je

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 . \quad (2.6.48)$$

⁴Imamo dve trajektorije jer foton može da se kreće i u pozitivnom i u negativnom smeru x ose.



Slika 2.2:

Vidimo da on može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli. Zbog toga prostor Minkovskog nije euklidski prostor; nazivamo ga pseudoeklidskim. Ukoliko je $s^2 > 0$ onda se za takav interval kaže da je vremenskog tipa; ako je $s^2 < 0$ interval je prostornog tipa, a ako je $s^2 = 0$ interval je svetlosnog tipa. Ako je interval između dva događaja vremenskog tipa, onda možemo preći u sistem gde su događaji na istom mestu, tj. $s^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2$. Međutim, ne možemo preći u sistem gde su ti događaji istovremeni, jer bi tada $s^2 = -(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)^2 < 0$ što je suprotno od $s^2 > 0$. Slično, ukoliko je interval između dva događaja prostornog tipa, možemo preći u inercijalni sistem u kojem su događaji istovremeni. Lako se vidi da je npr. $(1, 1, 0, 0)$ svetlosni vektor, $(0, x, 0, 0)$ vektor prostornog, a $(t, 0, 0, 0)$ vektor vremenskog tipa.

Na slici 2.2 prostor-vreme oko nekog događaja A je izdvojen na regione koji su od njega razdvojeni intervalima prostornog, vremenskog ili svetlosnog tipa. Intervali između A i događaja B i C su vremenskog tipa, samo što se događaj B desio pre događaja A ($t_B < t_A$), a događaj C posle događaja A , ($t_C > t_A$). Događaji B i C su unutar svetlosnog konusa. Vremenski sled događaja koji su unutar svetlosnog konusa je nepromenjen pri Lorencovim transformacijama. Dakle, ako je za jednog posmatrača događaj A uzrok, a događaj C posledica, tj. $t_C > t_A$ onda će u svakom inercijalnom sistemu događaj C biti posle događaja A . Dakle $t'_C > t'_A$.

Događaj D je razdvojen od A intervalom prostornog tipa. Ova dva događaja ne mogu biti uzročno posledično povezana. Nijedan signal ne može stići od A do D , jer bi se kretao brzinom većom od brzine svetlosti. Može se pokazati da se odgovarajućom Lorencovom transformacijom u ovom slučaju može preći u sistem gde se događaj D desio pre A . Dakle, mi ne znamo šta je prošlost a šta budućnost. Međutim, to nije ni bitno, jer kao što smo rekli, ova dva događaja nisu ni u kakvoj uzročno-posledičnoj (kauzalnoj) vezi.

2.7 Zadaci

Zadatak 1. Pokazati da je $\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\mu}$ Lorencov skalar.

Rešenje: Kako je $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$ to je

$$\frac{\partial A'^\mu(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial(\Lambda^\mu_\sigma A^\sigma(x))}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (2.7.49)$$

Ako dalje iskoristimo da je $x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\rho x'^\rho$ imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'^\mu(x')}{\partial x'^\mu} &= \Lambda^\mu_\sigma \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \frac{\partial x'^\rho}{\partial x'^\mu} \\ &= \Lambda^\mu_\sigma \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\rho \delta^\rho_\mu \\ &= \Lambda^\mu_\sigma (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\nu} \\ &= \delta^\nu_\sigma \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\nu} = \frac{\partial A^\nu(x)}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (2.7.50)$$

Ovim smo pokazali da je $\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\mu}$ skalar u odnosu na Lorencove transformacije. Lako se vidi da ova veličina nije skalar pri proizvoljnim koordinatnim transformacijama.

Zadatak 2. Sistem S_1 kreće se brzinom v_1 u odnosu na inercijalni sistem S , dok se sistem S_2 kreće brzinom v_2 u odnosu na sistem S_1 . Obe brzine su usmerene duž zajedničke x -ose sva tri sistema. Odrediti brzinu sistema S_2 u odnosu na sistem S .

Rešenje: Neka je $\beta_1 = v_1/c$, $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$, i analogno $\beta_2 = v_2/c$, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$. Lako se vidi da je proizvod dva busta duž x -ose ponovo bust duž x -ose. Naime

$$\begin{aligned} \Lambda_2 \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1 \gamma & 0 & 0 \\ -\beta_1 \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7.51)$$

gde su

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

i

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Množenjem dva busta pokazali smo relativistički zakon sabiranja brzina.

Zadatak 3. Pokazati da je matrica (2.3.30) matrica Lorencove transformacije.

Zadatak 4. Odrediti proizvod tri uzastopne Lorencove transformacije. Prva je rotacija oko z -ose za ugao θ . Naredna transformacija je bust duž x -ose, pri čemu se dobijeni sistem kreće brzinom v u odnosu na sistem dobijen nakon prve transformacije. Na kraju primeniti rotaciju oko z -ose za ugao $-\theta$.

Rezultat je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \cos \theta & -\beta\gamma \sin \theta & 0 \\ -\beta\gamma \cos \theta & \gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\gamma - 1) & 0 \\ -\beta\gamma \sin \theta & \sin \theta \cos \theta (\gamma - 1) & \gamma \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7.52)$$

Dobijena transformacija je bust sa brzinom $(v \cos \theta, v \sin \theta, 0)$.

Zadatak 5. Izračunati:

(a) $\frac{\partial}{\partial x^\rho} (x^\mu x_\mu)$,

(b) $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$,

(c) $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} p_\nu$.

Rezultat:

(a) $\frac{\partial}{\partial x^\rho} (x^\mu x_\mu) = 2x_\rho$

(b) 4

(c) p_μ

Zadatak 6. Dati su vektori

$$A^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ i } B^\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naći $A^2 = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ i B^2 . Odrediti kovarijantne komponente vektora, A_μ , tj. B_μ . Odrediti tip vektora A^μ i B^μ . Naći $A_\mu B^\mu$, \mathbf{A}^2 , \mathbf{B}^2

Rešenje: $A^2 = 1^2 - (-1)^2 - 2^2 - 3^2 = -13 < 0$, pa je vektor prostornog tipa. Analogno se dobija da je $B^2 = 1$, pa je B^μ vektor vremenskog tipa. Kovarijantne komponente vektora su

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ } B_\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} A_\mu B^\mu &= 2 + 1 + 2 - 3 = 2 \\ \mathbf{A}^2 &= 14, \mathbf{B}^2 = 3. \end{aligned} \quad (2.7.53)$$

Glava 3

Mehanika specijalne relativnosti

Ova glava posvećena je mehanici čestica spijalne relativnosti. Definišaćemo četvorovektore brzine, impuls i ubrzanja čestice. Posebna pažnja je posvećena relativističkim sudarima.

