KVANTNA TEORIJA POLJA I

Beleške za predavanja

Voja Radovanović

Beograd, 2016.

Glava 1

Klasična teorija polja

1.1 Ojler-Lagranževe jednačine kretanja

Za mehanički sistema sa n stepeni slobode dejstvo je

$$S[q_i] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}_i, t)\mathrm{d}t \ , \tag{1.1.1}$$

gde je L lagranžijan sistema. Generalisane koordinate su $q_1, \ldots, q_n$, dok su $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ generalisane brzine. Dejstvo je funkcional zato što trajektorije preslikava u realne brojeve.

Ako je $f(x)$ funkcija a $F[f(x)]$ funkcional, funkcionalni izvod $\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$ je definisan sa

$$\delta F = \int \mathrm{d}y \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) \ .$$

Trajektorija po kojoj se sistem kreće od početne konfiguracije $(q_1^{(i)}, \cdots, q_n^{(i)})$ do finalnalne $(q_1^{(f)}, \cdots, q_n^{(f)})$ u konfiguracionom prostoru odredjena je Hamiltonovim principom najmanjeg dejstva. Trajektorija za koju je dejstvo stacionarno, tj. za koju je

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0 \ , i = 1, \ldots, n \ , \tag{1.1.2}$$

je trajektorija po kojoj se sistem kreće. Na kursu analitičke mehanike pokazali ste da uslov stacionarnosti dejstva daje Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ . \tag{1.1.3}$$

Dakle Hamiltonov princip nam daje jednačine kretanja.

Gornja analiza se lako generalizuje na teoriju polja. U klasičnoj teoriji polja generalisane koordinate su polja:

$$q_i(t) \to \phi_{r\mathbf{x}}(t) = \phi_r(x) \ . \tag{1.1.4}$$

Indeks r je diskretan i on prebrojava polja. Iz prethodnog izraza vidimo da je polje sistem sa beskonačno puno stepeni slobode, jer je $\mathbf{x} \in V \subset R^3$. Relativistička polja poseduju odredjena transformaciona svojstva pri Lorencovim transformacijama. Skalarno polje, $\phi(x)$ se ne menja pri Lorencovom transformacijama, tj.

$$\phi'(x' = \Lambda x) = \phi(x) \ . \tag{1.1.5}$$

Vektorsko polje se pri Lorencovim transformacijama menja po

$$A'^{\mu}(x' = \Lambda x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \ , \tag{1.1.6}$$

a Dirakovo

$$\psi'(x') = e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4}\psi(x) \ .$$

Generalno, zakon transformacije polja je

$$\phi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(x) \ . \tag{1.1.7}$$

Matrice $S(\Lambda)$ čine reprezentaciju Lorencove grupe, tj. zadovoljavaju

$$S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1\Lambda_2) \ .$$

Polja se transformišu po reprezentacijama Lorencove grupe.

Poenkareove transformacije se sastoje od Lorencovih transformacija i translacija. Pri Poenkareovim transformacijama skalarno, Dirakovo odnosno vektorsko polje se transformišu prema

$$\begin{aligned} \phi'(x' = \Lambda x + a) &= \phi(x) \\ A'^{\mu}(x' = \Lambda x + a) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \\ \psi'(x' = \Lambda x + a) &= e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4}\psi(x) \ , \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

respektivno.

Transformacije možemo interpretirati kao aktivnu i kao pasivnu. Aktivne transformacije deluju na fizičkom sistemu tako što ga transformišu, dok je koordinatni sistem fiksiran. Nasuprot tome, kod pasivne transformacije fizički sistem je fiksiran, a transformacija deluje na koordinatni sistem. Aktivna i pasivna transformacija su ekvivalentne.

Ako skalarno polje $\phi(x)$ transliramo za a duž $x-$ ose dobićemo novu funkciju $\phi'(x)$

$$\phi'(x) = \phi(x - a) \ , \tag{1.1.9}$$

odnosno

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x).$$

Translacija je delovala aktivno, koordinatni sistem je fiksiran, a polje smo transformisali.

Transliranje skalarnog polja udesno u fiksnom koordinatnom sistemu ekvivalentno je transliranju koordinatnog sistema ulevo za a, dok je polje fiksirano. U ovom, drugom slučaju kažemo da transformacija deluje pasivno:

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x).$$

Sa $\phi'(x')$ smo obeležili novo polje u novom koordinatnom sistemu.

U teoriji polja dejstvo je oblika

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}^3 x \mathcal{L} = \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} \ ,$$

gde je Lagranžijan

$$L = \int_V \mathrm{d}^3 x \mathcal{L} \ .$$

Oblast prostora V može biti konačan deo prostora ili ceo R^3 prostor. Veličina $\mathcal{L}$ je gustina Lagranžijana. Gustina Lagranžijana je funkcija polja i izvoda polja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) \ . \tag{1.1.10}$$

Jednačine kretanja za polja se dobijaju iz Hamiltonovog principa. Pri varijaciji polja

$$\phi_r(x) \to \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \ , \tag{1.1.11}$$

infinitezimalna promena dejstva (tj. varijacija dejstva) je

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \Big(\mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu \phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) \Big) \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta(\partial_\mu \phi_r) \Big) \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \Big) - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \Big) \delta\phi_r \Big) \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \Big) \Big) \delta\phi_r + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \mathrm{d}\Sigma_\mu \\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \Big) \Big) \delta\phi_r \ ,
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Površinski integral je nula, jer je varijacija polja na granici oblasti integracije jednaka nuli. Iz Hamiltonovog principa $\delta S = 0$, slede Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \Big) = 0 \ . \tag{1.1.13}$$

Lagranžijan nije jednoznačno odredjen. Lagranžijanu možemo da dodamo divergenciju neke funkcije polja

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu(\phi_r) \ . \tag{1.1.14}$$

Ovo je pokazano u zadatku 5.4.

