

RELATIVISTIČKA KVANTNA MEHANIKA

beleške za predavanja

Maja Burić i Voja Radovanović

Beograd, 2020.

Sadržaj

1 Uvod: kvantna mehanika i specijalna relativnost	7
1.1 Kvantna mehanika	7
1.2 Relativistička simetrija	8
2 Relativističke talasne jednačine	13
2.1 Klajn–Gordonova jednačina	13
2.2 Dirakova jednačina	15
2.2.1 Prirodni sistem jedinica	16
2.2.2 Kovarijantni zapis Dirakove jednačine	17
2.2.3 γ -matrice	17
2.2.4 Gustina struje i gustina verovatnoće	19
3 Kovarijantnost Dirakove jednačine	21
3.1 Spinorska reprezentacija	21
3.1.1 Matrice $\sigma_{\mu\nu}$	23
3.1.2 Lorencove transformacije u spinorskoj reprezentaciji	24
3.2 Γ -matrice, Klifordova algebra	25
3.3 Bilinearne kovarijantne veličine	26
4 Rešenja slobodne Dirakove jednačine	27
4.1 Slobodna čestica u sistemu mirovanja	27
4.2 Slobodna čestica u proizvoljnem inercijalnom sistemu	29
4.3 Normalizacija stanja, kompletност, projektori energije	30
4.4 Ukupni ugaoni moment Dirakove čestice	31
4.5 Vektor Pauli-Lubanskog, projektori spina	34
5 Fizičke karakteristike rešenja	37
5.1 Opšte rešenje slobodne jednačine, normiranje	37
5.2 Gordonovo razlaganje struje	38
5.3 Struja verovatnoće slobodne čestice	39
5.4 Evolucija Gausovog paketa	40

6 Elektromagnetna interakcija	43
6.1 Minimalno kuplovanje	43
6.2 Nerelativistički limes Dirakove jednačine	44
6.3 Klajnov paradoks	46
7 Diskretne transformacije	49
7.1 Prostorna inverzija	49
7.2 Vremenska inverzija	50
7.3 Teorija šupljina	52
7.4 Konjugacija naboja	53
8 Rasejanja-1	57
8.1 Teorija rasejanja	57
8.2 Rasejanje u kvantnoj mehanici	59
8.3 Grinova funkcija za slobodnu nerelativističku česticu	60
8.3.1 Rasejanje na lokalizovanom potencijalu	62
8.3.2 Bornova aproksimacija	63
8.4 Propagator za stanja diskretnog spektra	64
8.5 Propagator za slobodnu nerelativističku česticu	66
9 Rasejanja-2	69
9.1 Rasejanje u relativističkoj kvantnoj mehanici:	
Fajnmanov propagator	69
9.2 Elektron u slabom elektromagnetsnom polju	71
9.2.1 Rasejanje elektrona	72
9.2.2 Rasejanje pozitrona	73
9.3 Rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu	74
9.4 Rasejanje pozitrona na Kulonovom potencijalu	77
9.5 Rasejanje elektrona na protonu	78
9.6 Fotoni	83
9.7 Fajnmanova pravila	84
9.8 Komptonovo rasejanje	85
9.9 Neki dijagrami u QED	89

Predgovor

Ovaj tekst je nastao na osnovu predavanja koja smo držali iz relativističke kvantne mehanike studentima četvrte godine Fizičkog fakulteta u Beogradu. Zahvaljujemo se Dušku Latasu, docentu Fizičkog fakulteta, koji je nacrtao slike..

Beograd, 2020.

Maja Burić, e-mail: majab@ipb.ac.rs
Voja Radovanović, e-mail: rvoja@ipb.ac.rs

Glava 1

Uvod: kvantna mehanika i specijalna relativnost

I kvantna mehanika i specijalna teorija relativnosti su nastale početkom dvadesetog veka, iz potrebe da se opiše stalno rastući broj eksperimentalnih podataka o kretanju i osobinama čestica na sve manjim rastojanjima, i sa sve većim brzinama. Cilj Šredingera, Diraka i drugih teorijskih fizičara bio je da kvantnu mehaniku prošire u relativistički domen i objedine sa specijalnom teorijom relativnosti: kao prvi korak, da nađu kvantnu + relativističku jednačinu za slobodnu česticu. Ovaj pokušaj, iako je dobro opisao neke osobine relativističke čestice, dovodi (kao što ćemo videti u kursu) do različitih paradoksa u fizičkoj interpretaciji: ti paradoksi se rešavaju uvođenjem novih koncepata, pojma antičestice i fenomena kreacije i anihilacije čestica. U konačnom ishodu, razvoj relativističke kvantne mehanike doveo je do aktuelnog opisa materije, do kvantne teorije polja.

1.1 Kvantna mehanika

Kvantna mehanika opisuje ogroman broj fenomena u atomskoj i nuklearnoj fizici i fizici kondenzovanog stanja, od spektra atoma i molekula, stabilnosti atoma i radioaktivnog raspada do osobina čvrstih tela kao što su toplotni kapaciteti, provodljivost i superprovodljivost.

Stanja fizičkih sistema, odnosno čista stanja $|\psi\rangle$, su u kvantnoj mehanici normirani vektori u Hilbertovom prostoru¹, koji je linearni prostor, npr. prostor (kvadratno integrabilnih) funkcija, $\psi(\mathbf{r}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Osnovna jednačina kretanja, odnosno evolucije u kvantnoj mehanici je Šredingerova jednačina

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.1.1)$$

gde je H hamiltonijan sistema. Generator vremenske evolucije je hamiltonijan. Konkretno, za česticu mase m u potencijalu $V(\mathbf{r})$ ova jednačina je

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi, \quad (1.1.2)$$

¹Kvantni sistem može biti i u mešanom stanju, koje opisujemo statističkim operatorom, tj. matricom gustine.

i dobija se zamenom energije i impulsa čestice diferencijalnim operatorima,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1.1.3)$$

u izraz za energiju

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}).$$

Fizička stanja čestice su rešenja Šredingerove jednačine i dobijaju se fiksiranjem početnih uslova. Specijalno, jednačina za slobodnu česticu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad (1.1.4)$$

se dobija kvantovanjem disperzione relacije

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (1.1.5)$$

Kvantna mehanika opisuje čestice koje se kreću nerelativističkim brzinama i invarijantna je na Galilejeve transformacije, pa nije primenljiva na procese u kojima čestice imaju velike brzine. Relativistička teorija, između ostalog, treba da sadrži relativističku disperzionu jednačinu za slobodnu česticu,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.1.6)$$

i da bude Lorenc, odnosno Poenkare–invarijantna.

1.2 Relativistička simetrija

Zakoni kretanja čestica i polja koje se kreću velikim brzinama, ili brzinom svetlosti, invarijantni su na transformacije Lorencove odnosno Poenkareove grupe. U ovom poglavlju podsetićemo se osnovnih osobina Lorencove simetrije.

U prostoru Minkovskog, kvadrat intervala između dva događaja sa koordinatama x^μ i y^μ je

$$(x - y)^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu), \quad (1.2.7)$$

gde je $g_{\mu\nu}$ metrički tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.8)$$

Za infinitezimalno udaljene tačke x i $x + dx$ ova formula daje *element dužine*

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2.9)$$

Poenkareove transformacije su linearne transformacije koordinata

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.2.10)$$

koje ne menjaju kvadrat intervala između dve tačke. One se sastoje od Lorencovih transformacija Λ i translacija a .

U nastavku ćemo detaljnije razmotriti osobine Lorencovih transformacija

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.2.11)$$

pošto su translacije relativno jednostavne. Iz invarijantnosti intervala sledi

$$\Lambda^\rho_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = (\Lambda^T)_\mu^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (1.2.12)$$

odnosno $\Lambda^T g \Lambda = g$, osobina koja definiše Lorencove transformacije. Iz (1.2.12) sledi da je inverzni element $\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g$. On je Lorencova transformacija sa komponentama

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = (g^{-1} \Lambda^T g)^\mu_\nu = g^{\mu\rho} \Lambda^\sigma_\rho g_{\sigma\nu} \equiv \Lambda_\nu^\mu. \quad (1.2.13)$$

Iz uslova (1.2.12), za $\rho = \sigma = 0$, sledi

$$\Lambda^0_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_0 = 1,$$

odnosno

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1.$$

Prema tome, matrični element Λ^0_0 zadovoljava

$$\Lambda^0_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2}, \quad (1.2.14)$$

i $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$, odnosno

$$\Lambda^0_0 \geq 1 \text{ ili } \Lambda^0_0 \leq -1. \quad (1.2.15)$$

Ukoliko je $\Lambda^0_0 \geq 1$, ovakve Lorencove transformacije ne menjaju smer vremena i nazivaju se *ortohronim* Lorencovim transformacijama. Transformacije za koje je $\Lambda^0_0 \leq -1$ menjaju smer vremena.

Ako izračunamo determinantu izraza (1.2.12), dobijamo da je

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (1.2.16)$$

Determinanta Lorencovih transformacija je $+1$ za *prave* Lorencove transformacije, odnosno -1 za *neprave* Lorencove transformacije. Prema tome, Lorencova grupa se sastoji od četiri dela (četiri komponente povezanosti). Prave ortohrone Lorencove transformacije zadovoljavaju uslove

$$\det \Lambda = 1 \text{ i } \Lambda^0_0 \geq 1.$$

Pošto jedinična matrica pripada pravim ortohronim Lorencovim transformacijama, one su podgrupa cele Lorencove grupe koja se označava sa $SO_0(1, 3)$, a obeležavaćemo ih sa L_+^\uparrow (znak plus

u indeksu označava da je njihova determinanta $+1$, a strelica na gore da nema promene smera vremena). Transformacije Lorencove grupe koje imaju determinantu -1 i ne menjaju smer vremena obeležavamo sa L_-^\uparrow . Njima pripada prostorna inverzija I_p , i važi $L_-^\uparrow = I_p L_+^\uparrow$, tj. dobijamo ih tako što prave ortohrone transformacije pomnožimo matricom prostorne inverzije, pa one čine P-koset. Analogno, vremenska inverzija pripada T -kosetu Lorencove grupe, tj. $L_+^\downarrow = I_t L_+^\uparrow$, i konačno, $L_-^\downarrow = I_t I_p L_+^\uparrow$. Dakle, Lorencova grupa ima četiri nepovezana dela, što je sumirano u sledećoj tabeli:

$\det \Lambda$	Λ^0_0	oznaka	naziv
$+1$	≥ 1	L_+^\uparrow	prave ortohrone
-1	≥ 1	L_-^\uparrow	P-koset
-1	≤ -1	L_+^\downarrow	T-koset
$+1$	≤ -1	L_-^\downarrow	PT-koset

Transformacije za koje je $\det \Lambda = 1$ čine podgrupu $SO(1, 3, R)$. Često se pod Lorencovim transformacijama podrazumevaju samo prave orthrone transformacije L_+^\uparrow , a pod relativističkom kovariantnošću teorije njena kovariantnost na $SO_0(1, 3)$.

Infinitezimalna Lorencova transformacija povezana sa jediničnom transformacijom ima oblik

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad (1.2.17)$$

veličine ω^μ_ν su infinitezimalni *parametri* Lorencovih transformacija. Zamenom izraza (1.2.17) u (1.2.12) dobija se

$$\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}, \quad (1.2.18)$$

tj. da su parametri Lorencovih transformacija antisimetrični, pa ima šest nezavisnih.

Rotacije su Lorencove transformacije, a grupa rotacija $SO(3)$ je podgrupa Lorencove grupe. Na primer, rotacija oko x -ose za ugao θ_1 data je matricom

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Ako je ugao rotacije mali, onda je

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_1 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix},$$

odakle vidimo da je parametar $\omega_3^2 = \theta_1$. Analogno se dobija veza izmedju ugla rotacije oko y (odnosno z) ose sa parametrom ω_{13} (odnosno ω_{12}). Veza izmedju ugla rotacije oko i -te ose i parametra ω_{jk} je²

$$\theta_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}.$$

²Odranije poznate relacije u kojima se pojavljuju samo prostorni indeksi i, j, k pisaćemo često nekovariantno, bez podizanja i spuštanja indeksa, uzimajući da je prostorna 3d metrika euklidska.

I bustovi Lorencove transformacije. Matrica busta koja transformiše vektore x^μ iz sistema mirovanja u primovan sistem $x^{\mu'}$, koji se kreće brzinom v duž x -ose je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.19)$$

gde je

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.2.20)$$

Ako uvedemo parametar busta φ_1 relacijom $v_1 = c \tanh \varphi_1$, matrica busta postaje

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & -\sinh \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.21)$$

Bustovi duž y i z -ose izgledaju analogno. Zbog svog oblika, bustovi se često nazivaju hiperboličkim rotacijama, a parametri bustova ω_{0i} su

$$\omega_{0i} = -\varphi_i = -\operatorname{arctanh} \frac{v_i}{c}. \quad (1.2.22)$$

Kada se primovani sistem kreće duž proizvoljnog pravca $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ brzinom $v = c \tanh \varphi$, parametri busta ω_i^0 su

$$\omega_i^0 = -\varphi n_i,$$

a za matricu busta se dobija

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v_i}{c} \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v_i}{c} \gamma & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_i \beta_j}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -n_i \sinh \varphi & 0 & 0 \\ -n_i \sinh \varphi & 1 + (\cosh \varphi - 1) n_i n_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.23)$$

Napomenimo na kraju da je podgrupa rotacija $SO(3)$ kompaktna, jer parametri rotacija θ_i pripadaju ograničenom delu trodimenzionog prostora, tzv, π -lopti. Za razliku od toga, Lorencova grupa je nekompaktna: oblast promene svakog od parametara bustova je $\varphi_i \in (-\infty, \infty)$. Osobina kompaktnosti Lijeve grupe je važna za teoriju reprezentacija.

Glava 2

Relativističke talasne jednačine

2.1 Klajn–Gordonova jednačina

Želimo da konstruišemo talasnu jednačinu za slobodnu relativističku česticu, odnosno da je kvantujemo, pretpostavljajući da je čestica opisana talasnom funkcijom $\phi(x)$ koja zadovoljava talasnu jednačinu povezану са njenom disperzionom relacijom. Jedna mogućnost je да замену (1.1.3) направимо у relaciji

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} .$$

Tako dobijamo jednačinu

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta} \phi(x) . \quad (2.1.1)$$

Ova jednačina, međutim, nije zadovoljavajuća: nelokalna je (ako bi se koren sa desne strane definisao razvojem u red, imamo bismo izvode proizvoljno visokog stepena). Sem toga, jednačina nije invarijantna na Lorencove transformacije.

Drugi pokušaj је да кренемо од disperzione relacije slobodne relativističke čestice u kvadratnom obliku (1.1.6). Tako dobijamo

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \Delta + m^2 c^2 \right) \phi(x) = 0 , \quad (2.1.2)$$

odnosno

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 . \quad (2.1.3)$$

Jednačina (2.1.3) je Klajn–Gordonova jednačina. Napomenimo да прескриpciju (1.1.3) можемо записати у компактној односно коваријантној форми

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ -i\hbar \nabla \end{pmatrix} = i\hbar \partial^\mu \quad (2.1.4)$$

Dalamberov operator $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ je skalar,

$$\square' = \partial'^\mu \partial'_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \square ,$$

a talasna funkcija $\phi(x)$ se transformiše kao skalarno polje pri Lorencovim transformacijama, tj.

$$\phi'(x') = \phi'(\Lambda x) = \phi(x) .$$

Prema tome, Klajn–Gordonova jednačina je invarijantna na Lorencove transformacije. Činjenica da je talasna funkcija $\phi(x)$ Lorencov skalar znači da ona opisuje čestice nultog spina, što ćemo detaljnije videti u kursu Kvantne teorije polja.

Konjugovanjem Klajn–Gordonove jednačine dobijamo

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi^*(x) = 0 . \quad (2.1.5)$$

Ako sada jednačinu (2.1.3) pomnožimo sa ϕ^* sa leve strane, a jednačinu (2.1.5) sa ϕ i oduzmemos, dobijamo

$$\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^* = 0 ,$$

što možemo prepisati u obliku

$$\partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) = 0 .$$

Izraz u zagradi proporcionalan je gustini struje, odnosno fluksu verovatnoće čestice. Da bismo dobili dobar nerelativistički limes za gusinu struje uzećemo

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) . \quad (2.1.6)$$

Komponente j^μ su

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{j} &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right) . \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Gustina struje zadovoljava jednačinu kontinuiteta, $\partial_\mu j^\mu = 0$, odnosno

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 . \quad (2.1.8)$$

Međutim, nulta komponenta gustine struje ρ nije pozitivno definitna, i zbog toga je ne možemo interpretirati kao gusinu verovatnoće. To predstavlja problem ove jednočestične relativističke teorije. Drugi problem je vezan za postojanje negativno–energetskih rešenja. Naime, za rešenja Klajn–Gordonove jednačine koja su ravni talasi

$$\phi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar} Et + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.1.9)$$

iz (2.1.3) sledi da je $E = \pm \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}$, tj. da energija slobodne čestice može biti i negativna. Dakle, spektar energije slobodne relativističke čestice opisane Klajn–Gordonovom jednačinom nije ograničen sa donje strane, što je fizički neprihvatljivo. Istu osobinu, videćemo uskoro, imaju i rešenja Dirakove jednačine. Oba problema Klajn–Gordonove jednačine se uspešno rešavaju u kvantnoj teoriji polja.

2.2 Dirakova jednačina

U ovom poglavlju ‘izvešćemo’ Dirakovu na sličan način kao što je Dirak 1928. došao do nje. On je naime želeo da ‘korenjuje’ (2.1.3), ali tako da dobijeni izraz bude linaran po izvodima da bi postojala šansa da jednačina bude relativistički kovarijantna. Krenućemo od

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi , \quad (2.2.10)$$

gde je H hamiltonijan. Dirak je prepostavio da Hamiltonian ima oblik

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 , \quad (2.2.11)$$

gde su $\boldsymbol{\alpha}$ i β kvadratne $N \times N$ matrice, a talasna funkcija, spinor $\psi(x)$,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix} ,$$

kolona. Zamenjujući impuls po principu korespondencije, dobijamo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + mc^2\beta) \psi . \quad (2.2.12)$$

Matrice α_i i β ćemo odrediti na osnovu zahteva da svako rešenje Dirakove jednačine mora da zadovoljava Klajn-Gordonovu jednačinu, odnosno da ravnii talasi zadovoljavaju disperzionu relaciju za slobodnu česticu $p_\mu p^\mu = m^2c^2$. Delovanjem sa $i \frac{\partial}{\partial t}$ na (2.2.12) dobijamo

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j - i\hbar(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + m^2 c^4 \beta^2) \psi .$$

Član koji je kvadratan po prostornim koordinatama možemo da prepišemo u obliku

$$\alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \partial_i \partial_j$$

i ovaj član mora da nam da laplasijan. Onda je očigledno da je

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} . \quad (2.2.13)$$

Član koji je linearan po prostornom izvodu mora da bude nula, tj.

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 , \quad (2.2.14)$$

i konačno, poslednji uslov je

$$\beta^2 = 1 . \quad (2.2.15)$$

Dakle, da bismo dobili da talasna funkcija zadovoljava Klajn-Gordonovu jednačinu

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(x) = 0$$

moraju biti zadovoljeni uslovi (2.2.13-2.2.15).

Hamiltonian (2.2.11) mora da bude hermitski, što znači da su matrice α_i i β hermitske. Dalje, iz (2.2.13) sledi da je i kvadrat α -matrica jednak jedinici, $\alpha_i^2 = 1$. Zato su svojstvene vrednosti matrica α_i i β , ± 1 . Uzimanjem traga matrice α_i , uz primenu cikličnosti traga, imamo

$$\text{tr } \alpha_i = \text{tr}(\alpha_i \beta^2) = \text{tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{tr}(\beta^2 \alpha_i) = -\text{tr } \alpha_i \quad (2.2.16)$$

Iz ovog izraza zaključujemo da je $\text{tr}(\alpha_i) = 0$. Slično, iz (2.2.14) sledi da je $\beta = -\alpha_i \beta \alpha_i$ (bez sumiranja po indeksu i). Uzimanjem traga ovog izraza, dobijamo da je i $\text{tr } \beta = 0$. Pošto su svojstvene vrednosti matrica α_i i β jednakе ± 1 a trag im je nula, zaključujemo da matrice moraju biti parno-dimenzionalne. Kako ne postoje četiri antikomutirajuće matrice dimenzije 2×2 , zaključujemo da je 4×4 najniže dimenziona reprezentacija ovih matrica¹. Jedno konkretno rešenje gornjih jednačina je

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.17)$$

gde je $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a σ_i su Paulijeve matrice. Ova reprezentacija je poznata kao Dirakova ili standardna reprezentacija; u nastavku ćemo videti da se sve ostale reprezentacije dobijaju iz nje transformacijama sličnosti.

2.2.1 Prirodni sistem jedinica

Fundamentalne konstante u kvantnoj relativističkoj fizici su brzina svetlosti $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ i Plankova konstanta $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Dimenzije brzine svetlosti i Plankove konstante su

$$[c] = LT^{-1}, \quad [\hbar] = ML^2T^{-1}, \quad (2.2.18)$$

gde su L , T , M dimenzije dužine, vremena i mase, redom. U fizici visokih energija se koristi *prirodni sistem jedinica*, u kome se uzima da su brzina svetlosti i Plankova konstanta jednakе 1. U ovom sistemu postoji samo jedna dimenziona veličina,

$$L = T = \frac{1}{M}, \quad (2.2.19)$$

tj. sve mehaničke opservable možemo da izrazimo u masenim dimenzijama.

Klajn-Gordonova i Dirakova jednačina u prirodnom sistemu jedinica imaju prostiji oblik

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0, \quad (2.2.20)$$

odnosno

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\alpha_i \partial_i \psi - \beta m \psi = 0. \quad (2.2.21)$$

Povratak na SI sistem jedinica je lak: ilustrujmo ga na primeru Klajn-Gordonove jednačine. Da bismo od jednačine (2.2.20) dobili (2.1.3), potrebno je da m^2 zamenimo sa $m^2 \hbar^a c^b$. Pošto ovaj član mora imati istu dimenziju kao \square , $[\square] = L^{-2}$, lako nalazimo da je $a = -2$, $b = 2$. U nastavku ćemo koristiti prirodni sistem jedinica.

¹Kada je masa čestice nula, $m = 0$, ne uvodi se β : tada imamo samo relaciju (2.2.13) koju zadovoljavaju Paulijeve matrice.

2.2.2 Kovariantni zapis Dirakove jednačine

Ako Dirakovu jednačinu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\alpha_i \partial_i \psi - \beta m \psi = 0 \quad (2.2.22)$$

pomnožimo matricom β sa leva i uvedimo oznake $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta \alpha_i$, dobijemo

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m)\psi(x) = 0 . \quad (2.2.23)$$

Ako od ove četiri γ -matrice formiramo četvorovektor $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$, gde je μ Lorencov indeks, Dirakova jednačina dobija kompaktan oblik

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 . \quad (2.2.24)$$

Ovaj oblik Dirakove jednačine sugerije njenu kovariantnost, a da je γ^μ vektor ćemo dokazati kasnije. Kontrakcija γ -matrica sa proizvoljnim četvorovektorom a^μ obeležava se sa $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$, i naziva naziva Fajnmanov ‘sleš’. Dirakovu jednačinu prepisujemo kao

$$(i\not{a} - m)\psi(x) = 0 . \quad (2.2.25)$$

2.2.3 γ -matrice

Odredimo antikomutator izmedju γ -matrica. Imamo

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = \{\beta, \beta\} = 2 . \quad (2.2.26)$$

Antikomutator izmedju γ^0 i matrica sa prostornim indeksom, γ^i je

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \{\beta, \beta \alpha_i\} = \beta^2 \alpha_i + \beta \alpha_i \beta = 0 . \quad (2.2.27)$$

Konačno,

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \{\beta \alpha_i, \beta \alpha_j\} = -\{\alpha_i, \alpha_j\} = -2\delta_{ij} . \quad (2.2.28)$$

Ove antikomutacione relacije možemo da zapišemo u kompaktnoj formi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.2.29)$$

i one su alternativni način da se definišu γ -matrice. U Dirakovoj reprezentaciji imamo

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.2.30)$$

Pored Dirakove reprezentacije često se koristi Vajlova ili kiralna reprezentacija. U toj reprezentaciji γ -matrice su

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.2.31)$$

Izbor γ -matrica nije jednoznačan. Prepostavimo da su dva skupa matrica $\{\gamma^\mu\}$ i $\{\gamma'^\mu\}$ povezana transformacijom sličnosti,

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad (2.2.32)$$

i da γ^μ zadovoljavaju antikomutacione relacije (2.2.29). Onda se lako vidi da relacije (2.2.29) zadovoljavaju i γ'^μ . U četvorodimenzionom prostor-vremenu važi i obrnuto: rešenje jednačina (2.2.29) je, do na transformacije sličnosti, jedinstveno. Ovaj iskaz zove se Paulijeva fundamentalna teorema i dokazaćemo je kasnije, kad se bolje upoznamo sa algebrrom γ -matrica.