3.1 Četvorovektor brzine

Četvorovektor brzine definišemo sa

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (3.1.1)$$

Ova veličina jeste četvorovektor, jer je diferencijal koordinate dx^μ četvorovektor, a sopstveno vreme $d\tau$ skalar. Nismo koristili laboratorisko vreme dt , jer ono nije skalar već nulta komponenta četvorovektora. Nadjimo sada komponente četvorobrzine, čestice čija je brzina \mathbf{v} različita od brzine svetlosti. Nulta komponenta četvorobrzine je

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (3.1.2)$$

dok su prostorne komponente date sa

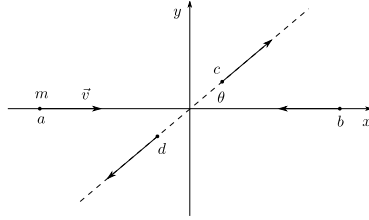
$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.1.3)$$

Trobrzina \mathbf{v} je trovektor i njene gornje i donje komponente nećemo razlikovati. Dakle,

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} .$$

Kovarijantne komponente brzine su

$$U_\mu = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ -\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} .$$



Slika 3.1:

Kvadrat vektora četvorobrzine se lako nalazi

$$U \cdot U = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 . \quad (3.1.4)$$

Dakle, četiri komponente četvorobrzine nisu nezavisne; između njih postoji veza (3.1.4). Četvorobrzina je tangenti vektor na trajektoriju čestice u prostoru Minkovskog, $x^\mu = x^\mu(\tau)$.

3.2 Impuls, sila i energija

Ovo poglavlje posvećeno je dinamičkim veličinama u relativističkoj fizici. Prvo ćemo uvesti impuls i energiju relativističke čestice, a zatim četvorovektor impulsa.

3.2.1 Relativistički impuls

U nerelativističkoj mehanici impuls čestice je proizvod mase i njene brzine, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Međutim, ova formula ne važi za čestice koje se kreću velikim brzinama. Da bismo definisali impuls u relativističkoj fizici razmatraćemo sudar dve čestice. U inercijalnim sistemima prostor je homogen, pa je impuls pre i posle sudara čestica isti. Pretpostavićemo da je impuls čestice kolinearan sa njenom brzinom, tj.

$$\mathbf{p} = mf(v)\mathbf{v} . \quad (3.2.5)$$

Masa čestice m je njena masa u sistemu u kome čestica miruje. Iz tog razloga se ova masa naziva masom mirovanja. Svi inercijalni posmatrači se slažu da je masa mirovanja čestice m . Ova masa je mera inercije čestice i ona je skalar, tj. ista u svim inercijalnim sistemima. Sa $f(v)$ smo obeležili nepoznatu funkciju koja zavisi od brzine čestice.

Neka se dve identične čestice, koje ćemo obeležiti sa a i b kreću sa brzinama $\mathbf{v}_a = v\mathbf{e}_x$, odnosno $\mathbf{v}_b = -v\mathbf{e}_x$ (slika 3.1). Čestice se kreću jedna drugoj u susret sa brzinama istog intenziteta. str-rasejanje.eps Sistem reference u kome se čestice kreću na opisani način obeležićemo sa S . Ukupni impuls ove dve čestice pre sudara je jednak nuli. Nakon sudara, ukupni impuls je takođe nula. Čestice se razlete, pod uglom θ u odnosu na x -osu. Energija čestice zavisi od kvadrata njene brzine, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(v^2)$. Vreme u inercijalnim sistemima je homogeno, pa očekujemo da važi zakon održanja energije. To znači da će čestice nakon sudara imati iste intenzitete brzina i jednake v . Komponente brzina prve čestice posle sudara (obeležili smo je indeksom c) su

$$v_{cx} = v \cos \theta, v_{cy} = v \sin \theta, v_{cz} = 0 . \quad (3.2.6)$$

Komponente brzine druge čestice nakon sudara su

$$v_{dx} = -v \cos \theta, v_{dy} = -v \sin \theta, v_{dz} = 0 . \quad (3.2.7)$$

Odredimo sada projekcije brzina čestica za posmatrača koji se kreće u pozitivnom smeru x -ose sa brzinom $V = v$. Taj sistem obeležićemo sa S' . Čestica a miruje u ovom sistemu, dok su komponente brzine čestice b nalaze primenom (1.10.71-1.10.73). Rezultat je

$$\begin{aligned} v'_{bx} &= -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \\ v'_{by} &= v'_{bz} = 0 . \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Analogno, dobijamo i projekcije brzine za čestice nakon sudara. Za česticu c one su

$$\begin{aligned} v'_{cx} &= \frac{v \cos \theta - v}{1 - \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} \\ v'_{cy} &= \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} \\ v'_{cz} &= 0 , \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

dok su za česticu d

$$\begin{aligned} v'_{dx} &= \frac{-v \cos \theta - v}{1 + \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} \\ v'_{dy} &= -\frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} \\ v'_{dz} &= 0 . \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Već smo rekli da su svi inercijalni sistemi ravnopravni, pa i u sistemu S' mora važiti zakon održanja impulsa. Zakon održanja impulsa duž y' -ose daje

$$mf(v'_c) \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} - mf(v'_d) \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} = 0 . \quad (3.2.11)$$

Iz ove formule ćemo odrediti nepoznatu funkciju $f(v)$. Iz nje sledi da je

$$f(v'_c) = \frac{1 - \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}}{1 + \frac{v^2 \cos \theta}{c^2}} f(v'_d) . \quad (3.2.12)$$

Uzmimo da je θ mali ugao, tj. $\theta \approx 0$. Tada je $v'_c \approx 0$, $v'_d \approx v'_b$. Formula (3.2.12) postaje

$$f(0) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} f(v'_b) . \quad (3.2.13)$$

U gornjoj formuli figuršu brzine v i v'_b . Potrebno je da brzinu v izrazimo preko v'_b . Lako se vidi da je

$$\left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 = 1 - \frac{4v^2}{c^2\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2} = 1 - \frac{v'^2_b}{c^2}. \quad (3.2.14)$$

Dakle, dobili smo uslov na funkciju f

$$f(v'_b) = \frac{f(0)}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_b}{c^2}}}. \quad (3.2.15)$$

Da bi impuls ima dobar nerelativistički limes uzimamo $f(0) = 1$. Dakle, impuls relativističke čestice je

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.16)$$

3.2.2 Energija relativističke čestice

Drugi Njutnov zakon važi i u relativističkoj fizici. Sila koja deluje na česticu je data sa