Gustina Lagranžijana za slobodno skalarno polje je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\partial\phi\Big)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \ . \tag{1.1.15}$$

Da bismo sastavili jednačine kretanja trebaju nam sledeći parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi, \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \ . \tag{1.1.16}$$

Jednačina kretanja je Klajn-Gordonova jednačina

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{1.1.17}$$

Gustina Lagranžijana kompleksnog slobodnog skalarnog polja je

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \ , \tag{1.1.18}$$

gde je

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \qquad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \ . \tag{1.1.19}$$

Jednačine kretanja su

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (\Box + m^2)\phi^\dagger = 0 \tag{1.1.20}$$

Realno skalarno polje ima jedan, a kompleksno dva stepena slobode. Spin skalarnog polja je 0. Gustina lagranžijana (1.1.15) opisuje slobodno skalarno polje. Medjutim, slobodne teorije polja su neinteresantne, jer se u njima ništa ne dešava. Sledeći lagranžijan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ . \tag{1.1.21}$$

je primer interakcione teorije, tzv. $\phi - 4$ teorije. Poslednji član u lagranžijanu opisuje interakciju polja samog sa sobom. Konstanta λ je konstanta interakcije.

Dirakovo polje opisuje čestice spina $s = 1/2$. Gustina Lagranžijana je slobodnog Dirakovog polja je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \ . \tag{1.1.22}$$

ψ i $\bar{\psi}$ su nezavisna polja pa dobijamo dve jednačine kretanja

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0\\ i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0.\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

Dobili smo Dirakovu jednačinu.

Lagranžijan vektorskog masenog polja je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \ , \tag{1.1.24}$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Variranjem ovog dejstva dobija se (Prokina jednačina)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \tag{1.1.25}$$

Lagranžijan elektromagnetnog polja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \ , \tag{1.1.26}$$

gde je j^μ četvorovektor gustine struje. Poslednji član je interakcioni član.

Da bismo sastavili jednačine kretanja za potencijale, moramo prvo odrediti

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta \tag{1.1.27}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}\\ &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu)\\ &= -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha})\\ &= -F^{\alpha\beta} \ .\end{aligned}$$

Jednačine kretanja (Maksvelove jednačine) su

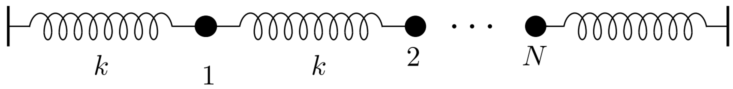
$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta \ , \tag{1.1.28}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu\\ \Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu &= j^\nu \ .\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Spin vektorskog polja je 1. Bezmaseno vektorsko polje ima dva, a maseno tri stepena slobode.

Sledeći primer je polje koje nije relativističko. Neka je n malih kuglica masa m vezano oprugama konstanti elastičnosti k i nominalne dužine l, kao na slici 1.1. Rastojanje izmedju



Slika 1.1: Lanac tačkastih masa

susednih kuglica je l. Razmotrimo longitudinalne oscilacije ovog sistema. Neka je ξ_i udaljenje, tj. elongacija $i-$te kuglice od ravnotežnog položaja. Lagranžijan sistema je

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m\dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l\Big(\frac{m}{l}\dot{\xi}_i^2 - kl\Big(\frac{\xi_{i+1}-\xi_i}{l}\Big)^2\Big) \ . \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

Uzmimo sada da rastojanje izmedju kuglica l teži nuli, ali tako da je veličina $m/l = \mu$ konstantna. Ova veličina je masu jedinice dužine žice. U ovom limesu diskretni stepeni slobode, $\xi_i(t)$ postaju polje $\xi = \xi(t,x)$. Suma prelazi u integral po promenljivoj x. Lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}\int_0^d \mathrm{d}x\Big(\mu\Big(\frac{\partial\xi}{\partial t}\Big)^2 - Y\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)^2\Big) \ , \tag{1.1.31}$$

gde je $Y = kl$ modul elastičnosti. Lagranževa jednačina kretanja je

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi'}\Big) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = 0 \ ,$$

gde smo sa tačkom (primom) obeležili izvod po vremenu, odnosno po koordinati x. Lako se dobija da je jednačina kretanja

$$\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - Y\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0 \ . \tag{1.1.32}$$

Dobili smo talasnu jednačinu. Fazna brzina longitudinalnih talasa u žici je

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} \ . \tag{1.1.33}$$

1.1.1 Hamiltonova formulacija

Analitička mehanika:

Generalisani impulsi su definisani sa

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \ . \tag{1.1.34}$$

Da bi se n predhodnih jednačina rešilo po generalisanim brzinama potrebno je da

$$\det\Big[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\Big] \neq 0 \ . \tag{1.1.35}$$

Hamiltonijan je Ležandrova transformacija Lagranžijana

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L(q,\dot{q})\ . \tag{1.1.36}$$