Ako u (2.2.29) stavimo $\mu = \nu = 0$ dobijamo $(\gamma^0)^2 = 1$. Slično, ako uzmemo da je $\mu = \nu = i$ imamo $(\gamma^i)^2 = -1$. U poslednjoj formuli nema sumiranja po indeksu i . Kako je $\gamma_1 = -\gamma^1$, $\gamma_2 = -\gamma^2$, $\gamma_3 = -\gamma^3$ to je

$$\gamma^1\gamma_1 = \gamma^2\gamma_2 = \gamma^3\gamma_3 = 1.$$

Matrica γ_μ je inverzna odgovarajućoj matrici sa gornjim indeksom γ^μ , pa je $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$. Pored ovog identiteta postoji još mnogo identiteta sa kontarakcijama, na primer

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta}, \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Odredimo sada adjungovanu matricu matrice γ^μ . Lako se vidi da je

$$\gamma^{0\dagger} = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i.$$

Matrica γ^0 je hermitska, dok su preostale tri gama-matrice antihermitske. Kompaktno, ovaj uslov se može zapisati kao

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

Ako zahtevamo da je ovaj uslov ispunjen u svakoj reprezentaciji γ -matrica, vidimo da matrica S koja povezuje reprezentacije mora biti unitarna.

Matrica γ^5 je definisana sa $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Ona antikomutira sa γ^μ ,

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.2.34)$$

a njen kvadrat γ^5 je jednak jedinici, $(\gamma^5)^2 = 1$, pa je inverzna matrica, $\gamma_5 = \gamma^5$. Lako se nalazi da u Dirakovoј reprezentaciji

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.35)$$

dok je u Vajlovoj reprezentaciji ova matrica dijagonalna,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (2.2.36)$$

Uzimanjem traga (2.2.29) dobijamo

$$\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (2.2.37)$$

a često ćemo koristiti sledeće identitete sa tragovima gama-matrica:

$$\begin{aligned}\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) , \\ \text{tr}\gamma_5 &= 0 , \\ \text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) &= 0 , \\ \text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} .\end{aligned}\tag{2.2.38}$$

Trag neparnog broja gama matrica je jednak nuli. Svi ovi identiteti su pokazani u Zbirci.

2.2.4 Gustina struje i gustina verovatnoće

Hermitskim adjungovanjem Dirakove jednačine dobijamo

$$-i(\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = -i(\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger = 0.$$

Ako Dirakov adjungovani spinor $\bar{\psi}$ definišemo sa

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 ,\tag{2.2.39}$$

adjungovana jednačina ima oblik

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0 .\tag{2.2.40}$$

Strelica iznad izvoda u poslednjoj jednačini označava da on deluje na levu stranu, tj.

$$\bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu .$$

Dirakovu jednačinu (2.2.24) ćemo pomnožiti sa leve strane sa $\bar{\psi}$, a adjungovanu jednačinu (2.2.40) sa desne strane sa ψ . Ako dobijene jednačine oduzmemos, dobijamo jednačinu kontinuiteta,

$$\partial_\mu(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 .\tag{2.2.41}$$

Veličina $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ je gustina održane četvorostruje. Njena nulta komponenta je je gustina verovatnoće,

$$j^0 = \rho = \psi^\dagger \psi ,$$

dok je gustina struje

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \gamma \psi = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi .$$

Lako se vidi da je gustina verovatnoće pozitivno definitna. Kao i u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, jednačina kontinuiteta znači održanje norme talasne funkcije. Primenujući Grinovu teoremu, dobijamo

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = - \oint (\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi) \cdot d\mathbf{S} = 0 .\tag{2.2.42}$$

Površinski integral u poslednjoj formuli je nula jer na granici prostora, tj. u asimptotskoj oblasti, talasna funkcija mora da teži nuli (da bi bila kvadratno integrabilna).

Iz gornjih osobina izgleda da je statistička interpretacija talasne funkcije slična kao u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, tj. korektna; kasnije ćemo u primerima videti neke nesaglasnosti.

Glava 3

Kovarijantnost Dirakove jednačine

3.1 Spinorska reprezentacija

U ovom poglavlju pokazaćemo da je Dirakova jednačina relativistički kovarijantna, da važi u svim inercijalnim sistemima. Neka je $\psi(x)$ Dirakov spinor tj. talasna funkcija u inercijalnom sistemu S . Ona je rešenje Dirakove jednačine

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi(x) = 0 . \quad (3.1.1)$$

Kovarijantnost znači da, ako inercijalni sistem S transformišemo Lorencovom transformacijom (rotacijom ili bustom) u inercijalni sistem S' ,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu , \quad (3.1.2)$$

postoji i transformacija koja preslikava talasnu funkciju, odnosno rešenje Dirakove jednačine $\psi(x)$ u sistemu S u rešenje $\psi'(x')$ u sistemu S' ,

$$(i\cancel{\partial}' - m) \psi'(x') = 0 . \quad (3.1.3)$$

Dokaz kovarijantnosti može da se izvede konstrukcijom: potrebno je da nađemo vezu između početne i transformisane talasne funkcije¹. Pretpostavićemo da je ona oblika

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) . \quad (3.1.4)$$

Matrica $S(\Lambda)$ predstavlja reprezentaciju Lorencove transformacije Λ u prostoru 4×4 matrica, i treba daje odredimo. Zamenom (3.1.4) u (3.1.3), uz zakon transformacije parcijalnog izvoda

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$$

dobijamo

$$\left(iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0 . \quad (3.1.5)$$

¹Ova veza daje reprezentaciju Lorencove odnosno Poenkareove grupe u odgovarajućem prostoru funkcija.

Poređenjem ove jednačine sa Dirakovom jednačinom u sistemu S (3.1.1), dobijamo uslov

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \gamma^\mu , \quad (3.1.6)$$

odnosno

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.1.7)$$

koji treba da rešimo po $S(\Lambda)$. Pre nego što nađemo njegovo rešenje, recimo da, ako su γ^μ gama-matrice, onda i $\gamma^\mu = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ čine skup gama-matrica, jer zadovoljavaju antikomutacione relacije (2.2.29). Matrica Lorencove transformacije $S(\Lambda)$ igra ulogu matrice sličnosti koja, po fundamentalnoj Paulijevoj teoremi, povezuje dva skupa gama-matrica.

Rešenje jednačine (3.1.7) je oblika

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + o(\omega^2) , \quad (3.1.8)$$

gde su $M_{\mu\nu}$ generatori grupe u datoј reprezentaciji. Za infinitezimalne transformacije uslov (3.1.7) daje

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)\gamma^\nu , \quad (3.1.9)$$

odnosno

$$\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - g^{\mu\sigma}\gamma^\rho) . \quad (3.1.10)$$

Član koji množi Lorencove parametre sa desne strane jednačine smo antisimetrizovali, jer je $\omega_{\rho\sigma}$ antisimetričan. Konačno dobijamo

$$[M^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = -i(g^{\mu\rho}\gamma^\sigma - g^{\mu\sigma}\gamma^\rho) . \quad (3.1.11)$$

Rešenje gornje jednačine je

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} , \quad (3.1.12)$$

gde su $\sigma_{\mu\nu}$ definisane sa

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] . \quad (3.1.13)$$

Pokažimo da je (3.1.12) zaista rešenje. Primenjujući identitet $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$, imamo

$$[M^{\rho\sigma}, \gamma^\mu] = \frac{i}{4}[\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho, \gamma^\mu] = \frac{i}{4}\left(\gamma^\rho\{\gamma^\sigma, \gamma^\mu\} - \{\gamma^\rho, \gamma^\mu\}\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\{\gamma^\rho, \gamma^\mu\} + \{\gamma^\sigma, \gamma^\mu\}\gamma^\rho\right) ,$$

pa koristeći (2.2.29) dobijamo (3.1.11). Dakle, matrica Lorencove transformacije u spinorskoj reprezentaciji je

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} , \quad (3.1.14)$$

a matrice $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ su generatori Lorencovih transformacija.

3.1.1 Matrice $\sigma_{\mu\nu}$

Na osnovu definicije σ -matrica sledi da je $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$. Adjungovanjem matrice $\sigma_{\mu\nu}$ dobijamo

$$(\sigma_{\mu\nu})^\dagger = -\frac{i}{2}(\gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu^\dagger) , \quad (3.1.15)$$

pa, primenjujući (2.2.3), sledi

$$(\sigma_{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \gamma^0 . \quad (3.1.16)$$

Nadimo sada eksplicitan oblik σ -matrica u Dirakovoj reprezentaciji γ -matrica. Za $\mu = i$ i $\nu = j$ imamo

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}(\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} . \quad (3.1.17)$$

Dakle,

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{13} = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{23} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} . \quad (3.1.18)$$

Lako se vidi da su ove matrice hermitske, $(\sigma^{ij})^\dagger = \sigma^{ij}$. Od matrica σ^{ij} možemo konstruisati vektor,

$$\Sigma_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{ij} , \quad (3.1.19)$$

odnosno

$$\Sigma = \frac{i}{2} \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} . \quad (3.1.20)$$

Generatori $\frac{1}{2} \sigma^{ij}$, odnosno $\frac{1}{2} \Sigma_i$ su generatori rotacija², i daju operator spina. Lako se vidi da je kvadrat

$$\left(\frac{\Sigma}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \mathbb{I} , \quad (3.1.21)$$

odakle zaključujemo da je spin Dirakove čestice $1/2$.

Za $\mu = 0$ i $\nu = i$, u Dirakovoj reprezentaciji γ -matrica dobijamo

$$\sigma^{0i} = i \sigma^0 \sigma^i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.1.22)$$

Matrice σ^{0i} su antihermitske, $(\sigma^{0i})^\dagger = -\sigma^{0i}$.

²Preciznije, generatori rotacije u sistemu mirovanja.

3.1.2 Lorencove transformacije u spinorskoj reprezentaciji

Odredićemo matrice $S(\Lambda)$ u Dirakovoј reprezentaciji γ -matrica: analiziraćemo rotacije i bustove zasebno. Iz (3.1.14) za rotacije imamo

$$S_R = e^{-\frac{i}{4}\omega^{ij}\sigma_{ij}} \quad (3.1.23)$$

$$-\frac{i}{4}\omega^{ij}\sigma_{ij} = -\frac{i}{4}\omega^{ij}\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\theta_k\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad (3.1.24)$$

pa je matrica rotacije

$$S_R = \exp\begin{pmatrix} \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{pmatrix}. \quad (3.1.25)$$

Matrica rotacije je unitarna, $S_RS_R^\dagger = \mathbb{I}$. Takođe, iz ovog izraza vidimo da je rotacija za ugao $\theta = 2\pi$ reprezentovana sa $S_R = -\mathbb{I}$: pri rotaciji za 2π Dirakova talasna funkcija menja znak, $\psi' = -\psi$. Takvi objekti su spinori.

Nadimo sada bust u spinorskoj reprezentaciji,

$$S_B = e^{-\frac{i}{2}\omega^{0i}\sigma_{0i}}. \quad (3.1.26)$$

Ako se primovani sistem kreće brzinom $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ u pravcu \mathbf{n} , $\mathbf{n}^2 = 1$, parametar busta dat je sa $\omega_{0i} = \varphi_i = \varphi n_i$ gde je $\varphi = \operatorname{arctanh} v$. Za matricu busta imamo

$$S_B = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \varphi\mathbf{n} \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \varphi\mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.27)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \mathbb{I}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.28)$$

pa razvijanjem eksponencijalne funkcije u izrazu za S_B u red dobijamo

$$S_B = \cosh\frac{\varphi}{2}\mathbb{I} - \sinh\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.29)$$

Matrica busta u spinorskoj reprezentaciji (3.1.29) nije unitarna nego je hermitska: bustovi su reprezentovani hermitskim matricama i u definicijoj (prirodnoj) reprezentaciji, (1.2.19), koja je četvorodimenzionala kao i spinorska reprezentacija. (To je posledica nekompaktnosti Lorencove grupe: sve unitarne reprezentacije su beskonačnodimenzione.) Međutim, ove dve reprezentacije nisu ekvivalentne: pre svega, spinorska reprezentacija je dvoznačna, za razliku od prirodne. Sem toga, determinanta generatora rotacija i bustova je nula u prirodnoj, a jedinica u spinorskoj reprezentaciji, tj. različite su. Prirodna reprezentacija je tenzorska i definiše transformaciju komponenti vektorskog polja $V^\mu(x)$, dok se po spinorskoj reprezentaciji transformišu Dirakovi spinori.

3.2 Γ -matrice, Klifordova algebra

γ -matrice zadovoljavaju antikomutacione relacije (2.2.29): množenje ovih matrica, uz primenu antikomutacionih relacija, daje algebru. Ta algebra poznata je kao Klifordova algebra, γ^μ su njeni generatori. U principu, Klifordova algebra definisana je, jednačinom (2.2.29), u proizvoljnem broju dimenzija, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d - 1$, i za proizvoljnu signaturu ravne metrike: mi ćemo proanalizirati neke osobine ove algebri na prostoru Minkovskog.

Algebru čini jedinična matrica, četiri γ^μ matrice i njihovi medjusobni proizvodi. Kako se, zbog antikomutacionih relacija (2.2.29), njihovi simetrični proizvodi redukuju na brojeve, novi elementi u algebri su samo antisimetrični proizvodi γ^μ matrica. Lako se vidi, to su svi proizvodi dve, tri i četiri (različite) γ -matrice. Jednu pogodnu bazu Klifordove algebri čine matrice Γ^a koje pripadaju skupu

$$\Gamma^a \in \{\mathbb{I}, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\} . \quad (3.2.30)$$

Ima ih ukupno 16, kolika je i dimenzija linearног prostora 4×4 matrica. Njihove najvažnije osobine, pomoću kojih se dokazuje linerna nezavisnost matrica Γ^a , su:

1. Kvadrat svake od Γ -matrica je $\pm \mathbb{I}$. Ovo se neposredno proverava, npr.

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}, \quad (\gamma^1)^2 = -\mathbb{I}, \quad (\sigma^{01})^2 = -\mathbb{I} .$$

2. Za svaku matricu Γ^a , osim jedinične, postoji matrica Γ^b koja sa njom antikomutira. I ovo se lako proverava neposredno.

3. Proizvod bilo koje dve matrice iz skupa $\{\Gamma^a\}$ je ponovo matrica iz tog skupa, do na faktor ± 1 ili $\pm i$.

4. Trag Γ -matrica je

$$\text{tr } \Gamma^a = \begin{cases} 0, & \text{za } \Gamma^a \neq \mathbb{I} \\ 4, & \text{za } \Gamma^a = \mathbb{I} \end{cases} . \quad (3.2.31)$$

Ovo se lako pokazuje. Neka je $\Gamma^a \neq \mathbb{I}$, i neka je Γ^b matrica koja sa njom antikomutira. Tada je

$$\text{tr } \Gamma^a = \pm \text{tr } \Gamma^a (\Gamma^b)^2 = \pm \text{tr } \Gamma^b \Gamma^a \Gamma^b = \mp \text{tr } \Gamma^a (\Gamma^b)^2 = -\text{tr } \Gamma^a . \quad (3.2.32)$$

U prvom koraku smo primenili cikličnost matrica pod tragom. Razume se, iz $\text{tr } \Gamma^a = -\text{tr } \Gamma^a$ sledi da je $\text{tr } \Gamma^a = 0$.

5. Lema preuređenja: kada skup matrica Γ^a pomnožimo jednom od ovih matrica, opet dobijamo skup Γ^a matrica.

6. Skup Γ -matrica je linearno nezavisno i čini bazu. Proizvoljna kompleksna 4×4 matrica M može se razložiti po Γ -matricama

$$M = \sum_a c_a \Gamma^a , \quad (3.2.33)$$

gde su koeficijenti c_a dati sa

$$c_a = \frac{1}{4} \text{tr } M \Gamma_a , \quad (3.2.34)$$

gde je $\Gamma_a = (\Gamma^a)^{-1}$. Dokaz je dat u zadatku 3.12.

3.3 Bilinearne kovarijantne veličine

Videli smo da se pri Lorencovoj transformaciji $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ Dirakova talasna funkcija transformiše po zakonu $\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$. Sličan zakon važi i za transformacije Poenkareove grupe: za

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a \quad (3.3.35)$$

imamo

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x), \quad \psi'(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (3.3.36)$$

Spinorska reprezentacija $S(\Lambda)$ Lorencove grupe koju smo analizirali,

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} \quad (3.3.37)$$

nije unitarna, tj. $S^{-1}(\Lambda) \neq S^\dagger(\Lambda)$. Međutim, važi

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0. \quad (3.3.38)$$

Ovo se lako pokazuje. Sa jedne strane,

$$S^{-1}(\Lambda) = e^{\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}}, \quad (3.3.39)$$

dok je

$$S^\dagger(\Lambda) = e^{\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^\dagger} \quad (3.3.40)$$

pošto su $\omega^{\mu\nu}$ realni parametri. Za adjungovanu matricu $\sigma_{\mu\nu}$ važi (3.1.16), pa razvojem eksponentijalne funkcije u red dobijamo

$$S^\dagger(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \gamma^0 \right)^k = \gamma^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)^k \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \gamma^0, \quad (3.3.41)$$

pri čemu smo koristili da je $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$, što dokazuje (3.3.38).

Dokazana relacija daje nam transformacione osobine $\bar{\psi}(x)$. Naime, imamo

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x') \gamma^0 = \psi^\dagger(x') S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \psi^\dagger(x') \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = \bar{\psi}(x') S^{-1}(\Lambda), \quad (3.3.42)$$

odnosno, $\bar{\psi}(x)$ se transformiše po inverznoj reprezentaciji. Zbog toga je veličina $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ invarijantna na Lorenc-ove transformacije,

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\psi'(x') \quad (3.3.43)$$

Sa druge strane, matrice γ^μ se transformišu kao komponente vektora u prirodnoj reprezentaciji,

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.3.44)$$

pa imamo

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu \psi'(x') = \bar{\psi}(x') S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \psi(x) = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x). \quad (3.3.45)$$

Drugim rečima, $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x)$ je četvorostruha, tj. struha verovatnoće koju smo ranije uveli: $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$ je gustina verovatnoće a $j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi$ fluks verovatnoće. Slično, kada uvedemo kako se u spinorskoj reprezentaciji reprezentuje parnost, videćemo da je $\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)$ pseudoskalar, a $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$, aksijalna struha.

Glava 4

Rešenja slobodne Dirakove jednačine

Dirakova jednačina je parcijalna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima, pa su njena partikularna rešenja eksponencijalne funkcije. Prepostavimo rešenje u obliku ravnog talasa,

$$\psi(x) = e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.0.1)$$

gde su φ i χ dvokomponentne spinorske amplitude (konstantne 1×2 kolone), a E i \mathbf{p} energija i impuls čestice. Zamenom (4.0.1) u Dirakovu jednačinu

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \psi(x) = 0 \quad (4.0.2)$$

u Dirakovoj reprezentaciji γ -matrica dobijamo

$$\begin{pmatrix} E - m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (4.0.3)$$

Sistem jednačina (4.0.3) je homogen i ima netrivialna rešenja ako i samo ako mu je determinanta jednaka nuli. Taj uslov daje disperzionu relaciju

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_p.$$

Gornja jednačina nam pokazuje da energija slobodne čestice može da bude pozitivna i negativna. Pojava negativno-energetskih rešenja je osobenost relativističke kvantne fizike.

4.1 Slobodna čestica u sistemu mirovanja

U sistemu mirovanja impuls čestice je $\mathbf{p} = 0$, pa se Dirakova jednačina svodi na

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = m\psi \quad (4.1.4)$$

Odgovarajuće rešenje ima oblik

$$\psi^{(0)}(t) = e^{-iEt} \omega^r(0) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

pa zamenom u jednačinu (4.1.4) dobijamo

$$\begin{aligned}(E - m)\varphi &= 0 \\ (E + m)\chi &= 0.\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

Za pozitivnu vrednost energije, $E = m$, dobijamo da je $\chi = 0$. Prema tome, rešenje ima oblik

$$\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

odnosno imamo dva linearne nezavisna rešenja,

$$\psi^{(1)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Za $E = -m$, iz jednačina (4.1.6) sledi $\varphi = 0$, pa je rešenje oblika

$$\psi = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.1.9)$$

tj. linearne nezavisne negativno-energetske rešenja u sistemu mirovanja su

$$\psi^{(3)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Rešenja u sistemu mirovanja možemo da zapišemo u kompaktnom obliku

$$\psi^{(r)} = e^{-i\epsilon_r mt} \omega^{(r)}(0), \quad (4.1.11)$$

gde indeks $r = 1, \dots, 4$, a ϵ_r označava znak energije,

$$\epsilon_r = \begin{cases} 1, & \text{za } r = 1, 2 \\ -1, & \text{za } r = 3, 4 \end{cases}.$$

ϵ_r je invariјantno na ortohrone Lorencove transformacije L_+^\uparrow i L_-^\uparrow .

Dopunska klasifikacija pozitivno odnosno negativno-energetskih stanja dolazi od spina. Dirakov hamiltonijan u sistemu mirovanja, $H = m\gamma^0$, komutira sa projekcijom spina na proizvoljan pravac $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$, pa vrednost projekcije spina možemo koristiti kao dodatni kvantni broj. Od četiri gore uvedena stanja, pozitivno-energetsko $\psi^{(1)}$ i negativno-energetsko $\psi^{(3)}$ su svojstvena stanja z -projekcije spina sa svojstvenom vrednošću $+\frac{1}{2}$, a $\psi^{(2)}$ i $\psi^{(4)}$ su svojstvena stanja od $\frac{1}{2}\Sigma_3$ sa svojstvenom vrednošću $-\frac{1}{2}$.

4.2 Slobodna čestica u proizvoljnom inercijalnom sistemu

Talasnu funkciju čestice koja se kreće brzinom \mathbf{v} odnosno ima impuls \mathbf{p} možemo dobiti tako što transformišemo talasnu funkciju izračunatu u sistemu mirovanja $\psi^{(0)}$, u inercijalni sistem koji se kreće brzinom $-\mathbf{v}$,

$$\psi(x) = S_B(\Lambda^{-1}) \psi^{(0)}(\Lambda x), \quad (4.2.12)$$

gde je $\Lambda(-\mathbf{p}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{p})$. Ekvivalentno, može da se reši Dirakova jednačina za opšti ravan talas, (4.0.1).