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (3.2.17)$$

ali \mathbf{p} je relativistički impuls (3.2.16). Kinetičku energiju čestice odredićemo preko rada koji izvrši sila da bi se čestica ubrzala iz stanja mirovanja do brzine \mathbf{v} . Rad je

$$\begin{aligned} A &= \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^v d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \\ &= m \int_0^v \mathbf{v} d\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ &= m \frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Big|_0^v - m \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

gde smo primenili parcijalnu integraciju. Po teoremi kinetičke energije rad sile je jednak promeni kinetičke energije

$$A = T - T_0. \quad (3.2.19)$$

Početna kinetička energija T_0 jednaka je nuli, jer je početna brzina nula. Dakle, kinetička energija relativističke čestice je

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (3.2.20)$$

U nerelativističkom limesu ($v \ll c$) kinetička energija je

$$\begin{aligned} T &= mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - mc^2 \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right) - mc^2 \\ &= \frac{mv^2}{2} . \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Dakle, postaje nerelativistička kinetička energija čestice. Energija čestice je prvi član u (3.2.20)

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (3.2.22)$$

dok je mc^2 energija mirovanja čestice. Često se izraz

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2.23)$$

naziva zavisnošću mase čestice od njene brzine, a veličina $m(v)$ relativističkom masom. Mi nećemo koristiti ovu notaciju, već ćemo pod masom podrazumevam masu mirovanja čestice, m .

3.2.3 Četvorovektor impulsa

Četvorovektor impulsa čestice je proizvod njene mase mirovanja i četvorovektora brzine:

$$P^\mu = mU^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} . \quad (3.2.24)$$

Već smo rekli da je masa mirovanja čestice m skalar. Odredimo sada komponente četvorovektora impulsa. Nulta (vremenska) komponenta četvoroiimpulsa je

$$P^0 = mU^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.2.25)$$

Ona je energija čestice

$$P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c} . \quad (3.2.26)$$

Prostorne komponente četvoroiimpulsa su

$$P^i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.2.27)$$

Indeks na brzini smo napisali kao donji. Brzina je trovektor, i nije direktno deo nekog četvorovektora. Metrika u trodimenzionom prostoru je δ_{ij} , pa je $v_i = v^i$.

Prema tome četvoroimpuls čestice je

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (3.2.28)$$

Četvoroimpuls čestice sa donjim indeksima, tj. kovarijantne komponente su

$$\begin{aligned} P_0 &= P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \\ P_1 &= -P^1 = -\frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ P_2 &= -P^2 = -\frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ P_3 &= -P^3 = -\frac{mv_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Kako je $U^2 = c^2$, to je kvadrat četvoroimpulsa

$$P^2 = P_\mu P^\mu = m^2 c^2. \quad (3.2.30)$$

Za masene čestice je $P^2 = m^2 c^2 > 0$, vektor četvoroimpulsa je vremenskog tipa. To znači da postoji sistem reference gde su njegove prostorne komponente jednake nuli, tj.

$$\begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovaj sistem se naziva sistemom mirovanja čestice. Za bezmasene čestice vektor četvoroimpulsa je svetlosnog tipa i za njih ne postoji sistem mirovanja.

Jasno je da je

$$P^2 \equiv P_\mu P^\mu = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2, \quad (3.2.31)$$

odnosno

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2. \quad (3.2.32)$$

Formula (3.2.32) je veza izmedju energije i impulsa čestice.

Kako se četvoroimpuls transformiše pri Lorencovim transformacijama koordinata

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu ? \quad (3.2.33)$$

Na osnovu (2.2.5) imamo

$$\begin{aligned} P'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} P^\nu \\ &= \Lambda^\mu_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} P^\nu \\ &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Četvoropimpuls čestice u sistemu S smo obeležili sa P^μ , a sa P'^μ u sistemu S' . Pri Lorencovom bustu duž x - ose energija i troimpuls se transformišu prema

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

Oznake su jasne. Primovane veličine, \mathcal{E}' , p'_x , p'_y i p'_z su energija, odnosno Dekartove projekcije impulsa u sistemu koji se kreće brzinom V duž x - ose. Neprimovane veličine se odnose na sistem S . Dakle, energija i imuls čestice zavise od inercijalnog sistema.

3.3 Četvoroubrzanje

Četvoroubrzanje je definisano sa

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (3.3.35)$$

Diferenciranjem (3.1.4) po sopstvenom vremenu dobijamo da je $\mathcal{A}_\mu U^\mu = 0$. Ubrzanje i brzina su otrogonalni.

Nulta komponenta ubrzanja je

$$\mathcal{A}^0 = \frac{dU^0}{d\tau} = c \frac{d\gamma}{d\tau} = c\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \quad (3.3.36)$$

a prostorne

$$\mathcal{A}^i = \frac{dU^i}{d\tau} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} v_i + \gamma^2 a_i. \quad (3.3.37)$$

Dakle,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c\gamma \frac{d\gamma}{dt} \\ \gamma \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (3.3.38)$$

gde je $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ trobrzina, a $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ troubrzanje čestice.

Kada se čestica kreće ubrzano sistem reference vezan za nju je neinercijalan. Medjutim u intervalu $(t, t + dt)$ brzina čestice je konstantna i sistem vezan za nju je inercijalan. Ovaj sistem se naziva usputnim sistemom. Obeležićemo ga sa S' . Brzina čestice u S' je $\mathbf{v}' = 0$, ali ubrzanje $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$ nije nula. Četvoroubrzanje u usputnom sistemu je

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}. \quad (3.3.39)$$

Iz ovog izraza se jasno vidi da je četvoroubrzanje vektor prostornog tipa. Laboratorijski sistem S i usputni S' su povezani Lorencovim bustom. Jednostavnosti radi uzećemo da se čestica kreće duž x -ose. Tada je

$$\mathcal{A} = \gamma \begin{pmatrix} c \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} v + \gamma a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\gamma a'/c \\ \gamma a' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.40)$$

Odavde dobijamo vezu izmedju a i a' :

$$a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a' . \quad (3.3.41)$$

Nadjimo sada jednačinu kretanja čestice koja se kreće sa stalnim ubrzanjem računatim u usputnom sistemu, tj. $a' = \text{const.}$ Neka se u početnom trenutku čestica nalazila u tački $x(t=0) = x_0$ sa početnom brzinom $v(t=0) = 0$. Prepišimo (3.3.41) u obliku