Hamiltonijan je funkcija generalisanih koordinata i impulsa. Iz

$$\delta\int \mathrm{d}t\Big[\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H(q,p)\Big]=0\ , \tag{1.1.37}$$

dobijaju se Hamiltonove jednačine

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=\{p_i,H\}\ , \tag{1.1.38}$$

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\{q_i,H\}\ . \tag{1.1.39}$$

Poasonova zagrada definisana je sa

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\Big)\ . \tag{1.1.40}$$

Teorija polja

Generalisani impulsi definisani su sa[1]

$$\pi_r(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_r}. \tag{1.1.41}$$

Kao i u analitičkoj mehanici hamiltonijan je Ležandrova transformacija lagranžijana. On zavisi od generalisanih impulsa i polja i definisan je sa

$$H=\int \mathrm{d}^3x\Big[\sum_r\pi_r\dot{\phi}_r-\mathcal{L}\Big]\ . \tag{1.1.42}$$

Veličina

$$\mathcal{H}=\sum_r\pi_r\dot{\phi}_r-\mathcal{L} \tag{1.1.43}$$

je gustina Hamiltonijana. Lako se vidi da je gustina Hamiltonijana realnog skalarnog polja data sa

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{m^2}{2}\phi^2\ . \tag{1.1.44}$$

Hamiltonove jednačine kretanja se dobijaju variranjem dejstva

$$S_H=\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\Big(\sum_r\pi_r\dot{\phi}_r-\mathcal{H}\Big)\ ,$$

[1]Sa tačkom smo obeležili parcijalni izvod po vremenu, tj. $\dot{\phi}=\partial_0\phi$.

u kome je lagranžijan izražen preko hamiltonijana. Variracija fazne trajektorije podrazumeva

$$\begin{aligned} \phi_r(x) &\to \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \ , \\ \pi_r(x) &\to \pi_r(x) + \delta\pi_r(x) \ , \end{aligned} \tag{1.1.45}$$

gde su varijacije polja i generalisanih impulsa nezavisne. Jedino se zahteva da je varijacija polja na granici intervala jednaka nuli. Varijacija dejstva je

$$\delta S_H = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \Big[\delta\pi_r\dot{\phi}_r + \pi_r\delta\dot{\phi}_r - \frac{\delta H}{\delta\phi_r}\delta\phi_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r}\delta\pi_r\Big] \ . \tag{1.1.46}$$

Drugi sabirak u podintegralnoj funkciji iz poslednjeg izraza napisaćemo kao

$$\pi_r\delta\dot{\phi}_r = \frac{\partial}{\partial t}(\pi_r\delta\phi_r) - \dot{\pi}_r\delta\phi_r \ ,$$

pa je

$$\delta S_H = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \Big[\delta\pi_r\dot{\phi}_r - \dot{\pi}_r\delta\phi_r - \frac{\delta H}{\delta\phi_r}\delta\phi_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r}\delta\pi_r\Big] \ . \tag{1.1.47}$$

Odavde, na osnovu Hamiltonovog principa dobijamo Hamiltonove jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi_r}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta\phi_r} \\ \frac{\partial\phi_r}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\pi_r} \ . \end{aligned} \tag{1.1.48}$$

Nadjimo Hamiltonove jednačine za slobodno skalarno polje. Prvo imamo

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{x},t)} = \int \mathrm{d}^3y\pi(\mathbf{x},t)\frac{\delta\pi(\mathbf{y},t)}{\delta\pi(\mathbf{x},t)} = \pi(\mathbf{x},t) \tag{1.1.49}$$

i slično

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{x},t)} &= \int \mathrm{d}^3y\Big(\partial_i\phi(\mathbf{y},t)\partial_i^y\delta^{(3)}(x-y) + m^2\phi(\mathbf{y},t)\delta(x-y)\Big) \\ &= -\triangle\phi(x) + m^2\phi(x) \ . \end{aligned} \tag{1.1.50}$$

Hamiltonove jednačine su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi}{\partial t} &= m^2\phi - \Delta\phi \ , \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= \pi \ . \end{aligned} \tag{1.1.51}$$

Kombinovanjem ovih jednačina dobijamo Klajn-Gordonovu jednačinu.

Neka su F i G funkcije faznih promenljivih. Njihova (istovremena) Poasaonova zagrada je definisana sa

$$\{F(t,\mathbf{x}),G(t,\mathbf{y})\} = \int \mathrm{d}^3z\Big(\frac{\delta F(t,\mathbf{x})}{\delta\phi_r(t,\mathbf{z})}\frac{\delta G(t,\mathbf{y})}{\delta\pi_r(t,\mathbf{z})} - \frac{\delta F(t,\mathbf{x})}{\delta\pi_r(t,\mathbf{z})}\frac{\delta G(t,\mathbf{y})}{\delta\phi_r(t,\mathbf{z})}\Big) \ . \tag{1.1.52}$$

Lako se vidi da je

$$\{\phi_r(t,\mathbf{x}),\pi_s(t,\mathbf{y})\}=\delta_{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ . \tag{1.1.53}$$

Hamiltonove jednačine možemo prepisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi_r}{\partial t} &= \{\pi_r,H\}\\ \frac{\partial\phi_r}{\partial t} &= \{\phi_r,H\}\ .\end{aligned} \tag{1.1.54}$$

1.2 Neterina teorema

Simetrija igra važnu ulogu u fizici. Transformacije simetrije ne menjaju oblik jednačina kretanja. Simetrija može biti diskretna ili neprekidna, odnosno kontinualna. Inverzije prostora odnosno vremena kao i konjugacija naboja su primeri diskretnih transformacija. Sa druge strane rotacije, translacije kao i fazne transformacije su primeri kontinualnih transformacija. Kontinualne transformacije možemo parametrizovati nekim skupom parametara. Npr. rotacije parametrizujemo uglovima rotacije. Zakoni održanja fizičkih veličina su posledica kontinualne simetrije sistema, što je sadržaj Netrine teoreme.