Izraz za bust smo ranije našli, (3.1.29). Za $\tanh \varphi = v$ imamo $\cosh \varphi = \frac{E_p}{m}$,

$$\cosh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cosh \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}}, \quad \sinh \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cosh \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{E_p - m}{2m}}, \quad (4.2.13)$$

pa matrica busta postaje

$$S_B(\Lambda) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \\ -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (4.2.14)$$

Sa druge strane, kada argument u eksponencijalnoj funkciji transformišemo iz sistema mirovanja u pokretni sistem, imamo

$$\epsilon_r mt \rightarrow \epsilon_r p_\mu x^\mu \quad (4.2.15)$$

jer je proizvod $p_\mu x^\mu$ invarijantan na Lorencove transformacije, pa ukupno

$$\psi^{(r)}(x) = e^{-i\epsilon_r p_\mu x^\mu} \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \omega^{(r)}(0) \quad (4.2.16)$$

Konkretno, imamo

$$\psi^{(1)} = e^{-ip_\mu x^\mu} \omega^{(1)}(\mathbf{p}) = e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.2.17)$$

$$\psi^{(2)} = e^{-ip_\mu x^\mu} \omega^{(2)}(\mathbf{p}) = e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.2.18)$$

$$\psi^{(3)} = e^{ip_\mu x^\mu} \omega^{(3)}(\mathbf{p}) = e^{i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.2.19)$$

$$\psi^{(4)} = e^{ip_\mu x^\mu} \omega^{(4)}(\mathbf{p}) = e^{i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (4.2.20)$$

Pozitivno-energetske spinorske amplitude $\omega^{(r)}(\mathbf{p})$, $r = 1, 2$, standardno se obeležavaju sa $u(\mathbf{p})$,

$$u_1(\mathbf{p}) = \omega^{(1)}(\mathbf{p}) , \quad u_2(\mathbf{p}) = \omega^{(2)}(\mathbf{p}) , \quad (4.2.21)$$

a negativno-energetski spinori $\omega^{(r)}(\mathbf{p})$, $r = 3, 4$ se obeležavaju sa $v(\mathbf{p})$,

$$v_1(\mathbf{p}) = \omega^{(4)}(\mathbf{p}) , \quad v_2(\mathbf{p}) = \omega^{(3)}(\mathbf{p}) . \quad (4.2.22)$$

Indeks r odgovara spinu odnosno polarizaciji rešenja. Dakle imamo dve klase rešenja: pozitivno-energetska $u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}$ i negativno-energetska $v(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}$. Energija stanja $u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}$ je E_p a impuls \mathbf{p} , dok je energija rešenja $v(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}$ jednaka $-E_p$ a impuls $-\mathbf{p}$. Spinori $u(\mathbf{p})$ i $v(\mathbf{p})$ zadovoljavaju Dirakovu jednačinu u impulsnom prostoru:

$$(\not{p} - m) u(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.2.23)$$

$$(\not{p} + m) v(\mathbf{p}) = 0 . \quad (4.2.24)$$

4.3 Normalizacija stanja, kompletност, projektori energije

Zamenom izraza za $u_1(\mathbf{p})$ dobijamo

$$u_1^\dagger(\mathbf{p}) u_1(\mathbf{p}) = \frac{E_p + m}{2m} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} . \quad (4.3.25)$$

Eksplicitnim računom dobijamo

$$u_1^\dagger(\mathbf{p}) u_1(\mathbf{p}) = \frac{E_p}{m} . \quad (4.3.26)$$

Slično se nalaze i ostale relacije normalizacije Dirakovih spinora. Rezultat je

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) &= \frac{E_p}{m} \delta_{rs} , \\ v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= \frac{E_p}{m} \delta_{rs} , \\ u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Ako umesto hermitski adjungovanog spinora koristimo ‘bar’ spinore, relacije normalizacije imaju oblik

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) &= -\bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} , \\ \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = 0 . \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Normalizacija spinora koju smo dobili je posledica normalizacije koju smo izabrali u sistemu mirovanja. U literaturi se koriste i druge normalizacije.

Spinorske amplitude zadovoljavaju relaciju kompletnosti:

$$\sum_{r=1}^2 \left(u_r(\mathbf{p})\bar{u}(\mathbf{p}) - v_r(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p}) \right) = \mathbb{I}, \quad (4.3.29)$$

odnosno, rešenja $u_r(\mathbf{p})$ i $v_r(\mathbf{p})$ razapinju jedinicu. Projektor na pozitivno-energetska rešenja označava se sa $\Lambda_+(\mathbf{p})$,

$$\sum_{r=1}^2 u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} = \Lambda_+(\mathbf{p}), \quad (4.3.30)$$

a projektor na negativno-energetska rešenja sa $\Lambda_-(\mathbf{p})$,

$$-\sum_{r=1}^2 v_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p}) = -\frac{\not{p} - m}{2m} = \Lambda_-(\mathbf{p}). \quad (4.3.31)$$

Iz osobina spinorskih amplituda vidi se da je

$$\begin{aligned} \Lambda_+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), & \Lambda_+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Lambda_-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}), & \Lambda_-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Lako se pokazuje da su ovi operatori idempotentni,

$$(\Lambda_+(\mathbf{p}))^2 = \Lambda_+(\mathbf{p}), \quad (\Lambda_-(\mathbf{p}))^2 = \Lambda_+(\mathbf{p}), \quad (4.3.33)$$

međutim, oni nisu hermitski.

4.4 Ukupni ugaoni moment Dirakove čestice

Pri Lorencovim transformacijama talasna funkcija $\psi(x)$ transformiše se prema formuli (3.1.14). Infinitezimalna razlika nove talasne funkcije u novim koordinatama i stare talasne funkcije u starim koordinatama,

$$\delta\psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) \quad (4.4.34)$$

naziva se *totalnom varijacijom*. Konkretno, za Dirakov spinor imamo

$$\delta\psi(x) = -\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \psi(x). \quad (4.4.35)$$

Da bismo odredili ukupni ugaoni moment Dirakove čestice definisaćemo *varijaciju forme* talasne funkcije, δ_0 . Ona je jednaka razlici nove i stare talasne funkcije u istom koordinatnom sistemu,

$$\delta_0\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x). \quad (4.4.36)$$

Ako se izraz za totalnu varijaciju (4.4.35) prepiše kao

$$\delta\psi = \psi'(x') - \psi(x') + \psi(x') - \psi(x), \quad (4.4.37)$$

koristeći da je $\psi(x') - \psi(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x)$, dobijamo da je $\delta\psi(x) = \delta_0\psi(x') + \partial_\mu \psi \delta x^\mu$, odnosno

$$\delta\psi(x) = \delta_0\psi(x) + \partial_\mu \psi \delta x^\mu. \quad (4.4.38)$$

U poslednjem koraku umesto koordinata x' napisali smo x , jer računamo u prvom redu po x .

Za Lorencove transformacije infinitezimalna promena koordinata je $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$. Primenom (4.4.38) i (4.4.35) nalazimo varijaciju forme Dirakovog spinora

$$\delta_0\psi = \left(-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \right) \psi. \quad (4.4.39)$$

Pošto su parametri Lorencovih transformacija antisimetrični na zamenu indeksa, treba da antisimetrizujemo i $x_\nu \partial_\mu$ u drugom članu. Tako dobijamo

$$\delta_0\psi = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \left(i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right) \psi. \quad (4.4.40)$$

Izraz u zagradi je generator Lorencovih transformacija,

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}. \quad (4.4.41)$$

On se sastoji od dva dela. Prvi sabirak zavisi od koordinata, a drugi je spinski deo generatora. Za rotacije je $\omega_{0i} = 0$, $\omega_{ij} \neq 0$, pa je varijacija forme Dirakovog spinora

$$\delta_0\psi = -\frac{i}{2} \omega^{ij} \left(i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \right) \psi. \quad (4.4.42)$$

Ako uvedemo uglove rotacija, $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk} \theta_k$, gornji izraz postaje

$$\delta_0\psi = \frac{i}{2} \theta_k \left(-i(\mathbf{r} \times \nabla)_k + \frac{1}{2} \Sigma_k \right) \psi = \frac{i}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} \psi. \quad (4.4.43)$$

Ukupni ugaoni moment je generator rotacija i dat je sa

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}. \quad (4.4.44)$$

Prvi sabirak je orbitalni deo, a drugi je spin. U Dirakovoj reprezentaciji γ -matrica operator spina je

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.4.45)$$

Već smo rekli da je kvadrat ove matrice $3/4$, što znači da je spin Dirakove čestice $1/2$.

Komutator orbitalnog momenta sa Dirakovim hamiltonijanom H_D je

$$[L_i, H_D] = i\epsilon_{ijk} \alpha^j p^k. \quad (4.4.46)$$

Komutator spina sa hamiltonijanom se lako nalazi,

$$\frac{1}{2}[\Sigma_i, H_D] = -i\epsilon_{ijk}\alpha^j p^k . \quad (4.4.47)$$

Vidimo da orbitalni i spinski ugaoni momenti pojedinačno ne komutiraju sa hamiltonijanom, ali njihov zbir komutira. Ukupni ugaoni moment je konstanta kretanja za slobodnu česticu. Pored ukupnog ugaonog momenta, operator heliciteta

$$\Lambda_p = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (4.4.48)$$

konstanta kretanja. Ovaj operator je projekcija spina na pravac kretanja Dirakove čestice.

U sistemu mirovanja orbitni ugaoni moment je nula, i može da se definiše polarizacija čestice. Kvadrat spina i jedna komponenta spina komutiraju sa hamiltonijanom i međusobno: izabraćemo komponentu spina duž orta \mathbf{n} . Svojstvene vrednosti operatora $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$ su $\pm 1/2$. Talasna funkcija pozitivno-energetskog elektrona impulsa \mathbf{p} je

$$\psi(x) = u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} , \quad u_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \varphi_r \end{pmatrix} . \quad (4.4.49)$$

Uslov da je ovaj spinor u sistemu mirovanja svojstveno stanje projekcije spina na pravac \mathbf{n} ,

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} u_r(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{r+1}}{2} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.50)$$

implicira da dvokomponentni spinori φ_r zadovoljavaju jednačinu

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi_r = (-1)^{r+1} \varphi_r . \quad (4.4.51)$$

Ako sa n_i označimo komponente orta \mathbf{n} dobijamo eksplicitan oblik dvokomponentnih spinora

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}} \begin{pmatrix} n_3 + 1 \\ n_1 + in_2 \end{pmatrix} , \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+n_3)}} \begin{pmatrix} -n_1 + in_2 \\ n_3 + 1 \end{pmatrix} , \quad (4.4.52)$$

Ort polarizacije u sistemu mirovanja ($0 \ \mathbf{n}$) ortogonalan je na četvoroimpuls u sistemu mirovanja ($m \ 0$). U inercijalnom sistemu u kome se čestica kreće sa impulsom \mathbf{p} ort polarizacije (kao i svi ostali vektori) se transformiše bustom $\Lambda(-\mathbf{p})$: označićemo ga sa s ,

$$s^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{m} \\ \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{m(E_p + m)} \end{pmatrix} . \quad (4.4.53)$$

Razume se, zbog Lorencove invarijantnosti ostaje $s^2 = -1$ i $s \cdot p = 0$.

Spinor $u_1(\mathbf{p})$ je polarisan duž pravca s , a spinor $u_2(\mathbf{p})$ duž pravca $-s$. Zato se često koriste oznake

$$u_1(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, s) , \quad u_2(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}, -s) . \quad (4.4.54)$$

Ako se za ort \mathbf{n} izabere pravac kretanja elektrona, $u_r(\mathbf{p})$ čine helicitetni bazis pozitivno-energetskih rešenja datog impulsa.

Talasna funkcija za negativno-energetsку česticu impulsa \mathbf{p} je

$$\psi(x) = v_r(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}, \quad v_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}. \quad (4.4.55)$$

I negativno-energetske spinore možemo izabrati da budu svojstvena stanja operatora $\frac{1}{2}\Sigma \cdot \mathbf{n}$. Izabraćemo ih tako da u sistem mirovanja imamo

$$\Sigma \cdot \mathbf{n} v_1(0) = -v_1(0), \quad \Sigma \cdot \mathbf{n} v_2(0) = v_2(0).$$

Izabrali smo da je stanje $v_1(0)$ polarisano suprotno, a stanje $v_2(0)$ u pravcu orta \mathbf{n} : objašnjenje za ovaj izbor biće jasnije u narednom odeljku. Dakle, za nerelativističke spinore uzimamo $\chi_1 = \varphi_2$ i $\chi_2 = \varphi_1$.

4.5 Vektor Pauli-Lubanskog, projektori spina

U ovom poglavlju ćemo operator projekcije spina iz sistema mirovanja prevesti u pokretni inercijalni sistem, tj. izraziti kovarijantno. U teoriji reprezentacija Poenkareove grupe važnu ulogu igra vektor Pauli-Lubanskog,

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma \quad (4.5.56)$$

koji je definisan pomoću generatora Lorencovih transformacija $J_{\mu\nu}$ i translacija P_μ . Kvadrat vektora Pauli-Lubanskog je Kazimirov operator Poenkareove grupe: lako se pokazuje da se na rešenjima Dirakove jednačine on svodi na broj. Konkretno, iz $P_\mu = i\partial_\mu$ i (4.4.41) dobijamo

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left(ix^\nu \partial^\rho - ix^\rho \partial^\nu + \frac{1}{2} \sigma^{\nu\rho} \right) i\partial^\sigma = \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\nu\rho} \partial^\sigma = \frac{1}{2} \gamma_5 \sigma_{\mu\sigma} \partial^\sigma \quad (4.5.57)$$

koristeći antisimetriju tenzora $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ i relaciju $\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}$. Iz poslednje relacije, uz malo dodatne algebri, dalje sledi

$$W^\mu W_\mu \psi(x) = -\frac{3}{4} m^2 \psi(x) \quad (4.5.58)$$

za rešenja Dirakove jednačine, tj ona koja zadovoljavaju $P^\mu P_\mu \psi(x) = -\partial^\mu \partial_\mu \psi(x) = m^2 \psi(x)$. Ta relacija definiše drugi (ili prvi) Kazimirov operator Poenkareove grupe, kvadrat impulsa P^2 .

Projekcija spina u sistemu mirovanja, $\Sigma \cdot \mathbf{n}$, u pokretnom inercijalnom sistemu postaje operator $\frac{1}{m} W^\mu s_\mu$, gde je s^μ vektor polarizacije definisan u prethodnom poglavlju, bustom vektora \mathbf{n} u pokretni sistem. Da bismo ovo pokazali, izračunajmo kako $W^\mu s_\mu$ deluje na spinorski bazis ravnih talasa. Imamo

$$\partial_\mu u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = -i\epsilon_r p_\mu u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad \partial_\mu v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} = -i\epsilon_r p_\mu v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x},$$

gde je ϵ_r znak energije. Pri delovanju na spinorski bazis, $W^\mu s_\mu$ se svodi na

$$\frac{1}{m} W^\mu s_\mu = \frac{1}{2m} \gamma_5 \sigma_{\mu\sigma} (-i\epsilon_r p^\sigma) s^\mu = \frac{1}{2m} \gamma_5 i (\gamma_\mu \gamma_\sigma - g_{\mu\sigma}) (-i\epsilon_r p^\sigma) s^\mu, \quad (4.5.59)$$

pa dobijamo

$$\frac{1}{m} W^\mu s_\mu = \frac{1}{2m} \epsilon_r \gamma_5 \not{p} = \frac{1}{2} \gamma_5 \not{p} \quad (4.5.60)$$

koristeći da je za rešenja Dirakove jednačine fiksiranog impulsa $\not{p} = \epsilon_r m$. Kvadrat operatora $(\gamma_5 \not{p})^2 = \mathbb{I}$, pa su njegove svojstvene vrednosti ± 1 , a njegovi svojstveni projektori, odnosno projektori na pravac spina duž s ,

$$\Sigma(\pm s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{p}}{2}. \quad (4.5.61)$$

Ovi projektori implicitno zavise od impulsa, jer je pravac s^μ na koji se projektuje spin ort prostornog tipa, $s^2 = -1$, ortogonalan na p^μ , $p_\mu s^\mu = 0$. Lako se pokazuje da je $(\Sigma(s))^2 = \Sigma(s)$.

Eksplisitim računom dobijamo

$$\gamma_5 \not{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m(E_p + m)} & -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{m} \\ \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{m} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m(E_p + m)} \end{pmatrix}. \quad (4.5.62)$$

U sistemu mirovanja, ovaj operator se ne svodi na (4.5), već na

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

odnosno na negativno-energetskim rešenjima predstavlja projekciju na $-\mathbf{n}$. Spinorske amplitude su svojstvena stanja operatora $\gamma_5 \not{p}$, i zadovoljavaju sledeće svojstvene jednačine

$$\gamma_5 \not{p} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \gamma_5 \not{p} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} v_r(\mathbf{p}), \quad (4.5.63)$$

odnosno

$$\gamma_5 \not{p} u(\mathbf{p}, \pm s) = \pm u(\mathbf{p}, \pm s), \quad \gamma_5 \not{p} v(\mathbf{p}, \pm s) = \mp v(\mathbf{p}, \pm s). \quad (4.5.64)$$

Sa $u(\mathbf{p}, s) \equiv u_1(\mathbf{p})$ smo obeležili Dirakov spinor pozitivno-energetske čestice polarizovane duž pravca s , a sa $v(\mathbf{p}, s) \equiv v_1(\mathbf{p})$ negativno-energetska čestica polarizovana duž pravca $-s$. Lako se proverava da je

$$u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{p}}{2} \frac{\not{p} + m}{2m} = \Sigma(s) \Lambda_+(p), \quad (4.5.65)$$

$$v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{p}}{2} \frac{\not{p} - m}{2m} = -\Sigma(s) \Lambda_-(p), \quad (4.5.66)$$

kao i

$$\Sigma(s) + \Sigma(-s) = \mathbb{I}, \quad [\Sigma(s), \Lambda_\pm(p)] = 0. \quad (4.5.67)$$

Specijalan slučaj važan za razlaganje opšteg rešenja po ravnim talasima je kada spin projektujemo na pravac kretanja čestice $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$, odnosno kada je prostorni deo orta $s^\mu = (s^0, \mathbf{s})$ paralelan sa troimpulsom \mathbf{p} . (Lako se pokazuje da ort prostornog tipa koji zadovoljava $p_\mu s^\mu = 0$ i $\mathbf{s} \parallel \mathbf{p}$, $s^\mu = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{E_p}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right)$.) Tada se projekcija spina svodi na operator heliciteta $\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$,

$$\gamma_5 \not= \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{p}{m}.$$

Odgovarajući spinori $u_r(\mathbf{p})$ i $v_r(\mathbf{p})$ čine *helicitetni bazis*.

Glava 5

Fizičke karakteristike rešenja

5.1 Opšte rešenje slobodne jednačine, normiranje

Opšte rešenje Dirakove jednačine za slobodnu česticu je

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{\pm s} \left(b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} + d^*(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} \right) \quad (5.1.1)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sum_{\pm s}^2 \left(b^*(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} + d(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} \right). \quad (5.1.2)$$

Ovde su $b_r(\mathbf{p})$ i $d_r(\mathbf{p})$ amplitude pozitivno odnosno negativno-energetskih ravnih talasa određenog impulsa i spina. Kvadrat norme talasne funkcije predstavlja ukupnu verovatnoću nalaženja čestice,

$$\int d^3 x \psi^\dagger(x) \psi(x) = 1. \quad (5.1.3)$$

Da vidimo kako se normiranje izražava u impulsnom prostoru. Imamo

$$\begin{aligned} & \int d^3 x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \\ &= \int d^3 x \iint \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sum_{\pm s_1, \pm s_2} \\ & \times \left(b^*(\mathbf{p}_2, s_2) b(\mathbf{p}_1, s_1) u^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) u(\mathbf{p}_1, s_1) e^{i(p_2 - p_1) \cdot x} \right. \\ & + b^*(\mathbf{p}_2, s_2) d^*(\mathbf{p}_1, s_1) u^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) v(\mathbf{p}_1, s_1) e^{i(p_2 + p_1) \cdot x} \\ & + d(\mathbf{p}_2, s_2) b(\mathbf{p}_1, s_1) v^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) u(\mathbf{p}_1, s_1) e^{-i(p_2 + p_1) \cdot x} \\ & \left. + d(\mathbf{p}_2, s_2) d^*(\mathbf{p}_1, s_1) v^\dagger(\mathbf{p}_2, s_2) v(\mathbf{p}_1, s_1) e^{-i(p_2 - p_1) \cdot x} \right). \end{aligned}$$

U prvom koraku integralimo eksponencijalne funkcije po prostornim koordinatama, a u drugom koraku primenjujemo relacije ortogonalnosti (4.3.27) za Dirakove spinore:

$$\begin{aligned}
 & \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) = \\
 &= \iint d^3p_1 d^3p_2 \frac{m}{E_1} \sum_{\pm s_1, \pm s_2} \\
 & \times \left(b^*(\mathbf{p}_1, s_2) b(\mathbf{p}_1, s_1) u^\dagger(\mathbf{p}_1, s_2) u(\mathbf{p}_1, s_1) + b^*(-\mathbf{p}_1, s_2) d^*(\mathbf{p}_1, s_1) u^\dagger(-\mathbf{p}_1, s_2) v(\mathbf{p}_1, s_1) e^{-2iE_1 t} \right. \\
 & \quad \left. + d(-\mathbf{p}_1, s_2) b(\mathbf{p}_1, s_1) v^\dagger(-\mathbf{p}_1, s_2) u(\mathbf{p}_1, s_1) e^{2iE_1 t} + d(\mathbf{p}_1, s_2) d^*(\mathbf{p}_1, s_1) v^\dagger(\mathbf{p}_1, s_2) v(\mathbf{p}_1, s_1) \right) \\
 &= \int d^3p \sum_s \left(|b(\mathbf{p}, s)|^2 + |d(\mathbf{p}, s)|^2 \right). \tag{5.1.4}
 \end{aligned}$$

U impulsnom prostoru, kao i u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, kvadrat norme se dobija integracijom (zbira) kvadrata amplituda.

5.2 Gordonovo razlaganje struje

Da bismo izračunali fluks verovatnoće za opšte rešenje, izvedimo prvo Gordonove identitete. Neka su ψ_1 i ψ_2 dva spinora koja zadovoljavaju Dirakovu jednačinu. Tada za proizvoljan konstantan četvorovektor a_μ važi

$$\bar{\psi}_2(-i\overleftrightarrow{\partial} - m)\not{a}\psi_1 + \bar{\psi}_2\not{a}(i\partial - m)\psi_1 = 0. \tag{5.2.5}$$

Iz ovog izraza sledi

$$-i(\partial_\nu \bar{\psi}_2)\gamma^\nu \gamma^\mu \psi_1 + i\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi_1 - 2m\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = 0,$$

pa primenom relacije $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ dobijamo

$$\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 = \frac{1}{2m} \left(i\bar{\psi}_2 \partial^\mu \psi_1 - i(\partial^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1 + \bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1 + (\partial_\nu \bar{\psi}_2) \sigma^{\mu\nu} \psi_1 \right). \tag{5.2.6}$$

Izraz (5.2.6) je Gordonovo razlaganje vektorske struje. Iz (5.2.6) ćemo izvesti Gordonove identitete za Dirakove spinore u impulsnom prostoru. Ako uzmemo dva pozitivno-energetska rešenja,

$$\psi_1 = u(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x}, \quad \psi_2 = u(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x}, \tag{5.2.7}$$

iz (5.2.6) dobijamo

$$2m \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_1) = \bar{u}(\mathbf{p}_2) \left((p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu} (p_2 - p_1)^\nu \right) u(\mathbf{p}_1) \tag{5.2.8}$$

a za negativno-energetska rešenja

$$\psi_1 = v(\mathbf{p}_1) e^{ip_1 \cdot x}, \quad \psi_2 = v(\mathbf{p}_2) e^{ip_2 \cdot x}, \tag{5.2.9}$$

zamena u (5.2.6) daje

$$2m \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_1) = -\bar{v}(\mathbf{p}_2) \left((p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu} (p_2 - p_1)^\nu \right) v(\mathbf{p}_1). \quad (5.2.10)$$

Na sličan način dolazimo do

$$2m \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu v(\mathbf{p}_1) = \bar{u}(\mathbf{p}_2) \left(p_2 - p_1)_\mu + i\sigma_{\mu\nu} (p_1 + p_2)^\nu \right) v(\mathbf{p}_1), \quad (5.2.11)$$

$$2m \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu u(\mathbf{p}_1) = \bar{v}(\mathbf{p}_2) \left((p_1 - p_2)_\mu - i\sigma_{\mu\nu} (p_1 + p_2)^\nu \right) u(\mathbf{p}_1). \quad (5.2.12)$$

5.3 Struja verovatnoće slobodne čestice

U nerelativističkoj kvantnoj mehanici vremenski izvod očekivane vrednosti vektora položaja čestice tj. njena brzina je integral struje verovatnoće,

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x \rho \mathbf{r} = \int d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{r} = - \int d^3x \operatorname{div} \mathbf{j} \cdot \mathbf{r} = \int d^3x \mathbf{j}. \quad (5.3.13)$$

U gornjoj jednačini gustina verovatnoće je $\rho = \psi^\dagger \psi$, a u poslednja dva koraka izvođenja prime-njena je jednačina kontinuiteta i parcijalna integracija. Izračunajmo brzinu relativističke čestice čija je talasna funkcija, talasni paket koji se sastoji samo od rešenja pozitivne energije,

$$\psi^{(+)}(x) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x}. \quad (5.3.14)$$

Srednju brzinu ćemo izračunati primenom Gordonovog razlaganja. Imamo

$$\begin{aligned} \int d^3x j^{i(+)}(x) &= \int d^3x \bar{\psi}^{(+)}(x) \gamma^i \psi^{(+)}(x) \\ &= \frac{1}{2m} \int d^3x \left(\bar{\psi}^{(+)}(x) (i\partial^i \psi^{(+)}(x)) - (i\partial^i \bar{\psi}^{(+)}(x)) \psi^{(+)}(x) + \partial_\nu (\bar{\psi}^{(+)}(x) \sigma^{i\nu} \psi^{(+)}(x)) \right) \\ &= \frac{1}{2m} \int d^3x \iint \frac{d^3p_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m^2}{E_1 E_2}} \sum_{\pm s_1, \pm s_2} \\ &\quad \times \left(p_2^i b^*(\mathbf{p}_1, s_1) b(\mathbf{p}_2, s_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1) u(\mathbf{p}_2, s_2) e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + p_1^i b^*(\mathbf{p}_1, s_1) b(\mathbf{p}_2, s_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1) u(\mathbf{p}_2, s_2) e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + i(p_1 - p_2)_\nu b^*(\mathbf{p}_1, s_1) b(\mathbf{p}_2, s_2) \bar{u}(\mathbf{p}_1, s_1) \sigma^{i\nu} u(\mathbf{p}_2, s_2) e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} \right) \\ &= \int d^3p \sum_s \frac{p^i}{E} |b(\mathbf{p}, s)|^2. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Poslednji red u računu se dobija integracijom po prostoru i integracijom δ -funkcije koja se tako dobije: pri tome član koji sadrži $\sigma^{i\nu}$ otpada. Rezultat je kao nerelativistički: dobija se grupna brzina, srednja vrednost brzina pojedinih ravnih talasa p^i/E .