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = a' dt \quad (3.3.42)$$

odakle integraljenjem dobijamo

$$v = \frac{ca't}{\sqrt{c^2 + (a't)^2}} . \quad (3.3.43)$$

Odavde je

$$dx = \frac{cta'}{\sqrt{c^2 + (a't)^2}} dt , \quad (3.3.44)$$

pa integraljenjem dobijamo jednačinu kretanja

$$x - x_0 = c\sqrt{c^2/a'^2 + t^2} - c^2/a' \quad (3.3.45)$$

odnosno

$$\frac{(x - x_0 + \frac{c^2}{a'})^2}{c^4/a'^2} - \frac{(ct)^2}{c^4/a'^2} = 1 . \quad (3.3.46)$$

Dobili smo jednačinu hiperbole. Kretanje sa stalnim ubrzanjem ($a' = \text{const.}$) se naziva hiperbolnim kretanjem. Ako izaberemo $x_0 = c^2/a'$ jednačina kretanja ima prostiji oblik:

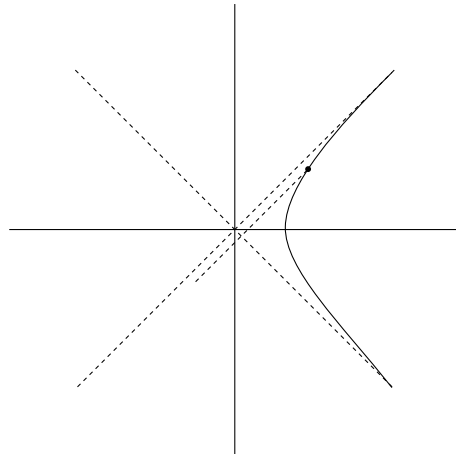
$$\frac{x^2}{c^4/a'^2} - \frac{(ct)^2}{c^4/a'^2} = 1 . \quad (3.3.47)$$

Neka se u nekom trenutku vremena čestica nalazi u tački P , što je prikazano na slici 3.3. Čestica P može da primi informaciju iz prošlosti samo od posmatrača iz njenog svetlosnog konusa i to njegovog dela u prošlosti. Dakle, čestica ne može da primi informaciju iz celog prostor-vremena. Računajući celu trajektoriju čestice vidimo da linija $ct = x$ deli prostor na dva dela. Deo univerzuma levo od ove linije je nedostupan za našu česticu (posmatrača S'). Ova linija se naziva Rindlerovim horizontom događaja za ubrzanog posmatrača.

3.4 Kovarijantni oblik drugog Njutnovog zakona

Diferenciranjem energije čestice (3.2.32) po vremenu imamo

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} , \quad (3.4.48)$$



Slika 3.2: Hiperbolno kretanje.

gde smo iskoristili

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v} . \quad (3.4.49)$$

Zadnja formula se lako proverava na osnovu izraza za energiju i impuls čestice. Relaciju (3.4.48) možemo prepisati u obliku

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.4.50)$$

Slično imamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.4.51)$$

Poslednje dve formule mogu biti prepisane u kovarijantnom obliku

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu , \quad (3.4.52)$$

gde je

$$\mathcal{F}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \quad (3.4.53)$$

tzv. četvorovektor sile. Drugi Njutnov zakon zapisan u obliku (3.4.52) je kovarijantan; leva i desna strana su četvorovektori. U drugom inercijalnom sistemu on ima isti oblik

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}'^\mu . \quad (3.4.54)$$

Fizički zakoni moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima. To je sadržaj prvog Ajnštajnovog postulata.

3.5 Rasejanja

U nerelativističkoj (Njutnovoj) mehanici troimpuls je očuvan ukoliko na sistem ne deluju spoljne sile. Suma unutrašnjih sila iščezava zbog zakona akcije i reakcije. U elastičnim sudarima pored zakona održanja impulsa održana je i kinetička energija.

Pri relativističkim sudarima čestica (tj. čestica koje se kreću velikim brzinama, npr. u CERN-u) situacija je znatno komplikovanija. Interakcija se ne prenosi trenutno, pa zakon akcije i reakcije nema smisla. Zakoni održanja su uvek posledica neke simetrije sistema. Troimpuls i energija su očuvani ako je teorija koja opisuje dati fizički proces invarijantna na prostorne translacije odnosno na vremensku translaciju. Razmatrajmo rasejanje

$$a + b + \dots \rightarrow c + d + \dots .$$

Interakcija između čestica se dešava unutar neke male oblasti prostora. Mnogo pre interakcije (u dalekoj prošlosti) i mnogo posle interakcije (daleka budućnost) čestice su skoro slobodne. Energija čestica pre sudara (misli se mnogo pre sudara, tj. u dalekoj prošlosti) jednaka je energiji čestica posle sudara (opet mislimo u dalekoj budućnosti)

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b + \dots = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_d + \dots . \quad (3.5.55)$$

Troimpuls je takodje očuvan

$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b + \dots = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d + \dots . \quad (3.5.56)$$

Ova dva zakona znače da je četvoroimpuls očuvan:

$$P_a^\mu + P_b^\mu + \dots = P_c^\mu + P_d^\mu + \dots . \quad (3.5.57)$$

Zakon održanja četvoroimpulsa je kovarijantan.

Neka se čestica mase m kreće brzinom v i sudara se sa istom takvom česticom koja miruje. One formiraju novu česticu mase M . Sa v' obeležimo brzinu nastale čestice. U nerelativističkom slučaju dobijamo da je $v' = v/2$ i $M = 2m$. U relativističkom slučaju (a to znači pri velikim brzinama) zakon održanja četvoroimpulsa je

$$\begin{pmatrix} mc\gamma \\ mv\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mc\gamma' \\ Mv'\gamma' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.58)$$

gde je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}. \quad (3.5.59)$$

Odavde dobijamo da je brzina nastale čestice

$$v' = \frac{v\gamma}{1 + \gamma} > \frac{v}{2} \quad (3.5.60)$$

i

$$M = \sqrt{2(1 + \gamma)}m > 2m . \quad (3.5.61)$$

Oba rezultata su različita od nerelativističkog slučaja. Drugi, da je masa nastale čestice veća od zbira masa čestica pre sudara $2m$ je posebno interesantan. Odakle ekstra masa? Pa od kinetičke energije pre sudara; deo kinetičke energije je pretvoren u masu. Ništa čudno ako imamo na umu prethodnu lekciju o ekvivalentnosti mase i energije. Pri nerelativističkim rasejanjima masa se održava, dok za relativističke čestice to ne važi.