Neka su neprekidne infinitezimalne transformacijama koordinata i polja date sa

$$\begin{aligned}x^\mu\to x'^\mu &= x^\mu+\delta x^\mu\\ \phi_r(x)\to\phi'_r(x') &= \phi_r(x)+\delta\phi_r(x)\ .\end{aligned} \tag{1.2.55}$$

Odredimo kako se dejstvo promeni pri transformacijama (1.2.55). Dejstvo se menja zato što sa neprimovanih koordinata i polja prelazimo na nove koordinate i polja koje smo obeležili primovima. Varijacija dejstva pri transformacijama (1.2.55) je

$$\delta S=\int_{\Omega'}d^4x'\mathcal{L}(\phi'_r(x'),\partial'_\mu\phi'_r(x'))-\int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\phi_r(x),\partial_\mu\phi_r(x))\ .$$

Ω i Ω' su jedna te ista oblast prostora Minkovskog parametrizovana jednom sa x, a drugi put sa x' koordinatama (pasivna transformacija). Element zapremine prostora Minkovskog se menja na sledeći način

$$d^4x'=\Big|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\Big|d^4x$$

$$\Big|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\Big|=\det\Big[\delta^\mu{}_\nu+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta x^\mu\Big]\approx 1+\partial_\mu(\delta x^\mu)\ ,$$

gde smo primenili

$$\det(1+A)=e^{\mathrm{Tr}\ln(1+A)}=e^{\mathrm{Tr}A+\dots}=1+\mathrm{Tr}A+\dots\ .$$

Totalna varijacija polja definisana je sa

$$\delta\phi=\phi'(x')-\phi(x)\ ,$$

dok je

$$\delta_0\phi = \phi'(x) - \phi(x)$$

varijacija forme polja. Veza izmedju njih je

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) \\
&= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) \\
&= \delta_0\phi(x') + \partial_\mu\phi\delta x^\mu \\
&= \delta_0\phi(x) + \partial_\mu\phi\delta x^\mu \ . \qquad (1.2.56)
\end{aligned}$$

U poslednjem koraku umesto koordinata x' napisali smo x, jer računamo u prvom redu po δx. Lako se vidi da diferenciranje komutira sa varijacijom forme:

$$\delta_0\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta_0\phi \ .$$

Varijacija forme Lagranžijana je

$$\begin{aligned}
\delta_0\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu\phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\partial_\mu\phi \ , \qquad (1.2.57)
\end{aligned}$$

a njegova totalna varijacija je

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \ .$$

Prema tome infinitezimalna promene dejstva je

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int(1 + \partial_\mu\delta x^\mu)d^4x(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}) - \int d^4x\mathcal{L} \\
&= \int d^4x(\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu) \\
&= \int d^4x(\delta_0\mathcal{L} + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta x^\mu + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}) \\
&= \int d^4x\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta_0\phi_r + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta_0\phi_r\Big) - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big)\delta_0\phi_r + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)\Big) \\
&= \int d^4x\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta_0\phi_r + \mathcal{L}\delta x^\mu\Big) \\
&= \int d^4x\partial_\mu J^\mu \ . \qquad (1.2.58)
\end{aligned}$$

Polja $\phi_r(x)$ zadovoljavaju jednačine kretanja, što smo iskoristili u četvrtom redu. Ako su neprekidne transformacije (1.2.55) simetrija klasične teorije, tj. $\delta S = 0$[2] onda je

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \qquad (1.2.59)$$

[2]Opštije: Dejstvo poseduje simetriju ukoliko je

$$\delta S = \int d^4x\partial_\mu K^\mu \ ,$$

gde je Neterina struja J_μ data sa

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L}\delta x^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu \ . \tag{1.2.60}$$

Veličina

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu$$

je tenzor energije-impulsa. Definišimo naelektrisanja (naboje) sa

$$Q^a = \int d^3x J_0^a \ . \tag{1.2.61}$$

Izračunajmo vremenski izvod naelektrisanja:

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \frac{\partial j_0^a}{\partial t} \ . \tag{1.2.62}$$

Primenom Neterine teoreme i Gausove teoreme imamo

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \mathrm{div} \mathbf{j}_a = \oint \mathbf{j}^a \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{1.2.63}$$

Oblast integracije je najčešće ceo realan trodimenzionalan prostor i Neterine struje dovoljno brzo teže nuli kad $r \to \infty$, tako da je njihov fluks jednak nuli. Dakle, uz odgovarajuću asimptotiku polja u beskonačnosti, dobijamo da su naboji konstante kretanja, tj.

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0 \ . \tag{1.2.64}$$

Ovim smo pokazali Neterinu teoremu: Ako je dejstvo invarijantno na neprekidne transformacije (koje čine n-parametarsku Lijevu grupu) onda postoji n veličina (naboji) koji su konstante kretanja. Integrala kretanja ima onoliko koliko grupa simetrije ima generatora.