Razmotrimo sada šta se dobije kada izračunamo srednju brzinu celog talasnog paketa (5.1.1). Izvođenje je u principu isto kao prethodno, samo što imamo više članova. Napisaćemo samo rezultat koji se dobija posle integracije po prostoru i integracije impulsne δ -funkcije:

$$\begin{aligned} \int d^3x j(x) &= \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^i \psi(x) \\ &= \int d^3p \sum_s \frac{p^i}{E} \left(|b(\mathbf{p}, s)|^2 + |d(\mathbf{p}, s)|^2 \right) \\ &\quad + \int d^3p \sum_{s_1, s_2} \frac{p^i}{E} \left(b^*(\mathbf{p}, s_1) d^*(-\mathbf{p}, s_2) \bar{u}(\mathbf{p}, s_1) v(-\mathbf{p}, s_2) e^{2iEt} \right. \\ &\quad \left. + b(\mathbf{p}, s_1) d(-\mathbf{p}, s_2) \bar{v}(-\mathbf{p}, s_2) u(\mathbf{p}, s_1) e^{-2iEt} \right) \\ &\quad + i \int d^3p \sum_{s_1, s_2} \left(b^*(\mathbf{p}, s_1) d^*(-\mathbf{p}, s_2) \bar{u}(\mathbf{p}, s_1) \sigma^{i0} v(-\mathbf{p}, s_2) e^{2iEt} \right. \\ &\quad \left. - b(\mathbf{p}, s_1) d(-\mathbf{p}, s_2) \bar{v}(-\mathbf{p}, s_2) \sigma^{i0} u(\mathbf{p}, s_1) e^{-2iEt} \right). \end{aligned}$$

Članovi u kojima se mešaju pozitivno i negativno-frekventna rešenja nisu jednaki nuli, a srednja brzina nema jednostavan i očekivan nerelativistički oblik; sem toga, zavisi od vremena. Ovaj fenomen, nazvan Zitterbewegung (podrhtavanje), je prvi od fizičkih efekata negativno-energetskih rešenja koje Dirakova jednačina, u standardnoj statističkoj interpretaciji, predviđa. Frekvenca ovog podrhtavanja je

$$\frac{2E_p c}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} \approx 10^{21} s^{-1}.$$

5.4 Evolucija Gausovog paketa

Postojanje negativno-energetskih rešenja Dirakove jednačine za slobodnu česticu je veliki problem za njenu interpretaciju, i između ostalog, doveo je do toga da je Dirakov rad prvih nekoliko godina smatrana za interesantan, ali nefizički. Videli smo da se ovaj problem nužno unosi kvantovanjem relativističke disperzije relacije, tj. da je ‘pozitivni koren’ energije nemoguće izdvojiti u jednačini na kovarijantan način. Dirakova jednačina je linearna: drugi način da eliminišemo negativno-energetska rešenja bio bi da se prostor stanja čestice suzi (projektuje) na fizički potprostor pozitivno-energetskih stanja. Ovaj metod se koristi u kvantnoj fizici, npr. u nerelativističkoj kvantnoj mehanici za simetrizaciju/antisimetrisaciju talasne funkcije identičnih čestica (superselekciono pravilo). Međutim, da bi mogao da se realizuje, fizički potprostor treba da se održava pri vremenskoj evoluciji, kao i da sadrži stanja koja su fizički relevantna. U ovom poglavlju ćemo pokazati da među takvim stanjima nije Gausov talasni paket.

Razmotrićemo naime evoluciju rešenja slobodne Dirakove jednačine koje u početnom trenutku $t = 0$ ima oblik Gausovog paketa pozitivne energije: u nerelativističkoj kvantnoj mehanici ovakva rešenja su najpribližniji opis klasične slobodne čestice, jer je za njih proizvod neodređenosti koordinate i impulsa minimalan. Da bismo našli kako rešenje izgleda u proizvoljnem trenutku

vremena (evoluira), treba da ga razvijemo po ravnim talasima, (5.1.1). Prepostavimo da u početnom trenutku talasna funkcija ima oblik

$$\psi(\mathbf{r}, t=0) \equiv \psi(\mathbf{r}, 0) = Ce^{-\frac{r^2}{2d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4.16)$$

gde je C konstanta normirana. Ovu talasnu funkciju treba da napišemo kao

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\pm s} \left(b(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + d^*(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (5.4.17)$$

Lako se proverava, koristeći relacije ortonormiranosti spinorskih amplituda, da se koeficijenti $b(\mathbf{p}, s)$ i $d(\mathbf{p}, s)$ dobijaju iz

$$b(\mathbf{p}, s) = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, 0), \quad (5.4.18)$$

$$d^*(\mathbf{p}, s) = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} v^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, 0). \quad (5.4.19)$$

Kada u ove izraze uvrstimo Gausov paket (5.4.16), koristeći eksplisitnu formu spinorskih amplituda u (4.2.17-4.2.20), dobijamo

$$\begin{aligned} b(\mathbf{p}, s_z) &= Cd^3 \sqrt{\frac{E+m}{2E}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2 d^2}{2}}, & b(\mathbf{p}, -s_z) &= 0, \\ d^*(\mathbf{p}, s_z) &= \frac{p_+}{E+m} b(\mathbf{p}, s_z), & d^*(\mathbf{p}, -s_z) &= \frac{p_3}{E+m} b(\mathbf{p}, s_z). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Kao i u nerelativističkom slučaju, udeo ravnih talasa sa velikim impulsima je u razvoju Gausovog paketa eksponencijalno potisnut,

$$b(\mathbf{p}), d(\mathbf{p}) \sim e^{-\frac{\mathbf{p}^2 d^2}{2}}.$$

Međutim, amplituda $d(\mathbf{p}, s) \neq 0$: u razvoju Gausovog paketa uvek imamo negativno-energetske ravne talase koje ne možemo da zanemarimo, ili ‘odsečemo’. Odnos koeficijenata je

$$\frac{|d(\mathbf{p})|}{|b(\mathbf{p})|} = \frac{|\mathbf{p}|}{E_p + m}.$$

Za veliki talasni paket, $d \gg \frac{1}{m}$ impulsi su reda veličine $|\mathbf{p}| \lesssim d^{-1} \ll m$, pa je udeo negativno energetskih rešenja zanemarljiv. Sa druge strane, ako je širina paketa reda inverzne mase elektrona¹, tj. ako je talasni paket u početnom trenutku dobro lokalizovan, tada je $|\mathbf{p}| \approx \frac{1}{d} \approx m$. Odavde sledi da je

$$\frac{|d(\mathbf{p})|}{|b(\mathbf{p})|} \approx 1,$$

tj. negativno energetska rešenja postaju značajna u evoluciji.

¹Odnosno d je reda veličine Komptonove talasne dužine.

Glava 6

Elektromagnetna interakcija

6.1 Minimalno kuplovanje

Veza energije i impulsa za slobodnu relativističku česticu je

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4 .$$

Ako čestica ima nanelektrisanje q i kreće se u spoljašnjem elektromagnetsnom polju $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathbf{A})$, njen hamiltonijan je dat sa

$$(H - q\phi)^2 = c^2(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2 c^4 . \quad (6.1.1)$$

Poređenjem ovih jednačina vidimo da se uvođenje elektromagnetne interakcije realizuje zamenom

$$E \rightarrow E - q\phi , \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (6.1.2)$$

koja se zove *minimalna zamena*. Princip minimalne zamene važi i u kvantnoj mehanici: hamiltonijan i impuls napišemo kao odgovarajuće diferencijalne operatore, gornja preskripcija daje

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \hbar \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi , \quad \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} + iqA_i , \quad (6.1.3)$$

ili, u prirodnom sistemu jedinica $\hbar = 1 = c$,

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu . \quad (6.1.4)$$

Izraz $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ naziva se kovarijantni izvod.

Prema tome, Dirakova jednačina za nanelektrisanu česticu u spoljašnjem elektromagnetsnom polju je

$$(i\partial^\mu - qA^\mu - m)\psi = 0 . \quad (6.1.5)$$

Ako gornju jednačinu pomnožimo sa γ^0 , dobijamo Dirakovu jednačinu u Hamiltonovojoj formi,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - q\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + q\phi + m\beta \right) \psi . \quad (6.1.6)$$

Treba napomenuti da se u relativističkoj fizici interakcija čestice sa elektromagnetnom poljem opisuje mnogo prirodnije nego npr. interakcija sa skalarnim potencijalom: to je zbog Lorenzove invarijantnosti. Kretanje čestice u skalarnom potencijalu $V(x)$ se, u kontekstu Dirakove jednačine, najčešće opisuje formalnim uvođenjem elektromagnetskog potencijala čija je nulta komponenta $q\phi(x) = V(x)$, $\mathbf{A}(x) = 0$.

6.2 Nerelativistički limes Dirakove jednačine

U ovom poglavlju ispitacemo nerelativistički limes Dirakove čestice koja se nalazi u spoljašnjem elektromagnetnom polju. Pretpostavimo da je brzina elektrona mala u poređenju sa brzinom svetlosti, $v/c = v \ll 1$, tj. energija mirovanja elektrona je mnogo veća od kinetičke energije elektrona, kao i energije interakcije elektrona sa spoljašnjim elektromagnetskim poljem. Rešenje Dirakove jednačine pretpostavimo u obliku

$$\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi(t, \mathbf{r}) \\ \chi(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (6.2.7)$$

gde se φ i χ menjaju sporije od e^{-imt} : u osnovi, želimo da u prvoj aproksimaciji po v nađemo popravku na pozitivno-energetsko rešenje za česticu u mirovanju (4.1.7). Zamenom (6.2.7) u Dirakovu jednačinu (6.1.6) dobijamo

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + q\phi & -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \\ -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} & -m + q\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (6.2.8)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\chi &= i\frac{\partial\varphi}{\partial t} - q\phi\varphi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A})\varphi &= 2m\chi + i\frac{\partial\chi}{\partial t} - q\phi\chi. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

U gornjim jednačinama dejstvo operatora $i\partial_t$ deluje na φ ili χ zapravo daje kinetičku energiju rešenja, $T = E - m$. U nerelativističkoj aproksimaciji kinetička energija i energije interakcije su mnogo manje od mase mirovanja, $T \ll m$, $V = q\phi \ll m$, odnosno

$$i\frac{\partial\chi}{\partial t} \ll m\chi, \quad q\phi\chi \ll m\chi. \quad (6.2.10)$$

Tada se drugi i treći član na desnoj strani jednačine (6.2.9) mogu zanemariti u odnosu na prvi, pa imamo

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})}{2m} \varphi. \quad (6.2.11)$$

Ova jednačina pokazuje da je u nerelativističkoj aproksimaciji χ mnogo manja od φ , i zato se naziva malom komponentom spinora.

Zamenom (6.2.11) u prvu jednačinu sistema (6.2.9) dolazimo do jednačine

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}))^2}{2m} + q\phi \right) \varphi . \quad (6.2.12)$$

Odredimo $(\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}))^2$. Primenom identiteta (zapisanog u euklidskoj prostornoj metrići)

$$\sigma_m \sigma_n = \delta_{mn} + i\epsilon_{mnk} \sigma_k ,$$

imamo

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\nabla - q\mathbf{A}))^2 &= \sigma_m \sigma_n (-i\partial^m - qA^m)(-i\partial^n - qA^n) \\ &= (\delta_{mn} + i\epsilon_{mnk} \sigma_k)(-\partial^m \partial^n + iq(\partial^m A^n) + iqA^n \partial^m + iqA^m \partial^n + q^2 A^m A^n) . \end{aligned}$$

Koristeći da je proizvod simetričnog i antisimetričnog tenzora jednak nuli, prethodni izraz postaje

$$(\boldsymbol{\sigma}(-i\nabla - q\mathbf{A}))^2 = (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 - q\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (6.2.13)$$

gde smo umesto vektorskog potencijala \mathbf{A} uveli magnetno polje \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} .$$

Jednačina koju zadovoljava gornja (velika) komponenta Dirakovog spinora φ je Paulijeva jednačina,

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{(-i\nabla - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right) \varphi . \quad (6.2.14)$$

Izraz u zagradi na desnoj strani je hamiltonijan čestice, u kome su prvi i drugi sabirak dobijeni principom minimalne zamene u slobodnoj Šredingerovoj jednačini, a treći sabirak, $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, je hamiltonijan interakcije magnetnog dipolnog momenta sa spoljašnjim magnetnim poljem.

Kada imamo samo orbitni ugaoni moment, magnetni dipolni moment dat je sa

$$\mathbf{m} = \mu_B \mathbf{L} , \quad (6.2.15)$$

gde je $\mu_B = \frac{q}{2mc}$ Borov magneton (konstanta definisana za elektron; standardno se definiše i nuklearni magneton μ_N za proton odnosno neutron). Vrednost spinskog magnetnog momenta je

$$\mathbf{m} = g \mu_B \mathbf{S} , \quad (6.2.16)$$

za fermione je spin $\mathbf{S} = \frac{\hbar \boldsymbol{\sigma}}{2}$, a g je tzv. *žiromagnetni odnos*. U nerelativističkoj kvantnoj mehanici g je fenomenološki parametar koji se dobija iz merenja: imamo na primer da je $g_{\text{elektron}} = 2.00$, $g_{\text{proton}} = 2.79$, $g_{\text{neutron}} = -1.91$. Iz relacije (6.2.14) vidimo da je za Dirakovu česticu $g = 2$,

$$\mathbf{m} = 2 \frac{q}{2m} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = 2\mu_B \mathbf{S} . \quad (6.2.17)$$

Drugim rečima, Dirakova čestica zapravo je elektron! Dalje, vrednost njegovog žiromagnetnog odnosa nije fenomenološki podatak, već posledica Dirakove jednačine u nerelativističkom limesu: Dirakova teorija predviđa neminimalnu interakciju spina elektrona sa magnetnim poljem. Sa druge strane, necelobrojne vrednosti žiromagnetnog odnosa za proton i neutron ukazuju na to da te čestice nisu fundamentalne tj. elementarne.

6.3 Klajnov paradoks

Predikcija žiromagnetsnog odnosa za elektron je jedan od uspeha relativističke kvantne mehanike; drugi je svakako spektar vezanih stanja elektrona u atomu vodonika, koji objašnjava finu i hiperfinu strukturu spektra (ali ne i Lambov pomak). U ovom poglavlju proanaliziraćemo prolaz elektrona kroz pravougaonu potencijalnu barijeru.

Uzmimo da je potencijal oblika stepenice: opisujemo ga kao elektrostaticki potencijal,

$$V(x) = q\phi(x) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ V_0, & z \geq 0. \end{cases} \quad (6.3.18)$$

Prepostavićemo da na potencijal sa leve strane nailazi ravan talas impulsa $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$ i energije $E > 0$, i izračunaćemo koeficijente refleksije i transmisije pri njegovom prolazu kroz barijeru. Kao i u nerelativističkoj mehanici, zadatak možemo da rešavamo zasebno u delovima prostora $z < 0$ i $z > 0$ i da onda glatko spojimo rešenje: jedino što u slučaju Dirakove jednačine imamo samo jedan uslov neprekidnosti – neprekidnost talasne funkcije, pošto je jednačina prvog reda. Dakle, jednačina glasi

$$(i\partial - q\phi(x)\gamma^0 - m)\psi(x) = 0. \quad (6.3.19)$$

Rešavamo jednačinu prvo za $z < 0$. U tom delu prostora potencijal je nula, pa imamo slobodnu Dirakovu jednačinu. Uzećemo da je upadni talas rešenje fiksiranog spina,

$$\psi_i = a e^{-iEt+ipz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3.20)$$

a reflektovani talas linearna kombinacija

$$\psi_r = b e^{-iEt-ipz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + c e^{-iEt-ipz} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \end{pmatrix}. \quad (6.3.21)$$

Razume se, $E^2 = p^2 + m^2$.

Pri prolazu kroz barijeru, u oblasti $z > 0$, impuls elektrona se menja ali njegova energija ne. Transmitovano rešenje je ono koje se prostire u pozitivnom smeru z -ose,

$$\psi_t = d e^{-iEt+ip'z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p'}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix} + f e^{-iEt+ip'z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{p'}{E-V_0+m} \end{pmatrix}, \quad (6.3.22)$$

pri čemu sada iz Dirakove jednačine u konstantnom potencijalu V_0 sledi disperziona jednačina $(E - V_0)^2 = p'^2 + m^2$, pa je zato i normiranje komponenti transmitovanog spinora u (6.3.22) različito. Dakle,

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad p' = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}. \quad (6.3.23)$$

Uslov neprekidnosti talasne funkcije u ravni $z = 0$ daje četiri veze između koeficijenata:

$$\begin{aligned} a + b &= d, & (a - b) \frac{p}{E + m} &= d \frac{p'}{E - V_0 + m} \\ c &= f, & c \frac{p}{E + m} &= -f \frac{p'}{E - V_0 + m} \end{aligned} \quad . \quad (6.3.24)$$

Rešenje poslednjeg para uslova je $c = 0$, $f = 0$, a za prvi par jednačina dobijamo

$$a = \frac{1+r}{2} d, \quad b = \frac{1-r}{2} d \quad (6.3.25)$$

gde je koeficijent r definisan sa

$$r = \frac{p'}{p} \frac{E + m}{E - V_0 + m}. \quad (6.3.26)$$

Koeficijenti refleksije R i prolaza T kroz barijeru su odnosi struja verovatnoće u asimptotskoj oblasti,

$$R = \frac{j_r}{j_i}, \quad T = \frac{j_t}{j_i}. \quad (6.3.27)$$

U kvantnoj mehanici nas obično zanima tunel efekat: ovde ćemo razmatrati slučaj kada su impulsi p i p' realni, odnosno kada imamo ravne talase u celom prostoru. Za R i T se dobija

$$R = \frac{j_{z,r}}{j_{z,i}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}, \quad T = \frac{j_{z,t}}{j_{z,i}} = \frac{4r}{(1+r)^2}, \quad R + T = 1. \quad (6.3.28)$$

Ovaj rezultat liči na nerelativistički: rešenje analogne Šredingerove jednačine je

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} a e^{-iEt+ikz} + b e^{-iEt-ikz}, & z < 0 \\ d e^{-iEt+ik'z}, & z \geq 0 \end{cases}, \quad (6.3.29)$$

a uslovi neprekidnosti izgledaju isto kao (6.3.24), osim što je

$$\tilde{r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}}. \quad (6.3.30)$$

U nerelativističkom slučaju interpretacija je jasna: kada je energija $E > V_0$, čestica delom prelazi preko potencijalne barijere a delom se reflektuje, i važi $0 < R, T < 1$. Za $E < V_0$ čestica ‘ulazi’ pod barijeru pri čemu je njena talasna funkcija eksponencijalno opadajuća: u našem slučaju, pošto je barijera beskonačno široka, verovatnoća prolaza je nula.

U relativističkom slučaju rezultat je malo drugačiji: pre svega, energija E uključuje i energiju mirovanja m . Iz izraza za impulse (6.3.23) vidimo da je $p'^2 > 0$ kada je kinetička energija čestice veća od energije barijere, $E - m > V_0$, što je analogno nerelativističkom rezultatu. Ali rešenje u obliku ravnog talasa postoji i u drugom slučaju, za velike vrednosti potencijala, kada je $V_0 > E + m > 2m$. Tada dobijamo da je $r < 0$, kao i $T < 0$, $R > 1$: kao da se od barijere reflektuje više (struje) nego što na nju pada. Ovakav rezultat je paradoksalan i teško ga je interpretirati u okviru jednočestične teorije: karakteristično je da fenomen postoji onda kada se u sistem spolja unese velika energija, dovoljna za kreaciju elektron-pozitronskog para.

Glava 7

Diskretne transformacije

U ovoj glavi pokazaćemo da je Dirakova jednačina invarijantna na prostornu inverziju, vremensku inverziju i konjugaciju naboja. Inverzije ne pripadaju pravim ortohronim Lorencovim transformacijama, i nisu povezane sa jedinicom.

7.1 Prostorna inverzija

Prostorna inverzija (refleksija sve tri prostorne ose) na koordinate deluje tako što ne menja vreme, a prostornim koordinatama promeni znak, $t \rightarrow t' = t$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$. Matrica prostorne inverzije je

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

Ukoliko je Dirakova jednačina invarijantna na prostornu inverziju, ona mora imati isti oblik nakon primene ove transformacije. U primovanim koordinatama, tj. posle inverzije prostora, jednačina glasi

$$(i\partial' - m)\psi'(x') = 0. \quad (7.1.2)$$

Kako je $\partial'_0 = \partial_0$, $\partial'_i = -\partial_i$, jednačina (7.1.2) je

$$(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i - m)\psi'(t, -\mathbf{r}) = 0. \quad (7.1.3)$$

Veza između talasnih funkcija pri Lorencovoj transformaciji Λ je oblika $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$, tj.

$$\psi'(t, -\mathbf{r}) = S(I_p)\psi(t, \mathbf{r}) \equiv P\psi(t, \mathbf{r}). \quad (7.1.4)$$

Ako jednačinu (7.1.3) pomnožimo sa leva sa P^{-1} i sa primovanih pređemo na neprimovane koordinate, dobijamo

$$(iP^{-1}\gamma^0P\partial_0 - iP^{-1}\gamma^iP\partial_i - m)\psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (7.1.5)$$

Poređenjem ove jednačine sa jednačinom u polaznom sistemu zaključujemo da je

$$P^{-1}\gamma^0P = \gamma^0, \quad P^{-1}\gamma^iP = -\gamma^i, \quad (7.1.6)$$

odnosno,

$$\gamma^0 P = P \gamma^0, \quad \gamma^i P = -P \gamma^i. \quad (7.1.7)$$

Rešenje ovog uslova je očigledno. Matrica P je proporcionalna sa γ^0 , $P = \eta_P \gamma^0$, gde je η_P fazni faktor, $|\eta_P| = 1$. Fazni faktor ne menja gustinu verovatnoće: izabraćemo da je $\eta_P = 1$.

Dakle, Dirakova jednačina je invarijantna na prostornu inverziju. Dirakov spinor se transformiše prema

$$\psi'(t, -\mathbf{r}) = \gamma^0 \psi(t, \mathbf{r}). \quad (7.1.8)$$

Proverimo kako prostorna inverzija deluje na ravne talase, rešenja Dirakove jednačine. Posmatrajmo elektron polarisan duž z -ose koji se kreće sa impulsom \mathbf{p} . Njegova talasna funkcija je

$$\psi(t, \mathbf{r}) = u_1(\mathbf{p}) e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}. \quad (7.1.9)$$

Prostorna inverzija ovo stanje prevodi u

$$\psi'(t, \mathbf{r}) = \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{r}) = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i(E_p t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}. \quad (7.1.10)$$

Vidimo da se je impuls elektrona promenio smer, a da se projekcija spina na z -osu ne menja. Helicitetno stanje će pri prostornoj inverziji promeniti znak impulsa i heliciteta.

Pri prostornoj inverziji bilinearna kovarijantna veličina $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ transformiše se kao

$$\bar{\psi}'(x') \gamma_5 \psi'(x') = \psi^\dagger(x) \gamma^{0\dagger} \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 \psi(x) = -\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x). \quad (7.1.11)$$

Vidimo da $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ menja znak pri prostornoj inverziji, odnosno da je pseudoskalar.