Sistem centara impulsa čestica je sistem u kojem je ukupni relativistički troimpuls čestica jednak nuli. Takav sistem uvek postoji. Da bi to dokazali pokažimo prvo sledeće tvrdjenje:

Ako su P_1 i P_2 četvorovektori vremenskog ili svetlosnog tipa onda je $P_1 \cdot P_2 \geq 0$. Ovo se lako pokazuje. Ako su oba vektora svetlosnog tipa onda je $P_1 \cdot P_2 = |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|(1 - \cos \theta) \geq 0$, gde je $\theta = \angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Ako je bar jedan od četvorovektora vremenskog tipa možemo preći u njegov sistem mirovanja. Uzećemo da je

$$P_1 = \begin{pmatrix} m_1 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } P_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_2 \\ c \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \quad (3.5.62)$$

onda je

$$P_1 \cdot P_2 = m_1 \mathcal{E}_2 > 0 .$$

Pokazaćemo još jedno tvrdjenje: Ukoliko su P_1 i P_2 četvorovektori vremenskog ili svetlosnog tipa onda je $(P_1 + P_2)^2 \geq 0$. Ovo se lako proverava primenom prethodnog tvrdjenja:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)^2 &= m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2P_1 \cdot P_2 \geq 2P_1 \cdot P_2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.5.63)$$

Znak jednakosti u prethodnoj formuli bi važio ako bi obe čestice bile bezmasene i ukoliko je ugao $\theta = 0$, tj. one se kreću paralelno. To ne bi odgovaralo rasejanju. Prema tome za dve čestice koje se sudaraju uvek postoji sistem reference u kome je ukupni troimpuls jednak nuli, jer je vektor $P_1 + P_2$ vremenskog tipa. Ovo pokazuje da uvek možemo da predjemo u sistem centra impulsa.

3.6 Elastično rasejanje

U relativističkoj fizici sudar je elastičan ako se broj čestica i njihova vrsta održava pri sudaru, tj. ako se ne kreiraju nove čestice ili anihiliraju već postojeće. Takav je proces

$$a + b \rightarrow a + b . \quad (3.6.64)$$

Analizirajmo prvo ovaj proces u sistemu centra impulsa (CM). Neka se čestice pre rasejanja kreću duž z -ose. Ugao rasejanja u sistemu CM obeležićemo sa θ . Četvoroiimpulsi čestica a i b pre sudara su

$$\tilde{P}_a^\mu = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_a \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } \tilde{P}_b^\mu = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_b \\ c \\ 0 \\ -\tilde{p} \end{pmatrix} , \quad (3.6.65)$$

a posle sudara

$$\tilde{Q}_a = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathcal{E}}'_a}{c} \\ \tilde{q} \sin \theta \\ 0 \\ \tilde{q} \cos \theta \end{pmatrix} \quad \tilde{Q}_b^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathcal{E}}'_b}{c} \\ -\tilde{q} \sin \theta \\ 0 \\ -\tilde{q} \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.6.66)$$

Iz zakona održanja energije, $\tilde{\mathcal{E}}_a + \tilde{\mathcal{E}}_b = \tilde{\mathcal{E}}'_a + \tilde{\mathcal{E}}'_b$, sledi

$$\sqrt{m_a^2 c^4 + \tilde{p}^2 c^2} - \sqrt{m_b^2 c^4 + \tilde{q}^2 c^2} = \sqrt{m_a^2 c^4 + \tilde{q}^2 c^2} - \sqrt{m_b^2 c^4 + \tilde{p}^2 c^2}.$$

Iz ove relacije dobijamo $\tilde{p} = \tilde{q}$, odakle je $\tilde{\mathcal{E}}_a = \tilde{\mathcal{E}}'_a$ i $\tilde{\mathcal{E}}_b = \tilde{\mathcal{E}}'_b$. Veličina θ potpuno određuje proces rasejanja.

Analizirajmo sada rasejanje u laboratorijskom sistemu, slika 3.3. Neka čestica b miruje, a čestica a se kreće duž z -ose. Uzećemo da se posle sudara čestice razleću pod uglovima θ_1 , odnosno θ_2 u odnosu na z -osu. Četvoroimpulsi čestica pre sudara u LAB sistemu su:

$$P_a^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_a}{c} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \quad P_b^\mu = \begin{pmatrix} m_b c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.67)$$

a posle sudara

$$Q_a = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}'_a}{c} \\ \mathbf{q}_a \end{pmatrix} \quad Q_b = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}'_b}{c} \\ \mathbf{q}_b \end{pmatrix}. \quad (3.6.68)$$

Iz zakona održanja četvoroimpulsa sledi

$$P_a + P_b - Q_a = Q_b.$$

Kvadriranjem gornje formule dobijamo

$$P_a^2 + P_b^2 + Q_a^2 + 2P_{a\mu}P_b^\mu - 2P_{a\mu}Q_a^\mu - 2Q_{a\mu}P_b^\mu = Q_b^2. \quad (3.6.69)$$

Primenom $P_a^2 = Q_a^2 = m_a^2 c^2$, $P_b^2 = Q_b^2 = m_b^2 c^2$ i

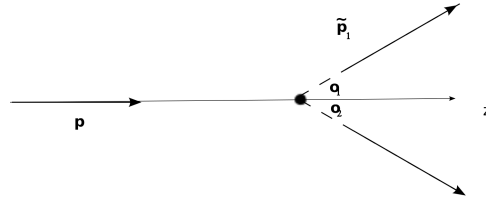
$$\begin{aligned} P_{a\mu}P_b^\mu &= E_a m_b \\ P_{a\mu}Q_a^\mu &= \frac{E_a E'_a}{c^2} - p q_a \cos \theta_1 \\ Q_{a\mu}P_b^\mu &= E'_a m_b. \end{aligned} \quad (3.6.70)$$

dobijamo ugao rasejanja θ_1

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}'_a (\mathcal{E}_a / c^2 + m_b) - m_a^2 c^2 - \mathcal{E}_a m_b}{p q_a}. \quad (3.6.71)$$

Slično se dobija i ugao θ_2 . Rezultat je

$$\cos \theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_a / c^2 + m_b)(\mathcal{E}'_b - m_b c)}{p q_b}. \quad (3.6.72)$$



Slika 3.3: Elastično rasejanje u laboratorijskom sistemu.