1.2.1 Fazna invarijantnost

Lagranžijan kompleksnog slobodnog polja

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \ , \tag{1.2.65}$$

invarijantan je na fazne, tj. $U(1)$ transformacije

$$\phi \to e^{i\theta}\phi, \quad \phi^\dagger \to e^{-i\theta}\phi^\dagger \ . \tag{1.2.66}$$

pa izraz za Neterina struja postaje

$$J^\mu = \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L}\delta x^\mu \Big) - K^\mu \ .$$

Ove transformacije nisu prostorno vremenske već su tzv. unutrašnje, jer $x' = x$. Infinitezimalne promene su

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\theta\phi \\ \delta\phi^\dagger &= -i\theta\phi^\dagger \\ \delta x^\mu &= 0 \ , \end{aligned} \tag{1.2.67}$$

pa je Neterina struja

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\delta\phi^\dagger - T^\mu{}_\nu\delta x^\nu \\ &= i\theta\partial^\mu\phi^\dagger\phi - i\theta\partial^\mu\phi\phi^\dagger \\ &= i\theta(\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \phi^\dagger\partial^\mu\phi) \ . \end{aligned} \tag{1.2.68}$$

Očuvan naboj je

$$Q = iq\int \mathrm{d}^3x(\phi^\dagger\partial_0\phi - \phi\partial_0\phi^\dagger) \ . \tag{1.2.69}$$

Dirakov Lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi$$

je takodje invarijantan na fazne transformacije

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}.$$

Neterina struja je

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \\ j^\mu &= -\theta(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \ . \end{aligned} \tag{1.2.70}$$

Kako je θ konstantan parametar to ga možemo odbaciti pa je struja

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ . \tag{1.2.71}$$

Očuvani naboj je

$$Q = \int d^3x\psi^\dagger\psi \ . \tag{1.2.72}$$

Posledica fazna invarijantnosti teorije je očuvanje električnog naelektrisanja.

1.2.2 Translaciona invarijantnost i tenzor energije impulsa

Pri translacijama

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \epsilon^\mu \\ \delta\phi &= 0 \to \delta_0\phi = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi \end{aligned} \tag{1.2.73}$$

dejstvo slobodnog skalarnog polje je invarijantno. Neterina struja je

$$j_\mu = (-\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \mathcal{L}g_{\mu\nu})\epsilon^\nu = -T_{\mu\nu}\epsilon^\nu \ . \tag{1.2.74}$$

Očuvana veličina je četvoroimpuls skalarnog polja

$$P^\nu = \int \mathrm{d}^3x T^{0\nu} \ . \tag{1.2.75}$$

Nulta komponenta impulsa je Hamiltonijan

$$\begin{aligned} H = P^0 &= \int \mathrm{d}^3x T^{00} \\ &= \int \mathrm{d}^3x \Big[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\Big] \\ &= \int \mathrm{d}^3x \mathcal{H} \ . \end{aligned} \tag{1.2.76}$$

Implus slobodnog skalarnog polja je

$$P^i = -\int \mathrm{d}^3x \partial_0\phi\partial_i\phi \ . \tag{1.2.77}$$

Tenzor energije impulsa skalarnog polja je simetričan mada u opštem slučaju, za proizvoljno polje ovaj tenzor nije simetričan. O simetrizaciji tenzora energije videti u zadatku 5.18.

1.2.3 Lorencova simetrija i uglovni moment

Pri Lorencovim transformacijama $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu$ polja se menjaju po

$$\phi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\omega)\phi_s(x) = \Big(e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}\Big)_{rs}\phi_s(x) \ , \tag{1.2.78}$$

gde su $\Sigma_{\mu\nu}$ generatori Lorencove grupe u prostoru komponenti polja[3]. Totalna varijacija polja je

$$\delta\phi_r(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Big(\Sigma_{\mu\nu}\Big)_{rs}\phi_s(x) \ , \tag{1.2.79}$$

[3]Ovo su generatori u sistemu mirovanja. U zadatku 8.5 pokazano je da je generator spinorskog polja

$$i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} \ .$$

Prva dva sabirka su orbitalni moment dok je

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$$

spinski deo uglovnog momenta

pa je Neterina struja

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r - T^\mu{}_\nu\delta x^\nu \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\omega^{\nu\rho}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) - T^\mu{}_\nu\omega^{\nu\rho}x_\rho \\
&= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}\Big[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^\mu{}_\rho - x_\rho T^\mu{}_\nu)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}M^\mu{}_{\nu\rho}\ . \qquad (1.2.80)
\end{aligned}$$

Očuvane veličine su

$$\begin{aligned}
M_{\nu\rho} &= \int \mathrm{d}^3x M^0{}_{\nu\rho} \\
&= \int \mathrm{d}^3x\Big[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_r)}(\Sigma_{\mu\nu})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^0{}_\rho - x_\rho T^0{}_\nu)\Big]\ . \qquad (1.2.81)
\end{aligned}$$

M_{0i} su generatori bustova a M_{ij} generatori rotacija.

Glava 2

Kvantovanje slobodnog skalarnog polja

Relativistička kvantna mehanika je jednočestična teorija. Klajn-Gordonova jednačina $(\Box + m^2)\phi = 0$ je talasna jednačina čestice spina 0. ϕ se interpretira kao talasna funkcija čestice. Gustina verovatnoće

$$j^0 = i(\phi^\dagger \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^\dagger)$$

u ovoj teoriji nije pozitivno definitna. To je ozbiljan problem u interpretaciji talasne funkcije ϕ. Pored toga ova teorija ima problem sa interpretacijom negativno-energetskih rešenja. U ovoj glavi videćemo kako se ovi krupni problemi prevazilaze u kvantnoj teoriji polja. Često se jednočestična teorija, zasnovana na pojmu talasne funkcije, naziva prvom kvantizacijom. U tom smislu se kvantizacija skalarnog polja koju ćemo izložiti u ovoj glavi naziva drugom kvantizacijom. Medjutim, za kvantizaciju polja dovoljno je poznavati kalsičnu teoriju. Medjukorak, tj. prva kvantizacija, je u tom smislu nepotreban.