7.2 Vremenska inverzija

Vremenska inverzija je transformacija koja menja smer vremena, a ne menja prostorne koordinate: $t \rightarrow t' = -t$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Matrica vremenske inverzije je

$$I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2.12)$$

Vremenska inverzija jeste simetrija kvantne mehanike, nerelativističke i relativističke (za stacionarne sisteme), ali se reprezentuje antilinearnim operatorom. Najjednostavniji način da se to vidi je konstrukcijom. Pretpostavimo da stanje sistema $|\psi(t)\rangle$ pri vremenskoj inverziji prelazi u stanje $|\psi'(t')\rangle \equiv |\psi'(-t)\rangle$,

$$|\psi'(t')\rangle = \tau |\psi(t)\rangle \quad (7.2.13)$$

gde je τ operator vremenske inverzije. Šredingerova jednačina nakon vremenske inverzije je

$$i \frac{\partial |\psi'(t')\rangle}{\partial t'} = H |\psi'(t')\rangle, \quad (7.2.14)$$

gde smo prepostavili da hamiltonijan ne zavisi od vremena. Ako u jednačini zamenimo $t' = -t$ i na nju delujemo sa τ^{-1} , dobijamo

$$-\tau^{-1}i\tau \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \tau^{-1}H\tau |\psi(t)\rangle. \quad (7.2.15)$$

Invarijantnost Šredingerove jednačine se postiže u dva slučaja:

$$\tau^{-1}i\tau = -i, \quad \tau^{-1}H\tau = H, \quad (7.2.16)$$

ili

$$\tau^{-1}i\tau = i, \quad \tau^{-1}H\tau = -H. \quad (7.2.17)$$

Mogućnost (7.2.17) odbacujemo jer menja znak hamiltonijana (energije): u nerelativističkoj mehanici, kod realnih fizičkih sistema, spektar energije je ograničen odozdo. Dakle važi (7.2.16), a to znači da je operator vremenske inverzije antilinearan.

Drugi, sličan argument je sledeći. Ako zahtevamo da je operator vremenske inverzije definisan dejstvom na koordinatu i impuls kao u klasičnoj mehanici,

$$\hat{x}'_i = \tau^{-1}\hat{x}_i\tau = \hat{x}_i \quad \hat{p}'_i = \tau^{-1}\hat{p}_i\tau = -\hat{p}_i, \quad (7.2.18)$$

vidimo da se kanonska komutaciona relacija $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ održava pri vremenskoj inverziji (tj. da je $[\hat{x}'_i, \hat{p}'_j] = i\delta_{ij}$) samo ukoliko je $\tau^{-1}i\tau = -i$ ¹. U reprezentaciji, antiunitarni operator je proizvod unitarnog operatora i kompleksne konjugacije, pa u nerelativističkom slučaju imamo

$$\psi'(-t) = \psi^*(t). \quad (7.2.19)$$

Sada ćemo odrediti kako vremenska inverzija deluje na bispinore, i pokazati da je vremenska inverzija simetrija Dirakove jednačine. Dirakova jednačina u spoljašnjem elektromagnetskom polju je

$$(i\partial - qA - m) \psi(x) = 0. \quad (7.2.20)$$

Kompleksnom konjugacijom ove jednačine dobijamo

$$(-i\gamma^{\mu*}\partial_\mu - q\gamma^{\mu*}A_\mu - m) \psi^*(x) = 0. \quad (7.2.21)$$

Vremenska inverzija talasnu funkciju $\psi(t, \mathbf{r})$ transformiše u $\psi'(t', \mathbf{r}')$. Prepostavićemo da je veza između ove dve funkcije

$$\psi'(-t, \mathbf{r}) = T\psi^*(t, \mathbf{r}), \quad (7.2.22)$$

¹Antilinearni i antiunitarni operator A zadovoljava relacije

$$A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\chi\rangle) = \alpha^*A|\psi\rangle + \beta^*A|\chi\rangle, \quad \langle A\psi|A\chi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle^* = \langle\chi|\psi\rangle,$$

a njegov adjungovani A^\dagger definiše se uslovom $\langle\psi|A\chi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\chi\rangle^*$.

gde je T matrica, unitarni operator koji ćemo odrediti. Jednačina za transformisani spinor je

$$(i\gamma^0\partial'_0 - qA'^0(x')\gamma_0 + i\gamma^i\partial'_i - q\gamma^i A'_i(x') - m) \psi'(x') = 0. \quad (7.2.23)$$

Elektromagnetni potencijal zadovoljava jednačinu kretanja $\square A^\mu = J^\mu$, odnosno

$$\begin{aligned} \Delta A^0 - \frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} &= -\rho \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

Pri vremenskoj inverziji gustina nanelektrisanja ρ ne menja znak a gustina struje \mathbf{j} menja. To znači da nulta komponenta potencijala A^0 ne menja, a prostorne komponente \mathbf{A} menjaju znak pri vremenskoj inverziji,

$$A^{0'}(-t, \mathbf{r}) = A^0(t, \mathbf{r}), \quad A^{k'}(-t, \mathbf{r}) = -A^k(t, \mathbf{r}). \quad (7.2.25)$$

Ako u (7.2.23) iskoristimo $\partial'_0 = -\partial_0$, $\partial'_i = \partial_i$ i (7.2.25), dolazimo do

$$(\gamma^0(-i\partial_0 - qA'_0) + \gamma^i(\partial_i + qA_i) - m) T\psi^*(x) = 0. \quad (7.2.26)$$

Množenjem ove jedanačine sa T^{-1} sa leve strane dobijamo

$$(T^{-1}\gamma^0 T(-i\partial_0 - qA'_0) + T^{-1}\gamma^i T(\partial_i + qA_i) - m) T\psi^*(x) = 0. \quad (7.2.27)$$

Poređenjem (7.2.27) sa (7.2.21) dobijamo da matrica T treba da zadovoljava

$$\begin{aligned} T^{-1}\gamma^0 T &= \gamma^{0*} \\ T^{-1}\gamma^i T &= -\gamma^{i*}. \end{aligned} \quad (7.2.28)$$

Rešenje ovih uslova u Dirakovoj (i u Vajlovoj) reprezentaciji γ -matrica je

$$T = i\gamma^1\gamma^3. \quad (7.2.29)$$

7.3 Teorija šupljina

Negativno-energetska rešenja su veliki problem Dirakove jednačine. Njihovo postojanje je fizički potpuno kontraintuitivno, jer znači da se (u tom skupu rešenja) povećanjem impulsa slobodne čestice njena energija smanjuje. Spektar energije nije ograničen odozdo: to znači da slobodni elektron nije stabilan, jer pod dejstvom slučajnih perturbacija prelazi u niže-energetska stanja. Videli smo dalje, da ideju da se negativno-energetska stanja eliminisu superseleksionim pravilom, i da se fizički prostor stanja redukuje samo na pozitivne energije nije moguće konzistentno realizovati, čak ni za slobodnu česticu. Iz raznih primera se vidi da jednočestična interpretacija teorije nije dobra, kao i da se problemi i paradoksi javljaju za nerelativističke vrednosti energije sistema.

Dirak je ove probleme pokušao da reši u radovima iz 1929. i 1931, u kojima je izneo dve veoma važne teorijske, odnosno intuitivne fizičke ideje. Prva ideja vezana je za strukturu vakuuma: vakuum nije samo prazan geometrijski prostor, već zavisi od materije koja u njemu (može da) postoji. Druga ideja je da svaka elementarna čestica ima odgovarajuću antičesticu iste mase i spina i suprotnih aditivnih kvantnih brojeva (kao što je nanelektrisanje). Iako, primenjene direktno na Dirakovu jednačine, ove ideje ne mogu konzistentno i do kraja da reše sve probleme relativističke kvantne mehanike, njihov značaj za razvoj kvantne teorije polja i fiziku elementarnih čestica, kao i ukupno razumevanje strukture materije je ogroman.

Spektar energije slobodnog elektrona dat je na slici. Dirak je ‘zabranio’ negativno-energetska stanja u spektru pretpostavkom/postulatom da je vakuum = stanje u kome su svi negativno-energetski nivoi popunjeni, a pozitivno-energetski prazni. To znači da se vakuum sastoji od beskonačno mnogo čestica (i samim tim, ima beskonačnu masu i nanelektrisanje), ali pošto je elektron fermion i zadovoljava Paulijev princip, moguće je popuniti sve energetske nivoe od $-\infty$ do $-m$. Ako ne uključimo gravitaciju u kojoj je masa odnosno energija izvor interakcije, pomeranje nultog nivoa energije je dozvoljeno; dalje, ako prepostavimo da je gustina elektrona u vakuumskom stanju konstantna (što je logično), električno polje je nula. Prema tome, ukupno nanelektrisanje i energija vakuuma nisu opservabilni.

Imamo međutim dva nova i opservabilna procesa koji uključuju vakuum. Ukoliko u vakuumskom stanju postoji foton energije veće od $2m$ (veličine procepa u spektru), elektron iz nekog od negativno-energetskih stanja može da ga apsorbuje i tako pređe u pozitivno-energetsko stanje. Rezultat ovog procesa je slobodan elektron pozitivne energije, i nedostatak ili šupljina u ‘moru’ elektrona negativne energije. Ako je šupljina lokalizovana, ona se manifestuje kao postojanje čestice suprotnog nanelektrisanja i iste mase kao elektron: ova antičestica elektrona nazvana je pozitron, a opisani proces je proces kreacije elektron-pozitronskog para. Obrnuto: ukoliko u sistemu postoji prazan negativno-energetski nivo, odnosno šupljina, i slobodan elektron, moguće je prelaz slobodnog elektrona u nepopunjeni nivo niže energije, odnosno anihilacija elektron-pozitronskog para, koja se realizuje uz oslobađanje energije. Treba naglasiti da se, ovakvom definicijom vakuuma, iz jednočestične teorije prelazi na višečestičnu, kao i da u procesima kreacije i anihilacije broj čestica nije održan, što je u stvari prelaz na kvantnu teoriju polja.

Dirakova teorijska predikcija postojanja antičestica eksperimentalno je potvrđena 1932, kada je Anderson otkrio pozitron.

7.4 Konjugacija naboja

Konjugacija naboja je operacija koja matematički realizuje ideju o ekvivalentnosti negativno-energetskih rešenja Dirakove jednačine za elektron i pozitivno-energetskih rešenja za pozitron. U ovom poglavljju pokazaćemo da je konjugacija naboja simetrija Dirakove jednačine.

Pozitron, odnosno čestica nanelektrisanja $-q$ i mase m , u elektromagnetskom polju A^μ zadovoljava jednačinu

$$(i\partial + qA - m) \psi_c(x) = 0 , \quad (7.4.30)$$

dok je jednačina za talasnu funkciju elektrona u istom polju A^μ

$$(i\partial - qA - m) \psi(x) = 0 . \quad (7.4.31)$$

Konjugacija naboja znači da svako (a posebno nas zanima, negativno energetsko) rešenje ψ jednačine kretanja za elektron možemo da interpretiramo kao (pozitivno-energetsko) rešenje ψ_c jednačine za pozitron. Zato ćemo vezu između ove dve funkcije prepostaviti u obliku

$$\psi_c(x) = M\psi^*(x),$$

gde je M , 4×4 matrica. Kompleksnim konjugovanjem jednačine (7.4.31) dobijamo

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)M^{-1}M\psi^*(x) = 0. \quad (7.4.32)$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa M , dolazimo do

$$(-iM\gamma^\mu M^{-1}\partial_\mu - qM\gamma^\mu M^{-1}A_\mu - m)\psi_c(x) = 0. \quad (7.4.33)$$

Poređenjem poslednje jednačine sa (7.4.30) dolazimo do uslova

$$M^{-1}\gamma^\mu M = -\gamma^\mu, \quad (7.4.34)$$

što je uslov na matricu M koji obezbeđuje invarijantnost Dirakove jednačina na konjugaciju naboja. U Dirakovoj (a i Vajlovoj) reprezentaciji γ -matrica, γ^2 je čisto imaginarna, dok su preostale tri realne, pa je rešenje uslova (7.4.34)

$$M = i\gamma^2. \quad (7.4.35)$$

Ako M napišemo u obliku $M = C\gamma_0^T$, onda je

$$\psi_c(x) = C\bar{\psi}^T(x). \quad (7.4.36)$$

Matrica C se naziva matricom konjugacije naboja. Iz $C = M(\gamma_0^T)^{-1} = M(\gamma_0^T)$ sledi

$$C^{-1}\gamma_\mu C = \gamma_0^T M^{-1} \gamma_\mu M \gamma_0^T = -\gamma_0^T \gamma_\mu^* \gamma_0^T = -(\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0)^T = -\gamma_\mu^T, \quad (7.4.37)$$

odnosno matrica konjugacije naboja zadovoljava

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T. \quad (7.4.38)$$

Antikomutator izmedju matrica γ_μ^T je

$$\{-\gamma_\mu^T, -\gamma_\nu^T\} = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}^T = 2g_{\mu\nu}, \quad (7.4.39)$$

što znači da ove matrice takodje formiraju skup γ -matrica. C je matrica koja po Paulijevoj teoremi povezuje ova dva skupa. Lako se vidi da je

$$\gamma_\mu = ((\gamma_\mu)^T)^T = -(C^{-1}\gamma_\mu C)^T = C^T C^{-1} \gamma_\mu C C^{-1T}, \quad (7.4.40)$$

odakle je

$$C^T C^{-1} \gamma_\mu = \gamma_\mu C^T C^{-1}. \quad (7.4.41)$$

Matrica $C^T C^{-1}$ komutira sa sve četiri γ -matrice pa je skalarna, $C^T C^{-1} = c \mathbb{I}$. Iz izraza

$$C = (C^T)^T = c^2 C \quad (7.4.42)$$

sledi da je $c^2 = 1$. U stvari, c ne zavisi od reprezentacije γ -matrica. Iz (7.4.38) sledi

$$\gamma_\mu C = -C \gamma_\mu^T. \quad (7.4.43)$$

Množenjem gornje jednačine nesingularnom matricom S^{-1} sa leva i sa $(S^{-1})^T$ sa desna, uz ubacivanje jedinica imamo

$$S^{-1} \gamma_\mu S S^{-1} C (S^{-1})^T = -S^{-1} C (S^{-1})^T S^T \gamma_\mu^T (S^{-1})^T. \quad (7.4.44)$$

Kako je $S^{-1} \gamma_\mu S = \gamma'_\mu$ novi skup γ -matrica, to zaključujemo da je njegova matrica konjugacije naboja C' ,

$$C' = S^{-1} C (S^{-1})^T. \quad (7.4.45)$$

Osim toga, iz prethodne jednačine sledi da je $C'^T = c C'$, čime smo pokazali da je c isto za sve reprezentacije γ -matrica, odnosno da je $c = -1$ kao u Dirakovoj reprezentaciji. Znači, matrica konjugacije naboja je uvek antisimetrična, $C^T = -C$.

Odredimo kako konjugacija naboja deluje na negativno-energetsko stanje

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} \quad (7.4.46)$$

impulsa $-\mathbf{p}$, polarisano suprotno od z -ose. Konjugovani spinor je

$$\psi_c(x) = i\gamma^2 \psi^* = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}. \quad (7.4.47)$$

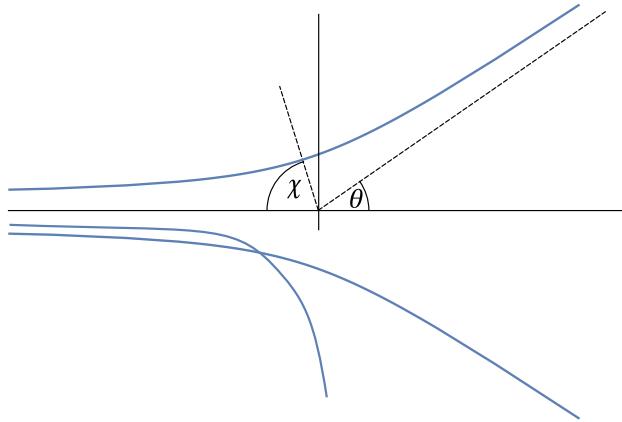
Dobijeno rešenje ima pozitivnu energiju E_p , impuls \mathbf{p} i polarizaciju duž z -ose. Ovo rešenje interpretiramo kao pozitron; konjugacija naboja menja znak spina, ali ne menja helicitet.

Glava 8

Rasejanja-1

8.1 Teorija rasejanja

Mnogi eksperimenti, posebno u fizici visokih energija, su eksperimenti rasejanja. U takvim mernjima određuje se struktura čestice i osobine interakcija među česticama koje se sudaraju. U tipičnoj eksperimentalnoj postavci imamo upadni snop koji se sudara sa nepokretnom metom i pri tome rasejava, dajući karakterističnu sliku na ekranu ili detektoru¹: fizička veličina koja opisuje rezultat je diferencijalni presek rasejanja.



Problem se definiše na sledeći način. Upadni snop čestica brzine \mathbf{v}_0 , dobro lokalizovan u poprečnom pravcu, sudara se sa metom: osim brzine, upadne čestice karakterišu dodatne osobine kao što su masa, spin, izospin itd. Pošto je brzina konstantna, u klasičnom opisu trajektorije čestica upadnog snopa asymptotski su prave linije; u kvantnom opisu, stanje upadnog snopa, asymptotski, je ravan talas. Metu na kojoj se snop rasejava opisujemo u nerelativističkom slučaju potencijalom $V(\mathbf{r})$: to u osnovi znači da prepostavljamo da čestica nema unutrašnju strukturu.

¹Česta konfiguracija u eksperimentu je sudar dva snopa, ali zbog kovarijantnosti uvek (osim za bezmasene čestice, npr. fotone) možemo da predemo u referentni sistem u kome čestice jednog snopa miruju.

Pretpostavka da je potencijal lokalizovan u oblast dimenzija a ,

$$V(\mathbf{r}) \approx 0 \text{ za } r > a, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0, \quad (8.1.1)$$

znači da su i posle sudara čestice asimptotski slobodne: stanja koja razmatramo su nevezana stanja čestice. Na primer Kulonove interakcije klasične trajektorije čestica sa energijom $E > 0$ su hiperbole – krive sa dve asimptote, ulaznom i izlaznom.

Gustina fluksa upadnog snopa je broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz jedinični poprečni presek normalno na njega, i u odnosu na nju se normiraju izmereni rezultati rasejanja. Klasično, imamo

$$j_{in} = \frac{dN_{in}}{dS dt} = \frac{dN_{in}}{dS dl} v_0 = \rho v_0, \quad (8.1.2)$$

gde gde ρ gustina čestica. Kvantno, fluks upadnog snopa je fluks verovatnoće.

Diferencijalni presek rasejanja $d\sigma$ definiše se kao broj čestica koje se raseju u prostorni ugao $d\Omega$ u jedinici vremena, podeljen fluksom upadnog snopa i brojem centara rasejanja:

$$d\sigma = \frac{1}{j_{in} N_c} \frac{dN_{out}}{dt}. \quad (8.1.3)$$

U poslednjoj formuli je

$$\frac{dN_{out}}{dt} = j_{out} r^2 d\Omega \quad (8.1.4)$$

jer je površina koja odgovara prostornom uglu $d\Omega$, $dS = r^2 d\Omega$. Diferencijalni presek se zapravo računa i meri u asimptotskoj oblasti, $r \rightarrow \infty$. Za jedan centar rasejanja $V(\mathbf{r})$, dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_{out} r^2}{j_{in}}. \quad (8.1.5)$$

Ovaj izraz opisuje rasejanje u tri dimenzije: diferencijalni presek ima dimenzijske površine. U jednodimenzionim problemima imamo samo dva ugla rasejanja, 0 i π , a diferencijalni presek se svodi na koeficijente refleksije i transmisije, (6.3.27). *Totalni presek rasejanja* σ dat je sa

$$\sigma = \int d\sigma. \quad (8.1.6)$$

Diferencijalni presek za rasejanje na Kulonovom potencijalu je u klasičnoj mehanici dat Raderfordovom formulom,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4m^2 v_0^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (8.1.7)$$

gde je ugao rasejanja θ ugao između upadne i izlazne asimptote. Izračunaćemo ovaj diferencijalni presek u nerelativističkoj kvantnoj mehanici, a zatim i njegovu relativističku popravku.

8.2 Rasejanje u kvantnoj mehanici

U kvantnoj mehanici postoje dva načina da se pristupi problemu rasejanja. Jedna mogućnost je da se odredi evolucija inicijalne talasne funkcije, $|\psi(t = -\infty)\rangle$; obično se prepostavlja da je to ravan talas koji opisuje upadni snop čestica. Njegov razvoj po izlaznim (finalnim) ravnim talasima daje, za fiksirani ugao rasejanja, verovatnoću rasejanja. Kada je potencijal interakcije u odnosu na vrednosti kinetičke energije mali, ove verovatnoće mogu se dobiti metodom vremenski zavisne perturbacije. Sa druge strane, ako potencijal ne zavisi od vremena, može da se primeni i stacionarni pristup: da se rešavanjem vremenski nezavisne Šredingerove jednačine nađe stacionarno stanje čestice (zbir upadnog i izlaznog talasa) koje je u skladu sa zadatim graničnim i početnim uslovima.

Formulišimo ovo preciznije. Prepostavimo da je hamiltonijan čestice zbir slobodnog hamiltonijana $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ i interakcije $V(\mathbf{r})$,

$$H = H_0 + V(\mathbf{r})e^{-\epsilon|t|}. \quad (8.2.8)$$

Potencijal V smo pomnožili eksponencijalnim faktorom koji u dalekoj prošlosti i budućnosti ‘isključuje’ interakciju pa su asimptotski, čestice slobodne a njihova dinamika opisana sa H_0 . ϵ je mala pozitivna konstanta. Označimo stanje interagujuće čestice sa $|\psi(t)\rangle$; inicijalno, imamo

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |\phi_i(t)\rangle \quad (8.2.9)$$

gde je $|\phi_i(t)\rangle$ ravan talas zadate energije i impulsa, stacionarno stanje slobodne čestice²

$$\phi_i(t) = e^{-iE_i t + i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}. \quad (8.2.10)$$

Stanje $|\psi(t)\rangle$ evoluira po hamiltonijanu H i određeno je evolucionim operatorom U ,

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t') |\psi(t')\rangle = \lim_{t' \rightarrow -\infty} U(t, t') |\phi_i(t')\rangle. \quad (8.2.11)$$

U dalekoj budućnosti, $t \rightarrow \infty$, hamiltonijan se redukuje na slobodni hamiltonijan, pa su finalna stacionarna stanja takođe ravnii talasi. Amplituda verovatnoće da čestica u dalekoj budućnosti bude u nekom od finalnih stanja

$$\phi_f(t) = e^{-iE_f t + i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}} \quad (8.2.12)$$

je projekcija stanja čestice $|\psi(t = \infty)\rangle$ na $|\phi_f(t = \infty)\rangle$,

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t' \rightarrow -\infty} \langle \phi_f(t) | U(t, t') | \phi_i(t') \rangle. \quad (8.2.13)$$

Gornji izraz zadaje matrične elemente *matrice rasejanja* odnosno *S-matrice*. Kako je verovatnoća da sistem bude u nekom od svih mogućih finalnih stanja jednaka jedinici,

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1, \quad (8.2.14)$$

zaključujemo da je *S-matrica* unitarna. To nije neobično jer, ako ne gledamo precizno i zane-marimo domene definisanosti, limese itd, imamo $S = U(\infty, -\infty)$.

²Zbog relacija neodređenosti inicijalno stanje bi zapravo trebalo da bude talasni paket, jer stanje definisanog impulsa i energije nije lokalizovano.

8.3 Grinova funkcija za slobodnu nerelativističku česticu

Drugi metod, metod stacionarnog stanja, podrazumeva da potencijal ne zavisi od vremena, što između ostalog znači da je rasejanje elastično tj. da se održava energija. Hamiltonian čestice je kao i ranije zbir kinetičke i potencijalne energije,

$$H = H_0 + V = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) . \quad (8.3.15)$$

Stacionarna Šredingerova jednačina za česticu u potencijalu $V(\mathbf{r})$ je

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r})\psi = E\psi , \quad (8.3.16)$$

odnosno

$$\left(\Delta + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = \frac{2mV}{\hbar^2} \psi(\mathbf{r}) . \quad (8.3.17)$$

Pošto je jednačina (8.3.17) linearna, jedan od metoda da se ona reši je metod Grinove funkcije.