3.7 Komptonovo rasejanje

Foton je bezmasena čestica ($m = 0$) koja se kreće brzinom c , pa je za nju izraz za energiju (3.2.22) neprimenljiv. Iz (3.2.32) sledi veza energije i impulsa fotona

$$E = cp . \quad (3.7.73)$$

Sa druge strane enegiju fotona možemo izraziti preko frekvence ili talasne dužine

$$\mathcal{E} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} , \quad (3.7.74)$$

gde je h Plankova konstanta. Komptonovo rasejanje je rasejanje fotona na elektronu koji miruje. Neka se foton kreće duž z - ose (slikaKompton-kinem) i neka mu je talasna dužina λ . Četvorovektor impulsa ovog fotona

$$P_f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{c}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c}{\lambda} \end{pmatrix} . \quad (3.7.75)$$

Impuls elektrona pre rasejanja je

$$P_e^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.7.76)$$

Foton se raseje pod uglom θ u smeru orta \mathbf{n} . Ako je λ' talasna dužina rasejanog fotona onda je njegov četvorovektor impulsa

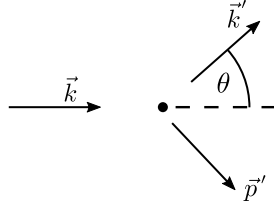
$$P_f'^\mu = \begin{pmatrix} \frac{c}{\lambda'} \\ \frac{c}{\lambda'} \mathbf{n} \end{pmatrix} . \quad (3.7.77)$$

Impuls rasejanog elektrona je

$$P_e'^\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{E}' \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} . \quad (3.7.78)$$

Zakon održanja energije i tro-impulsa je

$$P_f^\mu + P_e^\mu = P_f'^\mu + P_e'^\mu \quad (3.7.79)$$



Slika 3.4: Komptonovo rasejanje.

odakle je

$$P_e'^{\mu} = P_f^{\mu} + P_e^{\mu} - P_f'^{\mu}. \quad (3.7.80)$$

Kvadriranjem ovog izraza uz sledeće skalarne proizvode

$$\begin{aligned} P_e'^{\mu} P_{\mu e}' &= P_e^{\mu} P_{\mu e} = m^2 c^2 \\ P_f'^{\mu} P_{\mu f}' &= P_f^{\mu} P_{\mu f} = 0 \\ P_f \cdot P_e &= \frac{mch}{\lambda} \\ P_f \cdot P_f' &= \frac{h^2}{\lambda\lambda'} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta \\ P_e \cdot P_f' &= \frac{mch}{\lambda'}, \end{aligned} \quad (3.7.81)$$

dobijamo

$$\lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.7.82)$$

Talasna dužina fotona posle rasejanja je veća od talasne dužine upadnog fotona, jer je on predao deo energije elektronu.

3.8 Energija praga reakcije

Neka čestica mase m_a naleće na česticu mase m_b koja miruje i neka se u tom procesu kreiraju čestice mase m_c i m_d . Ako je $m_c + m_d > m_a + m_b$ odredimo minimalnu vrednost kinetičke energije čestice a da bi došlo do procesa. Ukupni četvoroimpuls čestica a i b u laboratorijskom sistemu pre sudara je

$$P^{\mu} = \begin{pmatrix} (m_a + m_b)c + T_a/c \\ 0 \\ 0 \\ p_a \end{pmatrix}. \quad (3.8.83)$$

Posle sudara ukupni impuls u CM je

$$\tilde{Q}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}'_c}{c} + \frac{\mathcal{E}'_d}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8.84)$$

Kvadratat ovog četvorovektora,

$$\tilde{Q}^2 = \frac{(\tilde{\mathcal{E}}'_c + \tilde{\mathcal{E}}'_d)^2}{c^2}$$

je invarijanta, pa bez obzira što je $P^\mu \neq \tilde{Q}^\mu$ važi $P^2 = \tilde{Q}^2$. Tako dolazimo do jednačine

$$\left((m_a + m_b)c + \frac{T_a}{c} \right)^2 - \frac{\mathcal{E}_a^2}{c^2} + m_a^2 c^2 = \frac{(\tilde{\mathcal{E}}'_c + \tilde{\mathcal{E}}'_d)^2}{c^2} . \quad (3.8.85)$$

Kinetička energija upadne čestice je najmanja ukoliko je desna strana gornje jednačine najmanja, a to je u slučaju kada produkti procesa miruju u sistemu CM. Tako dobijamo energiju praga reakcije

$$(T_a)_{\min} = \frac{(m_c + m_d)^2 c^2 - (m_a + m_b)^2 c^2}{2m_b} . \quad (3.8.86)$$

Razmatrajmo sudar protona sa antiprotonom da bi proizveli Higsov bozon

$$p + \bar{p} \rightarrow H + X , \quad (3.8.87)$$

gde je X hadron znatno manje mase od mase Higsovog bozona. Neka u procesu proton miruje. Masa Higsovog bozona je $m_H = 125\text{GeV}$, a masa protona $m_p = 940\text{MeV}$, pa je energija praga za ovaj proces

$$(T_p)_{\min} = \frac{m_H^2 c^2 - 4m_p^2 c^2}{2m_p} \approx \frac{m_H^2 c^2}{2m_p} \approx 8000\text{GeV} . \quad (3.8.88)$$

Ogromna energija. Protone i antiprotone je efikasnije sudarati kada se kreću u susret jedan drugom, sa istom energijom. Tada je minimalna energija za kreiranje Higsovog bozona, po svakoj od čestica 60GeV .

3.9 Mandelstamove varijable

Razmotrimo rasejanje dve čestice u dve čestice: $a+b \rightarrow c+d$. Četvorovektori impulsa ovih čestica su P_a, P_b, P_c i P_d . Važi $P_a^2 = m_a^2 c^2$ i lično za preostale tri čestice. Mandelstamove varijable s, t, u su definisane sa

$$\begin{aligned} s &= (P_a + P_b)^2 = (P_c + P_d)^2 \\ t &= (P_a - P_c)^2 = (P_b - P_d)^2 \\ u &= (P_a - P_d)^2 = (P_b - P_c)^2 . \end{aligned} \quad (3.9.89)$$

To su invarinatne veličine. s je energija čestica a i b u sistemu centar impulsa. Varijabla t govori o transferu impulsa sa čestice a na česticu c dok varaijabla u govori o transferu impulsa sa čestice a na česticu d . Od tri Mandelstamove varijable dve su nezvisne, jer postoji sledeća veza

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) c^2 .$$

3.10 Dejstvo za slobodnu relativističku česticu

Neka se čestica kreće od tačke (t_1, x_1, y_1, z_1) do tačke (t_2, x_2, y_2, z_2) . Interval između infinitezimalno bliskih tačaka x^μ i $x^\mu + dx^\mu$ u prostoru Minkovskog je

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt . \quad (3.10.90)$$

Dejstvo za slobodnu relativističku česticu, mase m je

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds , \quad (3.10.91)$$

dakle proporcionalno je dužini trajektorije čestice između tačaka (1) i (2) u prostoru Minkovskog. Zamenom (3.10.90) u dejstvo dobijamo

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (3.10.92)$$

Dejstvo (3.10.91) je Lorencov skalar. Kako smo ga napisali u obliku $\int dt \dots$ izraz u zagradi je očigledno Lagranžijan

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.10.93)$$

i on nije skalar, jer veličina dt nije skalar. U nerelativističkom limesu $v \ll c$ lagranžijan postaje

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right) \\ &= -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots . \end{aligned} \quad (3.10.94)$$

Konstantni član ne utiče na jednačine kretanja pa ga možemo odbaciti. Lagranžijan se u nerelativističkom limesu svodi na kinetičku energiju čestice.