2.1 Realno skalarno polje

U klasičnoj teoriji polja gustina lagranžijana skalaranog realnog polja je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \ . \tag{2.1.1}$$

Jednačina kretanja za skalarno polje je Klaln-Gordonova jednačina:

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{2.1.2}$$

Recimo još jednaom da u klasičnoj teoriji ϕ je obična funkcija prostorno-vremenskih koordinata. Generalisani impuls, konjugovan polju ϕ je $\pi = \dot{\phi}$.

Recept za kvantovanje znamo iz kvantne mehanike. Generalisane koordinate i impulsi klasične teorije postaju operatori, pri čemu Poasonova zagrada prelazi u komutator po sledećem 'pravilu'

$$\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]\ . \tag{2.1.3}$$

Ova relacija je tačna u vodećem redu po Plankovoj konstanti. Komutacione relacije izmedju operatora koordinate i impulsa su

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij},\ [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0\ , \tag{2.1.4}$$

gde smo sa latinskim indeksima obeležili Dekartove koordinate. U KTP $\phi(x)$ i $\pi(x)$ su operatori. Koeficijenti u razvoju polja po ravnim talasima $a(\mathbf{k})$ i $a^\star(\mathbf{k})$ postaju operatori, tj.

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2E_k}}(a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik\cdot x})\ . \tag{2.1.5}$$

Četvorovektor k^μ nije proizvoljan, već zadovoljava uslov $k_\mu k^\mu = m^2$. On je dat sa $k^\mu = (E_k, \mathbf{k})$ gde je $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Generalisani impuls je

$$\pi(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\sqrt{\frac{E_k}{2}}(-a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x})\ . \tag{2.1.6}$$

Komutatacione relacije za polja $\phi(\mathbf{x})$ i generalisane impulse $\pi(\mathbf{x})$ su analogne sa komutacionim relacijama (2.1.4):

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0\ . \tag{2.1.7}$$

U (2.1.7) operatori $\phi(\mathbf{x})$ i $\pi(\mathbf{x})$ su u Šredingerovoj slici. Operatori polja i impulsa u Hajzenbergovoj slici su dati sa

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{iHt}\phi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt} \\ \pi(x) &= e^{iHt}\pi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt}\ , \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

gde je H hamiltonijan. Iz (2.1.7) slede istovremene komutacione relacije

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0\ . \tag{2.1.9}$$

Iz (2.1.5) sledi (zadatak 7.1)

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}\int \mathrm{d}^3x e^{ik\cdot x}\Big[E_k\phi(x) + i\dot{\phi}(x)\Big]\ , \tag{2.1.10}$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}\int \mathrm{d}^3x e^{-ik\cdot x}\Big[E_k\phi(x) - i\dot{\phi}(x)\Big]\ . \tag{2.1.11}$$

Primenom (2.1.10) i (2.1.11), nalazimo:

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \frac{i}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{E_kE_{k'}}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y e^{i(k\cdot x - k'\cdot y)}\Big(- E_k[\varphi(x_0, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(x_0, \mathbf{y})] + \\ &\qquad + E_{k'}[\dot{\varphi}(x_0, \mathbf{x}), \varphi(x_0, \mathbf{y})]\Big) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{E_kE_{k'}}}\int \mathrm{d}^3x e^{i(E_k - E_{k'})t + i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}(E_k + E_{k'}) \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\ . \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

U prethodnom računu stavili smo $x_0 = y_0$, jer kreacioni i anihilacioni operatori ne zavise od vremena. Slično se nalaze i preostala dva komutatora. Dakle, komutacione relacije koje zadovoljavaju kreacioni i anihilacioni operatori su

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= 0 \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Operatori $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{q})$ zadovoljavaju bozonske komutacione relacije.
Hamiltonijan realnog skalarnog polja je

$$H = \int \mathrm{d}^3 x T^{00} = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3 x \Big(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \Big) \ . \tag{2.1.14}$$

Zamenom (2.1.5) u izraz za hamiltonijan dobijamo

$$H = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 p E_p \Big[a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \Big] \tag{2.1.15}$$

Iz (2.1.13) je

$$a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) \delta^{(3)}(0) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})$$

pa dobijamo

$$H = \int \mathrm{d}^3 p E_p \Big[a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0) \Big] \ . \tag{2.1.16}$$

Vidimo da je hamiltonijan slobodnog skalarnog polja suma beskonačno puno energija dekuplovanih harmonijskih oscilatora. Drugi sabirak u izrazu za hamiltonijan je beskonačna konstanta, koja potiče od integracije po modovima osnovnih stanja oscilatora. Ako nas intersuje razlika energije izmedju dva stanja onda je ova beskonačna konstanta nevažna i možemo je ignorisati. Mi smo prvo hamiltonijan odredili u klasičnoj teoriji. Zatim na osnovu klasičnog izraza za hamiltonian odredjujemo hamiltonijan u kvantnoj teoriji. Medjutim ova procedura nije jednoznačna jer klasične funkcije su komutativne, a odgovarajući operatori nisu. Sasvim generalno, pri prelasku sa klasične na kvantnu teoriju susrećemo se sa problemom uredjenje operatora, tj. redosleda pisanja operatora. Npr. klasičnoj varijabli $x^2 p$ odgovaraju operatori $\hat{x}^2\hat{p}$, $\hat{x}\hat{p}\hat{x}$ i $\hat{p}\hat{x}^2$. Ovi operatori se razlikuju za članove reda $\hbar$ i svi imaju dobar klasični limes.