Intuitivno, metod se svodi na rešavanje analogne jednačine za tačkasti izvor i primenu principa superpozicije. Zato ćemo prvo definisati Grinovu funkciju za slobodnu stacionarnu Šredingerovu jednačinu,

$$(\Delta + k_0^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} . \quad (8.3.18)$$

Jednačina (8.3.18) može da se reši razvojem u Furijeov integral. Iz njene translacione invarijantnosti sledi da je rešenje oblika

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k . \quad (8.3.19)$$

Koristeći razvoj δ -funkcije,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k , \quad (8.3.20)$$

za Furijeove komponente $\tilde{G}(\mathbf{k})$ dobijamo

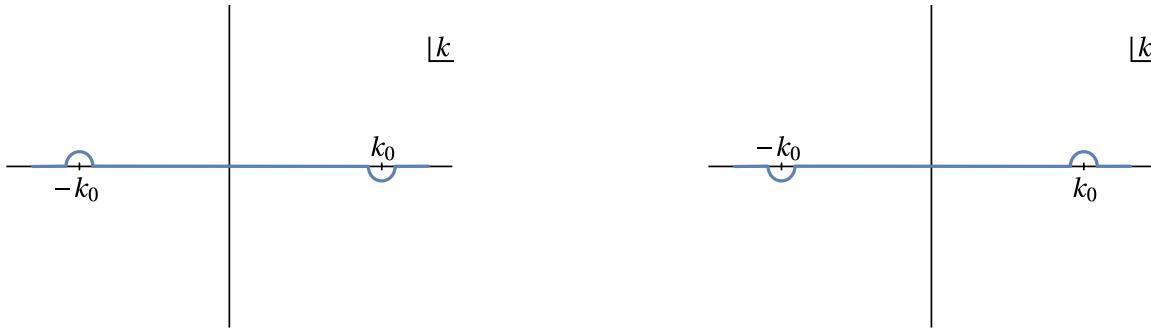
$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2 - k_0^2} . \quad (8.3.21)$$

Međutim, kada ovaj izraz zamenimo u prostornu Grinovu funkciju (8.3.19), dobijamo divergentan integral koji ima singularitete u $k^2 = k_0^2$, odnosno za vrednosti impulsa koja odgovaraju svojstvenim stanjima hamiltonijana slobodne čestice. Divergenciju eksplicitno vidimo integracijom u sfernim koordinatama:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 - k_0^2} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 - k_0^2} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{k dk}{k^2 - k_0^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikr}}{k^2 - k_0^2} dk .$$

Vrednost poslednjeg integrala odnosno način obilaska polova $k = \pm k_0$ zapravo treba definisati, i kao što ćemo videti tu definiciju određuju granični uslovi za zadati problem. Integral se računa primenom Žordanove leme, tako što se integral po realnoj osi dopuni integralom po gornjem polukrugu (beskonačnog poluprečnika) i time zatvori kontura integracije u kompleksnoj ravni: rezultat integrala se onda dobija primenom Košijeve teoreme o reziduumu. Izbor gornjeg polukruga definisan je uslovima Žordanove leme, odnosno zahtevom da u limesu $|k| \rightarrow \infty$ integral po dopunskoj polukružnoj konturi bude nula. Ovde je $r > 0$, pa podintegralna funkcija po $|k|$ eksponencijalno opada u gornjoj poluravni $\text{Im } k > 0$, što obezbeđuje da integral po polukrugu teži nuli.



Ako prepostavimo da je pol $k = k_0$ pomeren u gornju a pol $k = -k_0$ u donju poluravan kao na levoj slici gore, imamo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikr}}{k^2 - k_0^2} dk = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikr}}{k^2 - k_0^2 + i\epsilon} dk = 2\pi i \frac{e^{ik_0 r}}{2k_0} , \quad (8.3.22)$$

pa za Grinovu funkciju dobijamo

$$G^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (8.3.23)$$

Suprotan obilazak polova (desna slika) daje

$$G^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (8.3.24)$$

a ako integral definišemo kao Košijevu glavnu vrednost odnosno kao poluzbir doprinosa oba pola, dobijamo

$$G^1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (8.3.25)$$

8.3.1 Rasejanje na lokalizovanom potencijalu

Da bismo razumeli koja od gornjih Grinovih funkcija odgovara problemu rasejanja koji rešavamo (odnosno zadatim graničnim uslovima), nastavićemo sa još nekoliko koraka računa.

Vratimo se na stacionarnu jednačinu (8.3.17). Koristeći Grinovu funkciju, njen rešenje možemo da napišemo kao

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') = \psi_i(\mathbf{r}) + \psi_f(\mathbf{r}) , \quad (8.3.26)$$

gde je $U(\mathbf{r}) = \frac{2mV(\mathbf{r})}{\hbar^2}$. Prvi sabirak je ravan talas $\psi_i = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$ impulsa \mathbf{k}_0 , koji opisuje upadni snop, a drugi sabirak je rasejani talas ψ_f .

Izraz (8.3.26) je u stvari integralna jednačina, ali kao što ćemo videti u nastavku, pogodna za perturbativno rešavanje. Odredimo oblik rasejanog talasa u slučaju da je potencijal lokalizovan u malom delu prostora $|\mathbf{r}'| < a$. Funkcija ψ_f nas zanima u asymptotskoj oblasti $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, odnosno za $|\mathbf{r}'| \leq a \ll r$. Iz

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} = r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) , \quad (8.3.27)$$

dobijamo

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') , \quad (8.3.28)$$

ako pretpostavimo da je Grinova funkcija data formulom (8.3.23); ovde je

$$\mathbf{k} = \frac{k_0 \mathbf{r}}{r} = k_0 \mathbf{e}_r \quad (8.3.29)$$

impuls rasejanog talasa duž radijalnog orta. Poslednja relacija može da se prepise u obliku

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} f_{\mathbf{k}}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) , \quad (8.3.30)$$

gde je

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \quad (8.3.31)$$

amplituda rasejanja. Rasejani talas ima oblik

$$\psi_f = \frac{e^{ikr}}{r} f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) . \quad (8.3.32)$$

Znači, pri rasejanju na lokalizovanom potencijalu upadni ravan talas rasejava se kao izlazni sferni talas (ne izotropan, nego deformisan funkcijom $f_{\mathbf{k}}$) koji se iz centra potencijala širi ka beskonačnosti. Lako se proverava da, da smo umesto Grinove funkcije (8.3.23) iskoristili (8.3.24) koja se dobija suprotnim obilaskom polova, za ψ_f bismo dobili upadni sferni talas, koji takođe jeste rešenje Šredingerove jednačine ali ne odgovara postavljenim graničnim uslovima rasejanja

(da je upadni snop ravan, određenog pravca impulsa). Prema tome, vidi se da fiksiranje obilaska konture u stvari odgovara fiksiranju graničnih uslova za posmatrano rešenje.

Značaj amplitude $f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi)$ je u tome što ona daje diferencijalni presek rasejanja. U našem slučaju upadni fluks tj. struja verovatnoće upadnog talasa ψ_i je

$$j_i = \frac{\hbar k_0}{m} . \quad (8.3.33)$$

Za izlazni fluks relevantna je njegova radijalna komponenta. Iz radijalne komponente gradijenta

$$\nabla \psi_f|_r = \frac{\partial}{\partial r} \psi_f = f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) e^{ikr} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \approx \frac{ik f_{\mathbf{k}} e^{ikr}}{r} \quad (8.3.34)$$

dobijamo

$$j_f|_r = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f_{\mathbf{k}}|^2}{r^2} = \frac{\hbar k_0}{m} \frac{|f_{\mathbf{k}}|^2}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (8.3.35)$$

pošto je, zbog održanja energije, $k^2 = k_0^2$. Diferencijalni presek rasejanja je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}}|^2. \quad (8.3.36)$$

8.3.2 Bornova aproksimacija

Kao što smo rekli kada je potencijal interakcije mali, jednačina (8.3.28) može se rešavati perturbativno. U tom izrazu upadni ravnji talas ψ_i je rešenje nultog reda, odnosno svojstvena funkcija neperturbovanog hamiltonijana H_0 , $\psi^{(0)} = \psi_i$, dok je drugi član koji u sebi sadrži perturbaciju $U(\mathbf{r})$ popravka,

$$\psi_f = -\frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} \int d^3 r' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)} + \dots . \quad (8.3.37)$$

Prvi red teorije perturbacija dobija se kada na desnoj strani gornje jednačine umesto cele talasne funkcije uvrstimo $\psi^{(0)}$. Tada dobijamo

$$\psi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') d^3 r' , \quad (8.3.38)$$

gde smo uveli razliku upadnog i rasejanog impulsa

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 , \quad q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| = 2k \sin \frac{\theta}{2} . \quad (8.3.39)$$

Formula (8.3.38) je traženi rezultat koji opisuje rasejanje u prvom redu teorije perturbacija, i naziva se *Bornova aproksimacija*. U ovoj aproksimaciji, amplituda rasejanja $f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi)$ je Furijeova amplituda potencijala,

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int U(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}|V|\mathbf{k}_0 \rangle . \quad (8.3.40)$$

Slično kao kod perturbacije diskretnog spektra, popravka talasne funkcije zavisi od matričnih elemenata perturbacije u bazisu neperturbovanog hamiltonijana tj. u bazisu ravnih talasa. Detalnjom analizom uslova pod kojima se dobija, može da se pokaže da je Bornova aproksimacija primenljiva na slabe potencijale, $V \ll \hbar^2/(ma^2)$, i brze upadne snopove, $V \ll \hbar^2 k/(ma)$.

Primenimo (8.3.40) na neke specijalne slučajeve. Kada imamo spor upadni snop $ka \ll 1$ koji se rasejava na sferno-simetričnom potencijalu, za amplitudu rasejanja dobijamo

$$f_{\mathbf{k}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) d^3r \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \int V(r) r^2 dr. \quad (8.3.41)$$

Koristili smo da, ako je $ka \approx 0$, onda je i $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \approx 0$ tj. $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$: rasejanje je izotropno.

Kada, sa druge strane, imamo brz upadni snop, $ka \gg 1$, u podintegralnoj funkciji (8.3.41) član $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ veoma brzo osciluje tj. ima talasnu dužinu koja je mnogo manja od karakterističnog rastojanja promena funkcije $V(\mathbf{r})$. Zato je rezultat koji se dobija integracijom približno nula (pozitivni i negativni doprinosi u integralu se potiru) svuda, osim u oblasti gde je $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \approx 0$, tj. $\theta \approx 0$. Znači: brzi snopovi se rasejavaju unapred a ugaono širenje snopa je malo.

Kao poslednji primer izračunaćemo efikasni presek rasejanja u Kulonovom potencijalu u Bornovoj aproksimaciji. Videli smo već da je za potencijal $1/r$ integral (8.3.40) divergentan: da bismo ga ‘regularizovali’, za elektrostatički potencijal jezgra uzećemo Jukavin potencijal,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} e^{-\alpha r}, \quad (8.3.42)$$

u limesu $\alpha \rightarrow 0$. Amplituda rasejanja je

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{mZe^2}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \sin qr e^{-\alpha r} dr = \frac{2mZe^2}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \alpha^2}.$$

U limesu $\alpha \rightarrow 0$ za efikasni presek se dobija

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{m^2 Z^2 e^4}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (8.3.43)$$

odnosno, Raderfordova formula. Ovo potpuno poklapanje klasičnog i kvantnog rezultata je posledica pretpostavki uvedenih Bornovom aproksimacijom.

8.4 Propagator za stanja diskretnog spektra

Generalno, naziv *propagator* koristi se za Grinovu funkciju jednačine koja zavisi od vremena. Propagator $G(t, \mathbf{r}, t', \mathbf{r}')$ za Šredingerovu jednačinu je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = \delta(t - t') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (8.4.44)$$

uz uslov $G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = 0$ za $t' < t$.

Pokažimo da je, kada je hamiltonijan konzervativan a njegov spektar diskretan, propagator dat izrazom

$$G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = -i\theta(t - t') \sum_n e^{-iE_n(t-t')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') , \quad (8.4.45)$$

gde su ψ_n svojstvena stanja hamiltonijana za svojstvene vrednosti E_n . Pošto je

$$\frac{d}{dt} \theta(t - t') = \delta(t - t') ,$$

vremenski izvod desne strane jednačine (8.4.45) je

$$i \frac{\partial}{\partial t} G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = \delta(t - t') \sum_n \psi_n(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') - i\theta(t - t') \sum_n E_n e^{-iE_n(t-t')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') . \quad (8.4.46)$$

Sa druge strane, koristeći činjenicu da su $\psi_n(\mathbf{r})$ svojstvena stanja hamiltonijana, dobijamo

$$H G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = -i\theta(t - t') \sum_n E_n e^{-iE_n(t-t')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') . \quad (8.4.47)$$

Oduzimanjem jednačina (8.4.46) i (8.4.47) dobijamo traženu relaciju.

Evolucija kvantnih sistema je odredjena sa evolucionim operatorma $U(t, t')$, tj.

$$|\psi(t)\rangle \theta(t - t') = U(t, t') |\psi(t')\rangle . \quad (8.4.48)$$

Množeći jednačinu vremenske evolucije vektora stanja sa desne strane sa $\langle \mathbf{r}|$ dobijamo

$$\langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle \theta(t - t') = \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | U(t, t') | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi(t') \rangle , \quad (8.4.49)$$

gde smo sa leve strane jednačine ubacili jedinicu. Za konzervativne sisteme je $U(t, t') = e^{-iH(t-t')}$, pa gornja formula postaje

$$\psi(t, \mathbf{r}) \theta(t - t') = \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | e^{-iH(t-t')} | \mathbf{r}' \rangle \psi(t', \mathbf{r}') \quad (8.4.50)$$

Dalje ubacivanjem komplettnog skupa svojstvenih stanja hamiltonijana lako se dobija da je

$$\langle \mathbf{r} | e^{-iH(t-t')} | \mathbf{r}' \rangle = \sum_{n,m} \langle \mathbf{r} | n \rangle \langle m | \mathbf{r}' \rangle e^{-iE_n(t-t')} \delta_{nm} , \quad (8.4.51)$$

tako da je

$$\langle \mathbf{r} | e^{-iH(t-t')} | \mathbf{r}' \rangle = \theta(t - t') \sum_n e^{-iE_n(t-t')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}') . \quad (8.4.52)$$

Na osnovu ovog rezultata zaključujemo da je Grinova funkcija matrični element evolucionog operatora

$$G(t, \mathbf{r}, t', \mathbf{r}') = -i \langle \mathbf{r} | e^{-iH(t-t')} | \mathbf{r}' \rangle \theta(t - t') . \quad (8.4.53)$$

Grinova funkcija je propagator.

8.5 Propagator za slobodnu nerelativističku česticu

Generalno, naziv *propagator* koristi se za Grinovu funkciju jednačine koja zavisi od vremena. Propagator $G(t, \mathbf{r}, t', \mathbf{r}')$ za Šredingerovu jednačinu je rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = \delta(t - t') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (8.5.54)$$

uz uslov $G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = 0$ za $t' > t$.

Propagator za slobodnu nerelativističku česticu zadovoljava jednačinu

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} \right) G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = \delta(t - t') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (8.5.55)$$

Iz homegenosti prostor-vremena sledi da je Grinova funkcija translaciono invarijantna, tj.

$$G(t, \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') = G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

i može se razviti u Furijeov integral,

$$G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3k \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} .$$

Zamenom u (8.5.55) dobijamo da je Furijeova amplituda

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}} , \quad (8.5.56)$$

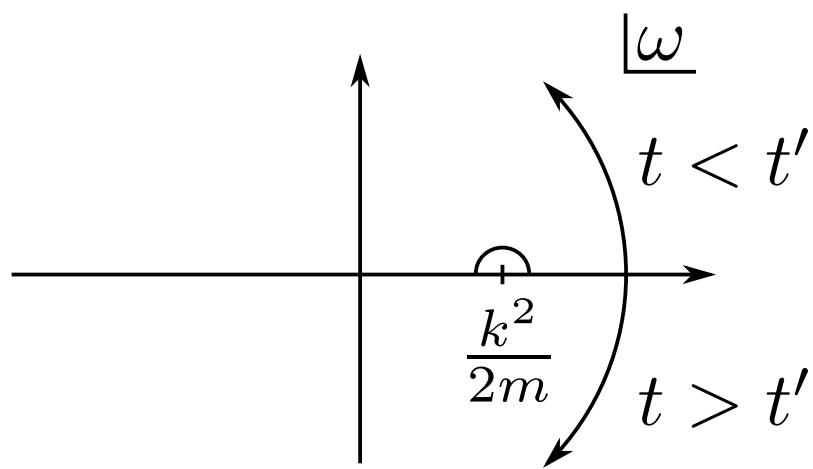
a ceo propagator

$$G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}} .$$

Integral po frekvencama nije dobro definisan jer je singularan, i kao i ranije, modifikovaćemo konturu integracije u kompleksnoj ω -ravni da izbegnemo singularitet. Način obilaska pola $\omega = \frac{k^2}{2m}$ određen je graničnim uslovom, u ovom slučaju to je uslov $G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ za $t' > t$. Prema tome, doprinos pola je nenulti samo za $t - t' > 0$, što znači da pol treba da se pomeri u donju ω -poluravan, odnosno obiđe sa gornje strane. Na slici 8.1 je prikazana kontura integracije.

Rezultat je nerelativistički propagator za slobodnu česticu,

$$G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') = -i\theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{-i\frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')} . \quad (8.5.57)$$



Slika 8.1: Kontura integracije u kompleksnoj ω ravnini.

Glava 9

Rasejanja-2

9.1 Rasejanje u relativističkoj kvantnoj mehanici: Fajnmanov propagator

Grinova funkcija za slobodnu Dirakovu jednačinu, $S(x - y)$, je rešenje jednačine

$$(i\cancel{p} - m)S(x - y) = \mathbb{I} \delta^{(4)}(x - y) , \quad (9.1.1)$$

\mathbb{I} je jedinična 4×4 matrica u prostoru spinora. U komponentama, jednačina glasi

$$(i\cancel{p} - m)^a{}_b S^b{}_c(x - y) = \delta^a_c \delta^{(4)}(x - y) . \quad (9.1.2)$$

Propagator $S(x - y)$ možemo, zbog homogenosti prostor-vremena, da predstavimo kao

$$S(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{S}(p) e^{-ip(x-y)} , \quad (9.1.3)$$

gde je $\tilde{S}(p)$ Furijeova amplituda tj. Grinova funkcija u impulsnom prostoru. Zamenom (9.1.3) u (9.1.1) dobijamo

$$(\cancel{p} - m)\tilde{S}(p) = \mathbb{I} , \quad (9.1.4)$$

odakle je

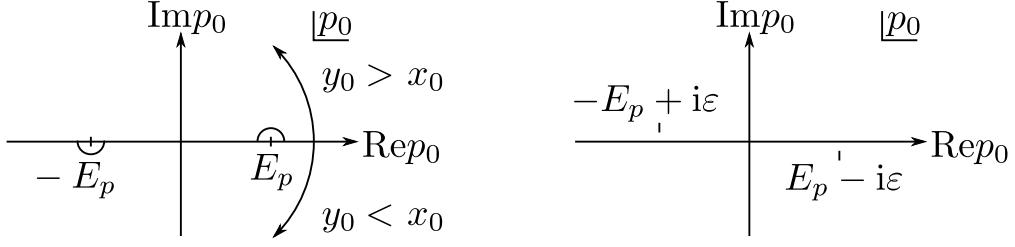
$$\tilde{S}(p) = \frac{1}{\cancel{p} - m} = \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} . \quad (9.1.5)$$

Grinova funkcija u koordinatnom prostoru data je sa

$$S(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} , \quad (9.1.6)$$

i da bismo je potpuno definisali treba da fiksiramo granične uslove, što ćemo uraditi pri integraciji. U prvom koraku, razdvojićemo integracije po energiji i impulsu,

$$S(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{\cancel{p} + m}{p_0^2 - E_p^2} e^{-ip_0(x^0 - y^0)} . \quad (9.1.7)$$



Slika 9.1: Levo je prikazana Fajnmanova kontura integracije, dobijena deformacijom integracije po realnoj osi. Na desnoj slici su, ekvivalentno pomereni polovi.

Podintegralna funkcija je singularna za vrednosti $p_0 = \pm E_p$ koje su njeni polovi, pa je integral (9.1.7) beskonačan. Da bismo definisali integral preći ćemo u kompleksnu p_0 -ravan, i integraliti po konturi prikazanoj na levoj slici 9.1. Ova kontura integracije se naziva Fajnmanovom, a Fajnmanov propagator je Grinova funkcija kod koje integralimo po Fajnmanovoj konturi,

$$S_F(x - y) = \int_{C_F} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} . \quad (9.1.8)$$

Alternativno, umesto da deformatišemo konturu integracije možemo pomeriti polove: pozitivan pol na dole, a negativan na gore. To postižemo dodavanjem sabirka $+i\epsilon$, gde je ϵ mali pozitivan realan broj, u imenilac,

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} . \quad (9.1.9)$$

Pomeranje polova opisano gore, uz integraciju po realnoj osi je prikazano na desnoj slici u 9.1. Polovi podintegralne funkcije u (9.1.9) su odredjeni sa

$$p^2 - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - E_p^2 + i\epsilon = 0$$

odakle lako nalazimo da su polovi

$$p_0 = \pm E_p \mp i\epsilon . \quad (9.1.10)$$

Za $x^0 > y^0$ konturu dopunjujemo polukružnicom sa donje, a za $x^0 < y^0$ sa gornje strane, čime obezbeđujemo konvergentnost integrala po odgovarajućim polukružnicama. Primenom Košijeve teoreme dobijamo

$$S_F(x - y) = \begin{cases} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} (-2\pi i) \operatorname{Res} \left(\frac{\not{p} + m}{p_0^2 - E_p^2} e^{-ip_0(x^0 - y^0)} \right) \Big|_{p_0=E_p}, & x^0 > y^0 \\ \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\not{p} + m}{p_0^2 - E_p^2} e^{-ip_0(x^0 - y^0)} \right) \Big|_{p_0=-E_p}, & x^0 < y^0 \end{cases}$$

a računanjem reziduumu,

$$S_F(x - y) = -i\theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{E_p \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{2E_p} e^{-iE_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

$$\begin{aligned}
& + i\theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-E_p \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m}{-2E_p} e^{iE_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\
& = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left(\frac{\not{p} + m}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \theta(x^0 - y^0) + \frac{-\not{p} + m}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \theta(y^0 - x^0) \right),
\end{aligned}$$

gde smo u drugom integralu izvršili smenu $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ i uveli $p^\mu = (E_p, \mathbf{p})$. Uvođenjem projektorâ na pozitivno i negativno-energetska rešenja, Fajnmanov propagator postaje

$$S_F(x - y) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{m}{E_p} \left(\Lambda_+(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \theta(x^0 - y^0) + \Lambda_-(p) e^{ip \cdot (x-y)} \theta(y^0 - x^0) \right), \quad (9.1.11)$$

a ako označimo pozitivno i negativno-energetska rešenja impulsa \mathbf{p} i polarizacije r sa

$$\psi_{\mathbf{p},r}^{(+)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(\mathbf{p}, r) e^{-ip \cdot x}, \quad \psi_{\mathbf{p},r}^{(-)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} v(\mathbf{p}, r) e^{ip \cdot x}, \quad (9.1.12)$$

može se prepisati u obliku

$$\begin{aligned}
S_F(x - y) &= -i\theta(x^0 - y^0) \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p},r}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{\mathbf{p},r}^{(+)}(y) \\
&+ i\theta(y^0 - x^0) \int d^3 p \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p},r}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\mathbf{p},r}^{(-)}(y).
\end{aligned} \quad (9.1.13)$$

Kako je $\lim_{x^0 \rightarrow \infty} \theta(x^0 - y^0) = 1$ vidimo da pozitivno-energetska rešenja propagiraju unapred u vremenu, dok negativno-energetska rešenja propagiraju unazad. To se vidi i iz jednačina koje daju vremensku evoluciju pozitivno i negativno-energetskih rešenja

$$\begin{aligned}
\theta(x^0 - y^0) \psi^{(+)}(x) &= i \int d^3 y S_F(x - y) \gamma^0 \psi^{(+)}(y), \\
\theta(y^0 - x^0) \psi^{(-)}(x) &= -i \int d^3 y S_F(x - y) \gamma^0 \psi^{(-)}(y).
\end{aligned}$$

9.2 Elektron u slabom elektromagnetskom polju

Dirakova jednačina za elektron nanelektrisanja $q = e$ u elektromagnetnom polju A^μ je

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\Psi = 0. \quad (9.2.14)$$

Grinova funkcija za gornju, ‘celu’ jednačinu, $S'_F(x, y)$, je rešenje jednačine

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)S'_F(x, y) = \mathbb{I} \delta^{(4)}(x - y), \quad (9.2.15)$$

i može biti izražena preko Grinove funkcije za slobodnu Dirakovu jednačinu, $S_F(x, y)$.