Oredimo Lagranževu jednačinu kretanja čestice. Iz (3.10.93) sledi

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.10.95)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{p} \quad (3.10.96)$$

pa je jednačina kretanja

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (3.10.97)$$

je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = 0 \quad (3.10.98)$$

odnosno

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 . \quad (3.10.99)$$

Generalisani impuls je

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.10.100)$$

i on je vektor impulsa (troimpuls) slobodne relativističke čestice. Hamiltonijan je

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2} . \end{aligned} \quad (3.10.101)$$

U poslednjem koraku smo eliminisali brzine preko impulsa jer je Hamiltonijan funkcija koordinata i impulsa. U nerelativističkom limesu Hamiltonijan postaje

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + mc^2 .$$

Jednačine kretanja se mogu dobiti u kovarijantnom obliku. Interval ds između tačaka x^μ i $x^\mu + dx^\mu$ je

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \\ &= \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \\ &= \sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} , \end{aligned} \quad (3.10.102)$$

gde je τ sopstveno vreme. Dejstvo za slobodnu relativističku česticu je dakle

$$S = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} d\tau ,$$

gde smo uveli četvorobrzinu U^μ . Izraz

$$\tilde{L}(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau)) = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} \quad (3.10.103)$$

je Lagranžijan; ovaj Lagranžijan je Lorencov skalar jer je sopstveno vreme skalar. Da bi našli jednačine kretanja čestice odredimo prvo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial U^\alpha} &= -\frac{mc}{\sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu}} u_\alpha = -mU_\alpha \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Zamenom u

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial U^\alpha} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (3.10.104)$$

dobijamo jednačine kretanja

$$m \frac{dU_\alpha}{d\tau} = 0 \quad (3.10.105)$$

što se može prepisati u obliku

$$m \frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (3.10.106)$$

što očekujemo za slobodnu česticu.

3.11 Zadaci

Zadatak 1. Naći kvadrat četvorubrzanja, $\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu$.

Rešenje: Polazeći od (3.3.38) imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu &= c^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 - \left(\gamma \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \right)^2 \\ &= -\gamma^4 \mathbf{a}^2 - \gamma^6 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (3.11.107)$$

Vidimo da je četvorovektor ubrzanja vektor prostornog tipa.

Zadatak 2. Čestica se kreće po zakonu

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t) \\ y &= R \sin(\omega t) \\ x &= ut \end{aligned}$$

gde su R , ω i u konstante. Odrediti četvorobrzinu i četvorubrzanje čestice. Izračunati $U_\mu U^\mu$ i $\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu$ i $\mathcal{A}^\mu U_\mu$.

Rešenje: Četvorobrzina čestice je

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2 + u^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.11.108)$$

dok je četvorubrzanje

$$\mathcal{A}^\mu = -\frac{1}{1 - \frac{\omega^2 R^2 + u^2}{c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega^2 \cos(\omega t) \\ R\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11.109)$$

Direktno se proverava da je $U_\mu U^\mu = c^2$ i $\mathcal{A}^\mu U_\mu = 0$ kao i

$$\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu = -\frac{R^2 \omega^4}{\left(1 - \frac{\omega^2 R^2 + u^2}{c^2}\right)^2}.$$

Zadatak 3. (Uzeto iz [11]) Dve čestice se kreću u inercijalnom sistemu S brzinama \mathbf{v}_1 , odnosno \mathbf{v}_2 . Odrediti intenzitet brzine jedne čestice u sistemu druge čestice.

Rešenje: Četvorobrzina prve čestice u sistemu S je

$$U_1^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma_1 \\ \mathbf{v}_1\gamma_1 \end{pmatrix},$$

gde je

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Analogno, četvorobrzina druge čestice u sistemu S je

$$U_2^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma_2 \\ \mathbf{v}_2\gamma_2 \end{pmatrix},$$

Sa druge strane za posmatrača vezanog za prvu česticu ove brzine su

$$U_1'^\mu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2'^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \mathbf{v}\gamma \end{pmatrix},$$

gde je \mathbf{v} brzina druge čestice za posmatrača iz sistema vezanog za prvu česticu. Skalarni proizvod četvorobrzina prve i druge čestice je isti u svim inercijalnim sistemima, tj.

$$U_{\mu 1} U_2^\mu = U_{\mu 1}' U_2'^\mu.$$

Iz poslednje relacije sledi

$$\gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right) = \gamma.$$

Primenom vektorskog identiteta

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 = v_1^2 v_2^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2$$

dobijamo

$$v^2 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 / c^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right)}.$$

Zadatak 4. Elektron, energije mirovanja $mc^2 = 0,51\text{MeV}$ ima kinetičku energiju $T = 10\text{MeV}$. Odrediti impuls elektrona.

Rešenje: Iz formule

$$\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} = T + mc^2$$

dobijamo

$$|\mathbf{p}| = \frac{\sqrt{T^2 + 2Tmc^2}}{c}.$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo $|\mathbf{p}| = 5,6 \cdot 10^{-21} \text{kgms}^{-1}$.

Zadatak 5. Čestica mase m i kinetičke energije T_0 elastično se rasejava na čestici iste mase koja miruje. Ako se upadna čestica raseje pod uglom θ_1 , naći njenu kinetičku energiju posle rasejanja.

Rešenje: Četvoroimpuls upadne čestice je

$$P_1^\mu = \begin{pmatrix} mc + \frac{T_0}{c} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.11.110)$$

a čestice mete

$$P_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11.111)$$

Četvoroimpuls rasejanog projektila je

$$P_1'^\mu = \begin{pmatrix} mc + \frac{T_1}{c} \\ p'_1 \sin \theta_1 \\ 0 \\ p'_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.11.112)$$

gde su T_1 i p'_1 kinetička energija, odnosno intenzitet impulsa rasejane čestice. Zakon održanja četvoroimpulsa je

$$P_1 + P_2 - P_1' = P_2',$$

gde je P_2' četvoroimpuls čestice mete posle sudara. Kvadriranjem gornje relacije dobijamo

$$T_1 \left(2m + \frac{T_0}{c^2} \right) = \sqrt{\left(\frac{T_0^2}{c^2} + 2mT_0 \right) \left(\frac{T_1}{c^2} + 2m \right)} \cos \theta_1 \quad (3.11.113)$$

odakle, sredjivanjem dobijamo

$$T_1 = \frac{T_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{T_0}{2mc^2} \sin^2 \theta_1}. \quad (3.11.114)$$

Zadatak 6. U sudaru protona sa drugim protonom koji miruje, nastataju tri protona i jedan antiproton. Energije mirovanja protona i antiprotona su jednake i iznose 938MeV. Odrediti minimalnu kinetičku energiju upadnog protona, da bi došlo do ove reakcije.