Jedan način da uklonimo beskonačnu konstantu koja nam se pojavila u hamiltonijanu, je da uvedemo tzv. normalno uredjenje operatora, koje ćemo obeležiti sa : :. Normalno uredjenje podrazumeva da se kreacioni operatori pomeraju na levo, a anihilacioni na desno. Na primer

$$: a_1 a_2 a_3^\dagger a_4 a_5^\dagger := a_3^\dagger a_5^\dagger a_1 a_2 a_4 \ .$$

Hamiltonijan (2.1.15) posle normalnog uredjenja postaje

$$\begin{aligned} :H: &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 p E_p \Big[:a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}): + :a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}): \Big] \\ &= \int \mathrm{d}^3 p E_p a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \ . \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Normalnim uredjenjem hamiltonijana uklonili smo vakumsku očekivanu vrednost $\langle 0|H|0\rangle$, tj.

$$:H := H - \langle 0|H|0\rangle\ . \tag{2.1.18}$$

Realno skalarno polje je zbir pozitivno-frekventnih, $\phi^+(x)$ i negativno-frekventnih rešenja, $\phi^-(x)$, tj.

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)\ .$$

Pozitivno-frekventni deo sadrži anihilacione, a negativno-frekventni deo kreacione operatore. Normalno uredjenje proizvoda dva skalarna polja je

$$:\phi(x_1)\phi(x_2) := \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^-\ . \tag{2.1.19}$$

Vakuum, tj. osnovno stanje je definisan sa uslovima

$$a(\mathbf{p})|0\rangle = 0,\ \text{za svako}\ \mathbf{p}\ .$$

Energija ovog stanja je

$$:H:|0\rangle = \int \mathrm{d}^3p E_p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})|0\rangle = 0\ , \tag{2.1.20}$$

ako smo hamiltonijan definisali sa normalnim uredjenjem. Ako ne koristimo normalno uredjenje u izrazu za hamiltonijan onda je energija osnovnog stanja odredjena sa

$$H|0\rangle = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3p E_p \delta^{(3)}(0)|0\rangle\ . \tag{2.1.21}$$

Ona je proizvod dva beskonačna člana. Jedan je delta funkcija (tzv. infracrvena divergencija koja odgovara velikim rastojanjima, tj. malim energijama)

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}\ . \tag{2.1.22}$$

Beskonačnost koja potiče od trodimenzione delta funkcije izrazili smo preko zapremine prostora V. Drugi činilac je integral od E_p. Gustina energije vakuuma je

$$\begin{aligned}\frac{E_0}{V} &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p E_p \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}p p^2\sqrt{p^2+m^2}\ .\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Ovaj integral je divergentan zbog ponašanja podintegralne funkcije u gornjoj granici integracije, tj. na visokim energijama (malim rastojanjima). Zato se ova divergencija naziva ultraviolet-nom divergencijom. Ako sa $E_{\max}$ označimo maksimalnu energiju primenljivosti teorije onda je vakuumska gustina energije

$$\frac{E_0}{V} \sim \int_0^{E_{\max}} \sqrt{E_p^2 - m^2}E_p^2\mathrm{d}E_p \sim E_{\max}^4\ . \tag{2.1.24}$$

Ako izaberemo da je $E_{\rm max}$ granica važenja standardnog modela, tj. $E_{\rm max}\approx 10^3$GeV, tada je vakuumska gustna energije reda 10^{48}eV^4. Ako bismo uzeli da je maksimalna energija reda veličine Plankove energije, $E_{\rm max}\approx 10^{19}$GeV gustina energije je 10^{112}eV^4. Dakle, teorijski gustina energije vakuuma je u oblasti od 10^{48}eV^4 do 10^{112}eV^4. Vakuumska gustina energije je eksperimentalno merljiva veličina, i naziva se kosmološkom konstantom. Njena, eksperimentalna vrednost je

$$\Lambda = 10^{-12}{\rm eV}^4\ .$$

Kosmološka konstanta je dobar kandidat za tzv. tamnu energiju. Ova ogromna razlika izmedju teorijske i eksperimentalne vrednosti za kosmološku konstantu naziva se problemom kosmološke konstante. Konstantni član u dejstvu

$$\int {\rm d}^4x\Lambda$$

ne utiče na jednačine kretanja i takav član se može ignorisati. Ova konstanta u lagranžijanu prpoizvodi konstantni član u hamiltonijanu. Ovaj član bi samo pomerio ceo hamiltonijan za konstantu. Medjutim, u prisustvu gravitacione interakcije ovaj član postaje

$$\int {\rm d}^4x\sqrt{-g}\Lambda\ .$$

Sa g smo obeležili determinatnu metričkog tenzora $g=\det(g_{\mu\nu})$. Metrički tenzor opisuje gravitaciono polje. Konstanta Λ je kuplovana za gravitacionim poljem i utiče na jednačine kretanja gravitaciong polja. Stoga je ne možemo ignorisati. Dakle, u inercijalnim sistemima, tj. u specijalnoj relativnosti konstantni član u hamiltonijanu, odnosno lagranžijanu je nebitan. Sad druge strane gravitaciona interakcija 'vidi' ovu konstanu, što znači da se ona u prisustvu gravitacije ne može ignorisati.