Jednačinu (9.2.14) ćemo prepisati u obliku

$$(i\partial - m)\Psi = eA\Psi . \quad (9.2.16)$$

Ako u jednačini (9.2.16) desnu stranu interpretiramo kao izvor, onda lako možemo da je prepišemo u integralnom obliku:

$$\Psi(x) = \psi(x) + \int d^4y S_F(x-y) eA(y)\Psi(y) . \quad (9.2.17)$$

$\psi(x) = \psi^{(0)}(x)$ je rešenje homogene jednačine.

Gornju jednačinu rešavaćemo perturbativno. Prepostavićemo da je kompletno rešenje perturbativni razvoj po (maloj) konstanti interakcije e :

$$\Psi(x) = \psi(x) + \psi^{(1)}(x) + \psi^{(2)}(x) + \dots \quad (9.2.18)$$

gde je $\psi^{(n)}$ član reda e^n . Zamenom rešenja (9.2.18) u jednačinu (9.2.16) dobijamo

$$\begin{aligned} (i\partial - m)\psi^{(0)} &= 0 \\ (i\partial - m)\psi^{(1)} &= eA\psi^{(0)} \\ (i\partial - m)\psi^{(2)} &= eA\psi^{(1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rešavajući jednačinu po jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= \int d^4y_1 S_F(x-y_1) eA(y_1)\psi^{(0)}(y_1) , \\ \psi^{(2)}(x) &= \int d^4y_2 d^4y_1 S_F(x-y_1) eA(y_1)S_F(y_1-y_2) eA(y_2)\psi^{(1)}(y_2) , \end{aligned} \quad (9.2.19)$$

itd. Ukupni propagator je dat kao perturbativni razvoj

$$\begin{aligned} S'_F(x, y) &= S_F(x-y) + e \int d^4x_1 S_F(y-x_1) A(x_1) S_F(x_1-x) \\ &+ e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 S_F(y-x_1) A(x_1) S_F(x_1-x_2) A(x_2) S_F(x_2-x) + \dots \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

9.2.1 Rasejanje elektrona

Razmotrimo rasejanje elektrona na elektromagnetnom potencijalu. Upadne čestice su asimptotski slobodni pozitivno-energetski elektroni impulsa p i polarizacije s u dalekoj prošlosti, $t \rightarrow -\infty$; inicijalno stanje je $\psi_i(x)$. Finalno stanje u dalekoj budućnosti je takođe slobodno elektronsko stanje, i može se razviti po bazisu ravnih talasa $\psi_f(x)$. Inicijalno stanje evoluira u skladu sa dinamičkom jednačinom (9.2.17):

$$\Psi_i(x) = \psi_i(x) + \int d^4y S_F(x-y) eA(y)\Psi_i(y) \quad (9.2.21)$$

uz granični uslov

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Psi_i(x) = \psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_p}} u(\mathbf{p}, s) e^{-ip \cdot x} .$$

Rasejani talas je

$$\Psi_i(x) - \psi_i(x) = \int d^4y S_F(x-y) eA(y) \Psi_i(y) , \quad (9.2.22)$$

a amplituda verovatnoće da rasejani talas u dalekoj budućnosti bude finalno stanje $\psi_f(x)$ je

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \Psi_i(x) \quad (9.2.23)$$

Inicijalno i finalna stanja karakterisani su svojim impulsima i polarizacijama. Primenjujući (9.2.21) i (9.1.13), dobijamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \left(\psi_i(x) + e \int d^4y S_F(x-y) A(y) \Psi_i(y) \right) \\ &= \delta_{fi} - ie \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^3x \psi_{\mathbf{q},s}^\dagger(x) \int d^3p d^4y \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p},r}^{(+)}(x) \bar{\psi}_{\mathbf{p},r}^{(+)}(y) A(y) \Psi_i(y) . \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

Iz relacija ortogonalnosti dalje sledi

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) A(x) \Psi(x) . \quad (9.2.25)$$

9.2.2 Rasejanje pozitrona

Prisustvo upadnog pozitrona pozitivne energije u dalekoj prošlosti ($t \rightarrow -\infty$) ekvivalentno je sa prisustvu negativno-energetskog elektrona u dalekoj budućnosti. Dakle, inicijalno stanje koje opisuje pozitron impulsa p i polarizacije s je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_i(x) = \psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{E_p}} v(\mathbf{p}, s) e^{ip \cdot x} .$$

Ovo stanje evoluira unazad u vremenu prema jednačini

$$\Psi_i(x) = \psi_i(x) + e \int d^4y S_F(x-y) A(y) \Psi(y) . \quad (9.2.26)$$

Za $t \rightarrow -\infty$ rasejani talas je

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} e \int d^4y S_F(x-y) eA(y) \Psi_i(y) = ie \int d^3p \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p},r}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\mathbf{p},r}^{(-)}(y) A(y) \Psi_i(y) . \quad (9.2.27)$$

Amplituda verovatnoće da u $t = -\infty$ dobijemo negativno-energetsко rešenje $\psi_f(x)$ je

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \left(\psi_i(x) + ie \int d^3p d^4y \sum_{r=1}^2 \psi_{\mathbf{p},r}^{(-)}(x) \bar{\psi}_{\mathbf{p},r}^{(-)}(y) A(y) \Psi_i(y) \right)$$

$$= \delta_{fi} + ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) A(x) \Psi(x) . \quad (9.2.28)$$

Razlika u odnosu na rasejanje elektrona je u znaku uz ie u amplitudi prelaza.

$$\text{UBACITI } CS_{fi,\text{elektron}} C = S_{fi,\text{pozitron}}$$

9.3 Rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu

U ovom poglavljvu razmatraćemo rasejanje elektrona na jezgru koje miruje u koordinatnom početku. Potencijal elektrostatičkog polja jezgra je Kulonov potencijal:

$$A^0 = -\frac{Ze}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{A} = 0 ,$$

gde je $-Ze$ nailektrisanje jezgra. Inicijalno stanje je elektron četvoroimpulsa $p_i^\mu = (E_i, \mathbf{p}_i)$ i polarizacije s_i

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_i}} u(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x} . \quad (9.3.29)$$

Analogno, finalno stanje je takođe ravan talas

$$\psi_f(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_f}} u(\mathbf{p}_f, s_f) e^{-ip_f \cdot x} . \quad (9.3.30)$$

U najnižem redu teorije perturbacije $\Psi_i(x) = \psi_i(x)$ u izrazu za amplitudu prelaza (9.2.23). Tako u prvom redu dobijamo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -ie \int d^4x \psi_f(x) A(x) \psi_i(x) \\ &= \frac{ie^2 Z m}{V \sqrt{E_i E_f}} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) \int dt e^{i(E_f - E_i)t} \int d^3r \frac{e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} . \end{aligned} \quad (9.3.31)$$

Integracija po vremenu daje delta-funkciju tj. održanje energije, pa je

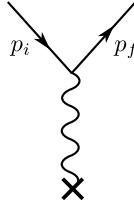
$$S_{fi} = \frac{ie^2 Z m}{V \sqrt{E_i E_f}} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) 2\pi \delta(E_f - E_i) \int d^3r \frac{e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} \quad (9.3.32)$$

Za razliku impulsa uvodimo kao i ranije oznaku $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. Integal u izrazu (9.3.32) se nalazi lako: možemo na primer da ga regularizujemo članom $-\alpha r$, $\alpha > 0$ u eksponentu podintegralne funkcije, i posle integracije pustimo limes $\alpha \rightarrow 0$:

$$I = \int d^3r \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \alpha r}}{r} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r e^{-iqr \cos \theta - \alpha r} . \quad (9.3.33)$$

Rezultat je

$$I = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2 + \alpha} \rightarrow \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} . \quad (9.3.34)$$



Slika 9.2: Fajnmanov dijagram za rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu u najnižem redu.

Nakon zamene ovog integrala u (9.3.32), dobijamo

$$S_{fi} = \frac{8i\pi^2 e^2 Zm}{V\sqrt{E_i E_f} |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^2} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i) \delta(E_f - E_i) . \quad (9.3.35)$$

Ovaj izraz sadrži δ -funkciju koja odgovara zakonu održanja energije: pošto Kulonov potencijal ne zavisi od vremena, vreme je homogeno i energija se održava. Potencijal međutim narušava homogenost prostora pa impulsi elektrona pre i posle rasejanja nisu jednaki. Fajnmanov dijagram za rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu prikazan je na slici 9.2.

Verovatnoća prelaza iz inicijalnog u neko od finalnih stanja je

$$|S_{fi}|^2 = \frac{16\pi^2 Z^2 e^4 m^2}{V^2 E_i E_f} \frac{1}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} (2\pi)^2 (\delta(E_f - E_i))^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (9.3.36)$$

gde je amplituda

$$\mathcal{M} = \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0 u(\mathbf{p}_i, s_i) . \quad (9.3.37)$$

U ovom izrazu imamo dve beskonačnosti: jedna je kvadrat δ -funkcije, a druga zapremina prostora V . Obe beskonačnosti potiču od toga što smo u računu upadni snop opisali ravnim talasom ψ_i koji nije lokalizovan ni u prostoru ni u vremenu; slično, finalna stanja ψ_f su ravni talasi. Sa jedne strane, jasno je da svaki realni eksperiment traje konačno vreme T i odvija se u konačnoj zapremini V ; sa druge strane, račun koji koristi ravne talase neuporedivo je lakši od računa koji bi koristio npr. Gausove pakete za opis upadnog i izlaznih stanja.

Međutim, imajući gore rečeno u vidu, obe beskonačnosti možemo relativno jednostavno da regularizujemo ‘rukom’. Kvadrat δ -funkcije se regularizuje vremenom T trajanja procesa (jer njemu i odgovara). Konkretno, pod integralom važi

$$2\pi(\delta(E_f - E_i))^2 = \delta(E_f - E_i) \int dt e^{i(E_f - E_i)t} = \delta(E_f - E_i) \int dt = \delta(E_f - E_i) T , \quad (9.3.38)$$

pa je verovatnoća prelaza u jedinici vremena data sa

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{Z^2 e^4 m^2}{V^2 E_i E_f} \frac{32\pi^3}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} \delta(E_f - E_i) |\mathcal{M}|^2 . \quad (9.3.39)$$

Beskonačnost prostora već smo regularizovali time što smo stanja (9.3.29) i (9.3.30) normirali na zapreminu

$$\int d^3x \psi^\dagger \psi = 1 , \quad (9.3.40)$$

odnosno koristili tzv. ‘box’-normalizaciju. U ovoj normalizaciji talasne funkcije ϕ su periodične funkcije Dekartovih koordinata sa periodima L_1 , L_2 i L_3 (često se uzima $L_1 = L_2 = L_3 = a$):

$$\phi(x + L_1, y, z) = \phi(x, y, z), \quad \phi(x, y + L_2, z) = \phi(x, y, z), \quad \phi(x, y, z + L_3) = \phi(x, y, z).$$

Zbog periodičnih graničnih uslova impuls ravnih talasa $\phi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ je diskretan,

$$\mathbf{k} = 2\pi \left(\frac{n_1}{L_1} \frac{n_2}{L_2} \frac{n_3}{L_3} \right), \quad (9.3.41)$$

gde su n_1 , n_2 i n_3 celi brojevi: za velike L_1 , L_2 i L_3 spektar impulsa postaje kontinualan. Elektron se ne rasejava u stanje tačno određenog impulsa, već u interval $(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_f + d^3 p_f)$, a broj stanja čiji je impuls u ovom intervalu je

$$d^3 n = dn_1 dn_2 dn_3 = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_f. \quad (9.3.42)$$

Broj čestica koje se raseju u zadatom pravcu u jedinici vremena je

$$dN = \frac{|S_{fi}|^2}{T} d^3 n. \quad (9.3.43)$$

Dalje, da bismo izračunali diferencijalni presek za rasejanje treba da odredimo gustinu fluksa upadnih čestica. Za ravne talase impulsa \mathbf{p} normirane na kutiju gustina fluksa data je sa

$$\mathbf{j} = \bar{\psi} \gamma \psi = \frac{\mathbf{p}}{EV},$$

pa je diferencijalni presek

$$d\sigma = \frac{dN}{N_c |\mathbf{j}|} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{VE_i}{|\mathbf{p}_i|} \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (9.3.44)$$

Ako zapreminske elemente $d^3 p_f$ izrazimo u sfernim koordinatama,

$$d^3 p_f = |\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f| d\Omega = E_f |\mathbf{p}_f| dE_f d\Omega, \quad (9.3.45)$$

gde je $d\Omega$ prostorni ugao, za diferencijalni presek Kulonovog rasejanja dobijamo

$$d\sigma = \frac{4m^2 e^4 Z^2}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} |\mathcal{M}|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} dE_f d\Omega. \quad (9.3.46)$$

Gornja formula daje nam diferencijalni presek kada je upadni snop polarisan i kada merimo izlaznu polarizaciju elektrona: zavisnost od polarizacije nalazi se u amplitudi \mathcal{M} . Međutim, ako je upadni snop elektrona nepolarizovan i ako se u eksperimentu ne meri polarizacija rasejanog elektrona, gornji rezultat treba da usrednjimo po polarizacijama upadnog i sumiramo po polarizacijama finalnog elektrona. Tako dobijamo usrednjeni presek za rasejanje:

$$\overline{d\sigma} = \frac{4m^2 e^4 Z^2}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta(E_f - E_i) \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} dE_f d\Omega, \quad (9.3.47)$$

gde je

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f=1}^2 |\mathcal{M}|^2 = \bar{u}_a(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma_{ab}^0 u_b(\mathbf{p}_i, s_i) \bar{u}_c(\mathbf{p}_i, s_i) \gamma_{cd}^0 u_d(\mathbf{p}_f, s_f) . \quad (9.3.48)$$

U poslednjoj formuli smo eksplisitno uveli spinorske indekse $a, \dots = 1, \dots, 4$. Grupisanjem članova u prethodnom izrazu, dobijamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{8m^2} \text{tr}((\not{p}_f + m)\gamma^0(\not{p}_i + m\gamma^0)) = \frac{1}{2m^2} (2E_f E_i - p_f \cdot p_i + m^2) . \quad (9.3.49)$$

Neka se upadni elektron kreće duž z -ose, i rasejava pod uglom θ . Onda imamo

$$p_i^\mu = (E_i, 0, 0, |\mathbf{p}_i|), \quad p_f^\mu = (E_f, |\mathbf{p}_f| \sin \theta \cos \varphi, |\mathbf{p}_f| \sin \theta \sin \varphi, |\mathbf{p}_f| \cos \theta) ,$$

pa se za usrednjenu amplitudu dobija

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2m^2} (2E_f E_i - |\mathbf{p}_f| |\mathbf{p}_i| \cos \theta + m^2) . \quad (9.3.50)$$

Koristeći ovaj izraz dobijamo nepolarizovani presek za Kulonovo rasejanje, tzv. Motovu formulu,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4 E_i^2}{4 |\mathbf{p}_i|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{E_i^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) . \quad (9.3.51)$$

U nerelativističkom limesu $\frac{|\mathbf{p}_i|}{E_i} \rightarrow 0$ ona prelazi u Raderfordovu formulu za rasejanje (8.3.43).

9.4 Rasejanje pozitrona na Kulonovom potencijalu

Inicijalno stanje pozitrona u dalekoj prošlosti je ekvivalentno prisustvu negativno-energetskog elektrona u dalekoj budućnosti,

$$\tilde{\psi}_i(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_f}} v(\mathbf{p}_f, s_f) e^{ip_f \cdot x} . \quad (9.4.52)$$

Energija ovog negativno-energetskog elektrona je $-E_f$ a impuls $-\mathbf{p}_f$. Ovo stanje evolira unazad u vremenu. Analogno, finalno stanje je takođe negativno-energetski elektron

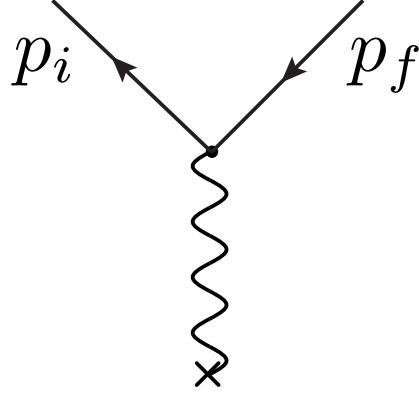
$$\tilde{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_i}} v(\mathbf{p}_i, s_i) e^{ip_i \cdot x} \quad (9.4.53)$$

u $t \rightarrow -\infty$. Amplituda prelaza se dobija primenom formule (9.2.28). U najnižem redu teorije perturbacije ona daje

$$S_{fi} = -\frac{ie^2 Zm}{V \sqrt{E_i E_f}} \bar{v}(\mathbf{p}_i, s_i) \gamma^0 v(\mathbf{p}_f, s_f) 2\pi \delta(E_f - E_i) \int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} . \quad (9.4.54)$$

Fajnmanov dijagram za rasejanje pozitrona na Kulonovom potencijalu je prikazan na slici 9.3. Obratite pažnju na smer strelica na ovom dijagramu.

Primenom procedure iz prethodnog poglavља, za usrednjeni diferencijalni presek dobija se isti rezultat kao za rasejanje elektrona.



Slika 9.3: Dijagram za rasejanje poyitrona na Kulonovom potencijalu.

9.5 Rasejanje elektrona na protonu

U ovom poglavlju analiziraćemo rasejanje elektrona na protonu. Proton i elektron interaguju preko elektromagnetskog polja, tj. razmenom fotona. Potencijal A^μ elektromagnetskog polja zadovoljava Maksvelove jednačine

$$(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu = J^\mu . \quad (9.5.55)$$

U Lorencovoj kalibraciji, $\partial_\mu A^\mu = 0$, jednačine imaju jednostavniji oblik, $\square A^\mu = J^\mu$. Da bismo rešili ove jednačine uvešćemo Grinovu funkciju: ona je zadata jednačinom (u Lorencovoj kalibraciji)

$$g^{\mu\nu}\square_x D_{\nu\rho}(x-y) = \delta_\rho^\mu \delta^{(4)}(x-y) . \quad (9.5.56)$$

Rešenje gornje jednačine je

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)} , \quad (9.5.57)$$

gde smo prepostavili Fajnmanove granične uslove, čime ova Grinova funkcija postaje Fajnmanov propagator za fotonsko polje. Potencijali su dati sa

$$A^\mu(x) = \int d^4 y D_F^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) . \quad (9.5.58)$$

Protonska struja J^μ koja generiše elektromagnetno polje je

$$J^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi , \quad (9.5.59)$$

gde je Ψ talasna funkcija protona, $e_P = -e$ nanelektrisanje a M masa protona. Proton, iako nije elementarna čestica, opisujemo Dirakovom jednačinom, prepostavljajući uz to da je električna struja protona = nanelektrisanje \times fluks protona.

Proces koji razmatramo je

$$e^-(p_i) + p(p'_i) \rightarrow e^-(p_f) + p(p'_f) , \quad (9.5.60)$$

gde su p_i i p_f inicijalni i finalni impulsi elektrona, a p'_i i p'_f inicijalni i finalni impulsi potona. Ako sa ψ_i i ψ_f označimo talasne funkcije inicijalnog i finalnog elektrona, amplituda prelaza je data sa

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) \mathcal{A}(x) \psi_i(x) . \quad (9.5.61)$$

Zamenom izraza za elektromagnetski potencijal

$$A^\mu(x) = -\frac{e}{(2\pi)^4} \int d^4y \int \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)} \bar{\Psi}_f(y) \gamma_\nu \Psi_i(y) \quad (9.5.62)$$

u izraz za amplitudu prelaza, dolazimo do matričnog elementa

$$S_{fi} = -ie^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_f(x) \gamma_\mu \psi_i(x) \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)} \bar{\Psi}_f(y) \gamma_\nu \Psi_i(y) . \quad (9.5.63)$$

Talasne funkcije inicijalnog elektrona odnosno protona su

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \sqrt{\frac{m}{VE_i}} u(\mathbf{p}_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x} \\ \Psi_i(x) &= \sqrt{\frac{M}{VE'_i}} u(\mathbf{p}'_i, s'_i) e^{-ip'_i \cdot x} . \end{aligned} \quad (9.5.64)$$

Analogno, talasne funkcije finalnog elektrona i protona su

$$\begin{aligned} \psi_f(x) &= \sqrt{\frac{m}{VE_f}} u(\mathbf{p}_f, s_f) e^{-ip_f \cdot x} \\ \Psi_f(x) &= \sqrt{\frac{M}{VE'_f}} u(\mathbf{p}'_f, s'_f) e^{-ip'_f \cdot x} . \end{aligned} \quad (9.5.65)$$

Kombinovanjem (9.5.63) sa (9.5.64) i (9.5.65), nakon integracije po impulsu k dobijamo

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p'_i - p_f - p'_f) \frac{mM}{V^2 \sqrt{E_i E_f E'_i E'_f}} \mathcal{M} , \quad (9.5.66)$$

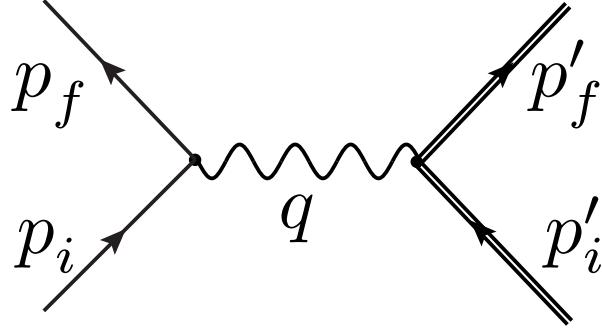
gde je Fajnmanova amplituda data sa

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_i, s_i) \bar{u}(\mathbf{p}'_f, s'_f) \gamma_\mu u(\mathbf{p}'_i, s'_i) \frac{1}{(p_f - p_i)^2 + i\epsilon} . \quad (9.5.67)$$

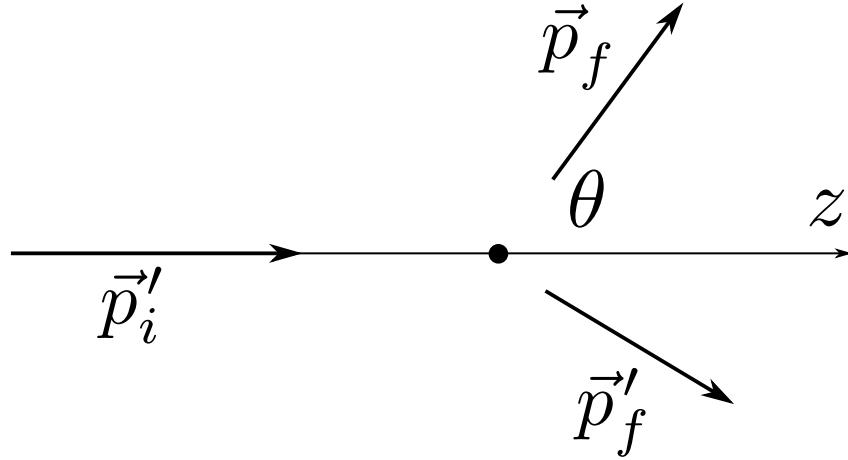
Fajnmanov dijagram za ovaj proces je prikazan na slici 9.4. Pune linije su elektronske; dvostrukе linije su protonske. Tačke u kojima se spajaju dve fermionske linije i fotonska su verteksi, talasasta linija između dva verteksa je fotonski propagator.

Kvadrat modula Fejnmanove amplitude ćemo usrednjiti po polarizacijama ulaznih elektrona i protona, i sumirati po polarizacijama finalnih čestica

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_i s'_i} \sum_{s_f s'_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (9.5.68)$$



Slika 9.4: Dijagram za rasejanje elektrona na protonu.