Rešenje: Primenom formule (3.8.86) dobijamo $T_{min} = 6m_p c^2 = 5628 \text{MeV}$.

Zadatak 7. Četvoroimpuls čestice je P^μ . Pokazati da je energija slobodne čestice za posmatrača čija je četvorobrzina U^μ data sa $E = U_\mu P^\mu$.

Rešenje: Izraz $U_\mu P^\mu$ je Lorencov skalar. U sistemu posmatrača $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, dok je nulta komponenta četvoroinpulsula čestice $P^0 = E/c$. Prema tome, $E = U_\mu P^\mu$.

Zadatak 8. Pion se kreće brzinom v i raspada se na mion i antimionski neutrino, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Antineutrino se kreće pod uglom od 90° u odnosu na pravac kretanja piona. Naći ugao koji impuls miona zaklapa sa pravcem piona. Masa piona je $m_\pi = 138\text{MeV}$, miona 105MeV , dok je neutrino bezmasena čestica (preciznije skoro bezmasen).

Rezultat je

$$\tan \theta = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^4}{2E_\pi \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2 c^4}}.$$

Zadatak 9. Dve čestice masa m elastično se sudaraju. Naći ugao između čestica posle rasejanja u laboratorijskom sistemu. Uzeti da jedna čestica pre sudara miruje. Rezultat izraziti preko energija rasejanih čestica, $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2$.

Rezultat:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{(\mathcal{E}'_1 - mc^2)(\mathcal{E}'_2 - mc^2)}{(\mathcal{E}'_1 + mc^2)(\mathcal{E}'_2 + mc^2)}}$$

Zadatak 10. Čestica mase m_1 kreće se brzinom v_1 , dok čestica mase m_2 miruje u laboratorijskom sistemu reference. Odrediti:

- brzinu centra impulsa u laboratorijskom sistemu,
- energiju svake od ovih čestica u sistemu centra impulsa,
- impulse čestica u sistemu centra impulsa.

Rešenje:

- Četvoroinpulsuli prve i druge čestice u laboratorijskom sistemu su redom:

$$P_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_1}{c} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad P_2^\mu = \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11.115)$$

Ova dva četvoroinpulsula u sistemu centra impulsa ove dve čestice su

$$\tilde{P}_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_1}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{p} \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_2^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_2}{c} \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{p} \end{pmatrix}. \quad (3.11.116)$$

Intenziteti (tro)impulsa ove dve čestice su jednaki, tj.

$$\tilde{\mathcal{E}}_1^2 - m_1^2 c^4 = \tilde{\mathcal{E}}_2^2 - m_2^2 c^4. \quad (3.11.117)$$

Ako brzinu centra impulsa u odnosu na laboratorijski sistem obeležimo sa V , tada primenom zakona transformacije impulsa imamo

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_1 &= \frac{\mathcal{E}_1 - Vp}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \tilde{\mathcal{E}}_2 &= \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .\end{aligned}\quad (3.11.118)$$

Zamenom ovih izraza u (3.11.117) dobijamo

$$V = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4}}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2} .\quad (3.11.119)$$

(b) Energije čestice možemo dobiti zamenom izraza za brzinu centra impulsa u (3.11.118). Rezultat je

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_1 &= \frac{(\mathcal{E}_1 m_2 + m_1^2 c^2)c}{\sqrt{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}} \\ \tilde{\mathcal{E}}_2 &= \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)m_2 c}{\sqrt{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}} .\end{aligned}\quad (3.11.120)$$

Do ovih rezultata možemo doći i preko invarijanti. Ukupni impuls čestica u sistemu impulsa je

$$(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)^\mu = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .\quad (3.11.121)$$

Kako je $(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)^2$ skalar to je

$$(\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2)^2 = (P_1 + P_2)^2 .\quad (3.11.122)$$

Odavde je ukupna energija ove dve čestice u sistemu centra impulsa

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2 = \sqrt{2\mathcal{E}_1 m_2 c^2 + m_2^2 c^4 + m_1^2 c^4} .\quad (3.11.123)$$

Energiju prve čestice u sistemu centra impulsa možemo dobiti iz

$$P_1 \cdot (P_1 + P_2) = \tilde{P}_1 \cdot (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2) ,\quad (3.11.124)$$

odakle je

$$\tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{\mathcal{E}}_1 + \tilde{\mathcal{E}}_2) = m_1^2 c^4 + m_2 c \mathcal{E}_1 .\quad (3.11.125)$$

Iz poslednje relacije dobijamo

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 = \frac{(\mathcal{E}_1 m_2 + m_1^2 c^2)c}{\sqrt{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}} .\quad (3.11.126)$$

Analogno iz

$$P_2 \cdot (P_1 + P_2) = \tilde{P}_2 \cdot (\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2) , \quad (3.11.127)$$

dobijamo izraz za energiju druge čestice u sistemu centra impulsa. Impuls čestica u sistemu centra impulsa je

$$\tilde{p} = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4} .$$

Literatura

- [1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley (2002)
- [2] P. Schwarz and J. Schwarz, Special Relativity, CUP, (2004)
- [3] L. Landau, E. Lifšic, Teorija polja, Mir Moskva, (1998)
- [4] W. Rindler, Introduction to Special Relativity, OUP (1991)
- [5] R. D’Inverno, Introducing Einstein’s Relativity OUP (2003)
- [6] A. French, Special Relativity, W. W. Norton and Comp. New York (1980)
- [7] R. Resnik, Introduction to Special Relativity, John Wiley and Sons, New Your, (1968)
- [8] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc. (1999)
- [9] P.L. Sardesai, A Primer of Special Relativity, New Age International Publisers, New Delhi (2008)
- [10] V.V. Batygin and I. N. Toptugin, Problems in Electrodynamics, Academic Press, London (1978)
- [11] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price and S. A. Teukolsky, Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton Univrersity Press, Princeton, (1975)