Slika 9.5: Kinematika rasejanja elektrona na protonu. NE TREBA PRIM NA IMPULSU INIC EL.

$$= \frac{e^4}{64m^2M^2(p_f - p_i)^4} \text{tr}\left((\not{p}_f + m)\gamma_\mu(\not{p}_i + m)\gamma_\nu\right) \text{tr}\left((\not{p}'_f + M)\gamma^\mu(\not{p}'_i + M)\gamma^\nu\right).$$

Treba da izračunamo tragove u (9.5.68). Lako se pokazuje da je

$$\text{tr}\left((\not{p}_f + m)\gamma^\mu(\not{p}_i + m)\gamma^\nu\right) = 4(p_f^\mu p_i^\nu - (p_f \cdot p_i)g^{\mu\nu} + p_f^\nu p_i^\mu + m^2 g^{\mu\nu}) \quad (9.5.69)$$

pa nakon sredjivanja dobijamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{2m^2M^2(p_f - p_i)^4} \left((p_i \cdot p'_i)(p_f \cdot p'_f) + (p_f \cdot p'_i)(p_i \cdot p'_f) - m^2 p'_i \cdot p'_i - M^2 p_i \cdot p_i + 2m^2 M^2 \right).$$

Fiksiramo sada referentni sistem i u njemu izračunamo gornje izraze. Neka se upadni elektron kreće u smeru z -ose, dok je proton meta koja miruje (slika 9.5) Četvorovektori impulsa čestica u ovom rasejanju su

$$\begin{aligned} p_i &= (E_i, 0, 0, p_i), & p'_i &= (M, 0, 0, 0), \\ p_f &= (E_f, \mathbf{p}_f), & p'_f &= (E'_f, \mathbf{p}'_f). \end{aligned} \quad (9.5.70)$$

Dalje ćemo pretpostaviti da je energija elektrona pre i nakon sudara mnogo veća od njegove mase, tj. da su elektroni ultrarelativistički. Tada je (proveriti)

$$\begin{aligned} p_f \cdot p'_f &\approx 2E_i E_f \sin^2 \frac{\theta}{2} + M E_f , & p_i \cdot p'_i &= E_i M \\ p_i \cdot p'_f &\approx E_i M - 2E_i E_f \sin^2 \frac{\theta}{2} , & p_f \cdot p'_i &= E_f M \\ p_i \cdot p_f &\approx 2E_i E_f \sin^2 \frac{\theta}{2} , & p'_i \cdot p'_f &= M(E_i + M - E_f) \\ q \cdot q &\approx -4E_i E_f \sin^2 \frac{\theta}{2} . \end{aligned} \quad (9.5.71)$$

Masa protona $M = 931 \text{ MeV}$ je skoro dve hiljade puta veća od mase elektrona $m = 0.51 \text{ MeV}$, pa ćemo u daljem računu primeniti aproksimaciju $M \gg m$. Konačno, za kvadrat Fajnmanove amplitudne se dobije

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{16 m^2 M E_i E_f \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left((E_i - E_f) \sin^2 \frac{\theta}{2} + M \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) . \quad (9.5.72)$$

Da nademo diferencijalni presek rasejanja. Verovatnoća za rasejanje u jedinici vremena je

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = (2\pi)^8 (\delta^{(4)}(p_i + p'_i - p_f - p'_f))^2 \frac{m^2 M^2}{V^4 E_i E_f E'_i E'_f} \overline{|\mathcal{M}|^2} , \quad (9.5.73)$$

gde kao i ranije za kvadrat δ -funkcije uzimamo

$$(\delta^{(4)}(p_i + p'_i - p_f - p'_f))^2 = \frac{TV}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_i + p'_i - p_f - p'_f) . \quad (9.5.74)$$

Diferencijalni presek za rasejanje je dat sa

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{1}{J_{in}} \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3} . \quad (9.5.75)$$

Gustina fluksa je odredjena relativnom brzinom upadnog elektrona i protona

$$J_{in} = \frac{v_{\text{rel}}}{V} = \frac{p_i}{V E_i} , \quad (9.5.76)$$

pa je

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2 M^2}{E_f E'_i E'_f p_i} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta(E_i + E'_i - E_f - E'_f) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_f + \mathbf{p}'_f - \mathbf{p}_i) d^3 p_f d^3 p'_f . \quad (9.5.77)$$

Integracija po impulsu rasejanog protona \mathbf{p}'_f daje

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2 M}{E_i E'_f} \frac{p_f}{p_i} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta(f(E_f)) dE_f d\Omega , \quad (9.5.78)$$

gde je

$$f(E_f) = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}_f^2 + \mathbf{p}_i^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f|\cos\theta} + E_f - M - E_i . \quad (9.5.79)$$

Sledeća integracija je po energiji finalnih elektrona E_f . Primenom formule

$$\delta(f(E_f)) = \frac{\delta(E_f + E'_f - E_i - E'_i)}{\left| \frac{\partial f(E_f)}{\partial E_f} \right|} = \left(1 + \frac{E_f - \frac{|\mathbf{p}_i|}{|\mathbf{p}_f|} E_f \cos\theta}{E'_f} \right) \delta(E_f + E'_f - E_i - E'_i) ,$$

lako se dobija da je diferencijalni presek dat sa

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^2 M}{E_i p_i} \frac{p_f}{E_i + M - \frac{|\mathbf{p}_i|}{|\mathbf{p}_f|} E_f \cos\theta} \overline{|\mathcal{M}|^2} . \quad (9.5.80)$$

U prethodnoj formuli se podrazumeva da važi zakon održanja

$$E_f + E'_f = E_i + E'_i ,$$

iz koga sledi da je energija finalnog elektrona

$$E_f = \frac{E_i}{1 + \frac{2E_i}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}} . \quad (9.5.81)$$

Zamenjujući izraz za kvadrat modula Fajnmanove amplitude (9.5.72) u (9.5.80) dobijamo konačno

$$\overline{d\sigma} = \frac{e^4}{64\pi^2 E_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{2E_i E_f \sin^2 \frac{\theta}{2} + M \cos^2 \frac{\theta}{2}}{M + 2E_i \sin^2 \frac{\theta}{2}} . \quad (9.5.82)$$

Ovo je traženi rezultat. Njegovom integracijom po uglovima dobija se totalni presek za rasejanje elektrona na protonu.

9.6 Fotoni

Već smo rekli da je jednačina kretanja slobodnog elektromagnetskog polja u Lorencovoj kalibraciji

$$\square A^\mu = 0 . \quad (9.6.83)$$

Partikularna rešenja ove jednačine su ravni talasi

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} , \quad (9.6.84)$$

gde je impuls fotona $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, $\omega = |\mathbf{k}|$. Vektori $\epsilon_\lambda(\mathbf{k})$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, su polarizacioni vektori fotona i oni opisuju četiri linearne nezavisna rešenja jednačine (9.6.83) za fiksiranu vrednost impulsa \mathbf{k} . Standardno, polarizacioni vektori $\varepsilon_1^\mu(\mathbf{k})$ i $\varepsilon_2^\mu(\mathbf{k})$ odgovaraju transverzalnim polarizacijama. Oni zadovoljavaju Lorencov kalibracioni uslov $k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}) = 0$. Skalarana polarizacija je $\varepsilon_0^\mu = n^\mu$, gde je n^μ jednični vektor vremenskog tipa; možemo izabrati $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Longitudinalna polarizacija $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k})$ je data u opštem slučaju sa

$$\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu - (n \cdot k)n^\mu}{(n \cdot k)} .$$

Ako je $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ tada je $\varepsilon_3^\mu = (0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|})$, odnosno, polarizacija longitudinalnog fotona je duž pravca kretanja. Za foton koji se kreće duž z -ose, $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, a polarizacioni vektori su

$$\epsilon_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \epsilon_1^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \epsilon_2^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \epsilon_3^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (9.6.85)$$

Polarizacioni vektori zadovoljavaju relacije ortonormiranosti

$$g_{\mu\nu} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu*}(\mathbf{k}) = g_{\lambda\lambda'} , \quad (9.6.86)$$

i relacije kompletnosti

$$g_{\lambda\lambda'} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu*}(\mathbf{k}) = g^{\mu\nu} . \quad (9.6.87)$$

U ova dva izraza $g_{\lambda\lambda'}$ nije metrika, već se samo numerički sa njom poklapa: zato se nekada gornje jednačine pišu i u obliku

$$g_{\mu\nu} \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda'}^{\nu*}(\mathbf{k}) = -\zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'} , \quad \sum_\lambda \zeta_\lambda \varepsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\lambda^{\nu*}(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} , \quad (9.6.88)$$

gde je $\zeta_\lambda = \begin{cases} -1, & \lambda = 0 \\ 1, & \lambda = 1, 2, 3 \end{cases}$.

Opšte rešenje jednačine (9.6.83) je linearna kombinacija,

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}} \left(a_\lambda(\mathbf{k}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + a_\lambda^*(\mathbf{k}) \epsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right) . \quad (9.6.89)$$

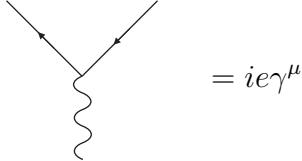
9.7 Fajnmanova pravila

Na osnovu nekoliko procesa koje smo razmatrali u prethodna dva poglavlja možemo da zaključimo odnosno poverujemo da amplituda prelaza u kvantnoj elektrodinamici ima oblik

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2VE'_f}} \prod_l \sqrt{2m_l} i\mathcal{M}. \quad (9.7.90)$$

Sa i smo obeležili upadne, a sa f finalne čestice u procesu. Ukupni impuls upadnih, odnosno finalnih čestica u procesu je P_i , odnosno P_f : zbog zakona održanja energije i impulsa oni su jednaki. Delta-funkcija u izrazu (9.7.90) je posledica zakona održanja četvoroimpulsa. Sledeći faktori u izrazu za amplitudu prelaza su normalizacioni faktori. Normalizacija koju smo koristili za bozone i fermione se razlikuju za član $\sqrt{2m_l}$, gde je m_l masa odgovarajućeg fermiona. Indeks l dakle prebrojava fermione (elektron, mion, taon, kvarkove). Poslednji činilac, $i\mathcal{M}$ u izrazu (9.7.90) je Fajnmanova amplituda. Ona se dobija na osnovu sledećih pravila:

- Verteks:



- U svakom verteksu važi zakon održanja četvoroimpulsa. Pri tome četvoroimpuls antičestica (koje su spoljašnje linije dijagrama) je suprotno usmeren od odgovarajuće strelice na fermionskoj liniji.
- Fotonski i Dirakov propagator:

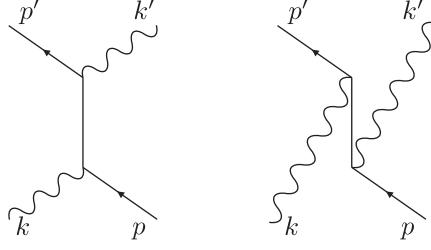
$$iD_{F\mu\nu} = \overset{\mu}{\swarrow} \overset{\nu}{\searrow} \underset{k}{\sim\sim\sim\sim\sim\sim} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

$$iS_F(p) = \overset{i}{\underset{p}{\longrightarrow}} = \frac{i}{p - m + i\varepsilon}$$

- Spoljašnje linije:

a) leptoni (npr. elektron):		$= u(p, s)$	inicijalni
		$= \bar{u}(p, s)$	finalni
b) antileptoni (npr. pozitron):		$= v(p, s)$	finalni
		$= \bar{v}(p, s)$	inicijalni
c) fotoni:		$= \epsilon_\mu(k, \lambda)$	inicijalni
		$= \epsilon_\mu^*(k, \lambda)$	finalni

- Spinorski faktori se pišu sa leva na desno duž fermionske linije. Ovaj red pisanja fermionskih faktora je važan jer su faktori matrice.



Slika 9.6: Fajnmanovi dijagrami za Komptonovo rasejanje u najnižem redu.

- Za svaku petlju sa impulsom k , integralimo po tom impulsu, $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. Ovo pravilo odgovara kvantnomehaničkom sabiranju amplituda.
- Za svaku fermionsku petlju pored integracije po impulsu dodajemo trag i znak minus.
- Dva dijagrama kod koji se razlikuju po zameni dva fermiona moraju se razlikovati za znak minus.

9.8 Komptonovo rasejanje

Komptonovo rasejanje je proces rasejanja fotona na elektronu, tj. $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$. Neka su impuls i polarizacija elektrona pre rasejanja \mathbf{p} i s , a posle rasejanja \mathbf{p}' i s' . Impuls i polarizacija fotona pre rasejanja su \mathbf{k} i λ , a posle rasejanja \mathbf{k}' i λ' . U najnižem redu teorije perturbacije postoje dva dijagrama za Komptonovo rasejanje. Oni su prikazani na slici 9.6. Fajnmanova amplituda za ovaj proces je data sa

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')(ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) u(\mathbf{p}, s) \\ &\quad + \bar{u}(\mathbf{p}', s')(ie\gamma^\nu) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') u(\mathbf{p}, s) \\ &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right) u(\mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (9.8.91)$$

Vidimo da Fajnmanova amplituda ima sledeći oblik

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda),$$

jer u procesu imamo dva spoljašnja fotona. Generalno, spoljašnje čestice su, za razliku od virtuelnih, čestica u procesima, ‘on shell’ tj. na masenoj površi. Konkretno, za Komptonovo rasejanje to znači da impulsi čestica zadovoljavaju: $p^2 = p'^2 = m^2$, $k^2 = k'^2 = 0$. Zbog toga, možemo da koristimo relacije:

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k, \quad (p-k')^2 - m^2 = -2p \cdot k'. \quad (9.8.92)$$

Primenom (2.2.29) imamo

$$(\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) = (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + m\gamma^\nu)u(p) = 2p^\nu u(p) ,$$

gde smo prokomutirali matrice \not{p} i γ^ν , i primenili Dirakovu jednačinu. Koristeći ovaj ‘trik’ izraz za amplitudu postaje

$$i\mathcal{M} = -ie^2\varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda')\varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda)\bar{u}(\mathbf{p}', s')\left(\frac{2p^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu}{2p \cdot k} - \frac{2p^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu}{2p \cdot k'}\right)u(\mathbf{p}, s) . \quad (9.8.93)$$

Matrični element za Komptonovo rasejanje je

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE}} \sqrt{\frac{m}{VE'}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega'}} i\mathcal{M} . \quad (9.8.94)$$

Presek za rasejanje ćemo izračunati u slučaju kada su čestice nepolarizovane. Drugim rečima, potrebno je usrednjiti po stanjima polarizacija upadnog elektrona i fotona i sumirati po stanjima polarizacija finalnih čestica. Srednja vrednost kvadrata Fajnmanove amplitude je

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \sum_{s, s'} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\beta^*(\mathbf{k}, \lambda) i\mathcal{M}^{\mu\nu} (i\mathcal{M}^{\alpha\beta})^* . \quad (9.8.95)$$

Prvo ćemo usrednjiti odnosno sumirati po polarizacijama fotona. Kao što znamo, foton ima dve fizičke transverzalne polarizacije. Iz relacija kompletnosti polarizacionih vektora sledi

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(k^\mu n^\mu + k^\nu n^\mu)}{(k \cdot n)^2} . \quad (9.8.96)$$

Potencijali polja nisu jednoznačni nego su određeni do na kalibracione transformacije

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x) , \quad (9.8.97)$$

gde je $\Lambda(x)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija. Ako u ovom izrazu uzmemo da je potencijal ravan talas, $A^\mu = \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik \cdot x}$, a kalibraciona funkcija $\Lambda(x) = \tilde{\Lambda}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}$, dobijamo zakon transformacije polarizacionih vektora pri kalibracionom transformacijama

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow \epsilon^\mu(\mathbf{k}, \lambda) - ik^\mu \tilde{\Lambda}(k) . \quad (9.8.98)$$

Vidimo da se polarizacioni vektori menjaju za član proporcionalan talasnem vektoru. Ta promena je nefizička, pa doprinos ovog člana S -matrici mora biti jednak nuli. Ovaj zaključak ima direktnе posledice na Fajnmanove amplitude koje sadrže spoljašnje fotone. Ove Fajnmanove amplitude imaju oblik

$$i\mathcal{M} = \epsilon^\alpha(\mathbf{k}_1) \epsilon^\beta(\mathbf{k}_2) \dots i\mathcal{M}_{\alpha\beta\dots} , \quad (9.8.99)$$

gde su $\epsilon^\mu(\mathbf{k}_i)$ polarizacioni vektori eksternih fotona. Kao posledica kalibracione simetrije moraju važiti identiteti

$$k_1^\alpha M_{\alpha\beta\dots} = k_2^\beta M_{\alpha\beta\dots} = \dots = 0 . \quad (9.8.100)$$

Izraz (9.8.100) je tzv. Vordov identitet. Dakle, ako bilo koji polarizacioni vektor eksternog fotona $\epsilon^\mu(\mathbf{k})$ u Fajnmanovoj amplitudi zamenimo sa odgovarajućim impulsom k^μ , dobijeni izraz je jednak nuli. To znači da članovi proporcionalni impulsu fotona u (9.8.96) ne daju doprinos S -matrici. Dakle pri usrednjavanju po stanjima polarizacija fotona možemo da koristimo sledeću preskripciju

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow -g^{\mu\nu}. \quad (9.8.101)$$

Rezultat usrednjavanja po transverzalnim polarizacijama fotona je

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 (i\mathcal{M})^{\mu\nu} (i\mathcal{M})_{\mu\nu}^*. \quad (9.8.102)$$

Ostaje još da se sumira odnosno usrednji po polarizacijama elektrona. Kvadrat Fajnmanove amplitude prelaza usrednjen po polarizacijama inicijalnog fotona i elektrona i sumiran po stanjima polarizacije finalnog elektrona i fotona je

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \sum_{s, s'} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^2}{16m^2} \text{tr} \left[(\not{p}' + m) \left(\frac{2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu}{2p \cdot k} - \frac{2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu}{2p \cdot k'} \right) \right. \\ &\quad \times \left. (\not{p} + m) \left(\frac{2p_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu}{2p \cdot k} - \frac{2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu}{2p \cdot k'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.8.103)$$

Množenjem članova pod tragom dobijamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{64m^2} \left(\frac{T_1}{(p \cdot k)^2} + \frac{T_2}{(p \cdot k')^2} - \frac{T_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{T_4}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right), \quad (9.8.104)$$

gde su

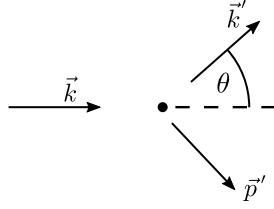
$$\begin{aligned} T_1 &= \text{tr} \left((\not{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu)(\not{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) \right), \\ T_2 &= \text{tr} \left((\not{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu)(\not{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu) \right), \\ T_3 &= \text{tr} \left((\not{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu)(\not{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu) \right), \\ T_4 &= \text{tr} \left((\not{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu)(\not{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) \right). \end{aligned}$$

Tragovi se računaju pravolinjski. Direktan račun daje

$$T_1 = 32((p \cdot k)(p' \cdot k) - m^2 p' \cdot k - m^2 p \cdot p' + 2m^2 p \cdot k + 2m^4), \quad (9.8.105)$$

a primenom

$$p' \cdot (k + p) = p' \cdot (k' + p') = m^2 + k' \cdot p' = m^2 + k \cdot p$$



Slika 9.7: Komptonovo rasejanje: četvoroimpulsi

izraz se uprošćava i dobijamo

$$T_1 = 32((p \cdot k)(p' \cdot k) + m^2 p \cdot k + m^4) . \quad (9.8.106)$$

Trag T_2 se dobija iz traga T_1 smenom $k \rightarrow -k'$. Tako dobijamo

$$T_2 = 32((p \cdot k')(p' \cdot k') - m^2 p \cdot k' + m^4) , \quad (9.8.107)$$

što primenom $p' \cdot k' = p \cdot k$ daje

$$T_2 = 32((p \cdot k)(p \cdot k') - m^2 p \cdot k' + m^4) . \quad (9.8.108)$$

Treći trag i četvrti trag su jednaki,

$$T_3 = T_4 = 16(2m^4 + m^2 p \cdot k - m^2 p \cdot k') . \quad (9.8.109)$$

Kombinujući izraze za trage nalazimo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{2m^2} \left(\frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + 2m^2 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right) . \quad (9.8.110)$$

Presek za rasejanje ćemo odrediti u laboratorijskom sistemu. Uzmimo da se upadni foton kreće duž z -ose i sudara sa elektronom koji miruje (slika 9.7), a ugao rasejanja fotona je θ . Četvoroimuplsi čestica u procesu su

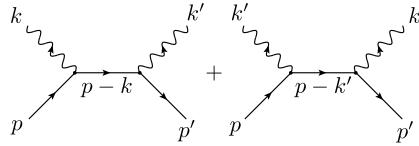
$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega, 0, 0, \omega) , & k'^\mu &= (\omega', \omega' \sin \theta \cos \varphi, \omega' \sin \theta \sin \varphi, \omega' \cos \theta) , \\ p^\mu &= (m, 0, 0, 0) , & p'^\mu &= (E', \mathbf{p}') . \end{aligned} \quad (9.8.111)$$

Zakon održanja četvoroimpulsa, $k + p = k' + p'$ daje $p' = k + p - k'$, čijim kvadriranjem i sređivanjem dobijamo Komptonovu formulu

$$\frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{m}(1 - \cos \theta) . \quad (9.8.112)$$

Diferencijalni presek je

$$\frac{d\sigma}{d\omega'} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{1}{J_{in}} \frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m}{\omega} \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'} . \quad (9.8.113)$$



Slika 9.8: Anihilacija elektron pozitronskog para

Integracija po impulsu finalnog elektrona \mathbf{p}' daje

$$\overline{d\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \delta(E' + \omega' - E - \omega) \frac{m\omega'}{4E'\omega} \left| \mathcal{M} \right|^2_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\omega' d\Omega'. \quad (9.8.114)$$

Da bismo integralili po ω' , moramo uzeti u obzir da je $E' = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta + m^2}$, tj. da E' zavisi od ω' . Konačno, nakon integracije po ω' dolazimo do diferencijalnog preseka u laboratorijskom sistemu

$$\frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \overline{|\mathcal{M}|^2}. \quad (9.8.115)$$

Primenom izraza (9.8.112) i (9.8.110) dobijamo

$$\frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega'} = \frac{e^4}{2(4\pi)^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right), \quad (9.8.116)$$

što predstavlja diferencijalni presek za Komptonovo rasejanje u laboratorijskom sistemu. Angularna zavisnost diferencijalnog preseka je data implicitno u ovoj formuli preko energije rasejanog fotona ω' , koja zavisi od ugla rasejanja. Formula (9.8.116) je poznata kao Klajn-Nišinina formula. Kada je energija upadnog fotona mnogo manja od mase mirovanja elektrona, $\omega' \approx \omega$ pa formula (9.8.116) postaje

$$\frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega'} = \frac{e^4}{2(4\pi)^2 m^2} (1 + \cos^2\theta). \quad (9.8.117)$$

Formula (9.8.117) je Tomsonova formula za rasejanje izvedena u klasičnoj elektrodinamici.

9.9 Neki dijagrami u QED

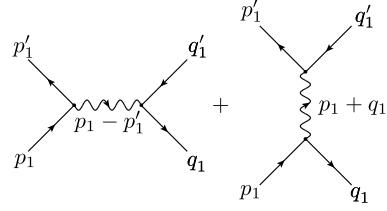
U ovom paragrafu naćićemo Fajnmanove amplitudu za dva QED procesa. Procedura je da prvo nacrtamo dijagrame koji u datom redu teorije perturbacije doprinose procesu. Naredni korak je da primenom Fajnmanovih pravila iz poglavlja 9.7 odredimo amplitudu prelaza.

Prvi proces koji ćemo razmatrati je anihilacija elektron-pozitronskog para:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

Fajnmanovi dijagrami za ovaj proces su prikazani na slici 9.8. Uzeli smo da je strelica vremena usmerena odozgo na gore. Postoje dva neekvivalentna dijagrama koji odgovaraju ovom procesu. Ukupna amplituda prelaza je zbir amplituda prelaza za prvi i drugi dijagram,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,$$



Slika 9.9: Rasejanje elektron pozitron.

gde su amplitude date sa

$$\mathcal{M}_1 = (ie)^2 \bar{v}(\mathbf{p}') \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} u(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}') , \quad (9.9.118)$$

$$\mathcal{M}_2 = (ie)^2 \bar{v}(\mathbf{p}') \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}' - \not{k}' - m + i\epsilon} u(\mathbf{p}) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}') \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}) . \quad (9.9.119)$$

Drugi proces je elektron pozitron rasejanje

$$e^-(\mathbf{p}_1) + e^+(\mathbf{q}_1) \rightarrow e^-(\mathbf{p}'_1) + e^+(\mathbf{q}'_1) .$$

Postoje dva topološki neekvivaletna dijagrama prikazana na lici 9.9. Amplituda za ovaj proces je takodje zbir dve amplitude

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 ,$$

koje su date sa

$$\mathcal{M}_1 = (ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) \bar{v}(\mathbf{q}_1) \gamma^\nu v(\mathbf{q}'_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p'_1)^2 + i\epsilon} , \quad (9.9.120)$$

$$\mathcal{M}_2 = (ie)^2 \bar{v}(\mathbf{q}_1) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) \bar{u}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\nu v(\mathbf{q}'_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + q_1)^2 + i\epsilon} . \quad (9.9.121)$$