Rekli smo da je osnovno stanje $|0\rangle$. Jednočestična stanje se dobijaju delovanjem sa kreacionim operatorima na vakuum, tj. $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$. Dvočestična stanja se dobijaju delovanjem sa dva kreaciona opertora, $a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$, itd. Hilbertov prostor stanja je Fokoov prostor

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}^{(0)}+\mathcal{H}^{(1)}+\mathcal{H}^{(2)}+\dots\ , \tag{2.1.25}$$

gde je $\mathcal{H}^{(0)}$ vakuumsko stanje, $\mathcal{H}^{(1)}$ podprostor jednočestičnih stanja, itd.
Operator impulsa je

$$\mathbf{P}=\int {\rm d}^3p\mathbf{p}a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})\ . \tag{2.1.26}$$

Impuls jednočestičnog stanja se nalazi delovanjem operatora impulsa na stanje:

$$\mathbf{P}|\mathbf{k}\rangle=\int {\rm d}^3p\mathbf{p}a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle\ . \tag{2.1.27}$$

Primenom komutacione relacije

$$a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})=\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})+a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{p})\ ,$$

imamo

$$\mathbf{P}|\mathbf{k}\rangle=\mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle\ . \tag{2.1.28}$$

Dakle impuls stanja $a^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ je $\mathbf{k}$. Energija ovog stanja je E_k.
Energija dvočestičnog stanja $|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{0}\rangle$ je $E_p + E_k$, a impuls $\mathbf{p}+\mathbf{k}$. Vidimo da je $|\mathbf{p},\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k},\mathbf{p}\rangle$, tj. ovo stanje je simetrično na zamenu čestica $\mathbf{k} \longleftrightarrow \mathbf{p}$, što je karakteristika bozonskih stanja. Zapravo Fokov prostor stanja čine simetrizovana stanja, jer su skalarne čestice bozoni. Proizvoljno višečestično stanje je

$$|\ldots, n_i(\mathbf{k}_i), \ldots\rangle = \ldots \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a^\dagger(\mathbf{k}_i))^{n_i} \ldots |0\rangle \ , \tag{2.1.29}$$

gde je n_i broj čestica impulsa $\mathbf{k}_i$. Operator broja čestica je

$$N = \int \mathrm{d}^3 p N(\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^3 p a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \ . \tag{2.1.30}$$

Pokazati da važi $[H, N] = 0$, tj. u slobodnoj teoriji polja broj čestica je konstantan. Ako uključimo interakciju ovo više neće važiti, jer se čestice mogu kreirati odnosno anihilirati.
Ukupni angularni moment skalarnog polja je

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} M_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \int \mathrm{d}^2 x (x_j T_{ok} - x_k T_{oj}) \ . \tag{2.1.31}$$

Spin čestice se definiše u sistemu mirovanja. Račun daje

$$\mathbf{J}|\mathbf{p} = 0, p^0 = m\rangle = 0 \ , \tag{2.1.32}$$

tj. spin skalarne čestice je jednak nuli.

2.2 Kompleksno skalarno polje

Gustina lagranžijana slobodnog skalarnog kompleksnog polja je

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \ , \tag{2.2.33}$$

gde je

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \qquad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \ . \tag{2.2.34}$$

Sa ϕ_1 i ϕ_2 obeležili smo realna polja. Jednačine kretanja su

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \qquad (\Box + m^2)\phi^\dagger = 0 \ . \tag{2.2.35}$$

Razvoj operatora polja po ravnim talasima je

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x}) \ , \tag{2.2.36}$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2E_k}} (b(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x}) \ , \tag{2.2.37}$$

gde su $a(\mathbf{k})$ i $b(\mathbf{k})$ anihilacioni, a $a^\dagger(\mathbf{k})$ i $b^\dagger(\mathbf{k})$ kreacioni operatori.

Generalisani impulsi konjugovani poljima ϕ and $\phi^\dagger$ su

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \ .$$

Istovremene komutacione relacije su

$$[\phi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \ , \tag{2.2.38}$$

$$[\phi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)] = [\phi(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)] = [\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)] = 0 \ , \tag{2.2.39}$$

$$[\pi(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)] = [\phi(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)] = 0 \ . \tag{2.2.40}$$

Odavde dobijamo bozonske komutacione relacije:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \ , \tag{2.2.41}$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] = [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = 0 \ , \tag{2.2.42}$$

$$[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = [b^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = 0 \ . \tag{2.2.43}$$

Hamiltonijan skalarnog kompleksnog polja je

$$H = \int \mathrm{d}^3 p E_p (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) \ . \tag{2.2.44}$$

Impuls je

$$\mathbf{P} = \int \mathrm{d}^3 p \mathbf{p} (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) \ . \tag{2.2.45}$$

Lagranžijan kompleksnog skalarnog polja je $U(1)$ invarijantan. Naelektrisanje je dato sa (1.2.69). Primenom (2.2.36) i (2.2.37) dobijamo

$$Q = q \int \mathrm{d}^3 p (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) \ . \tag{2.2.46}$$

Vakuum $|0\rangle$ je definisan sa $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad b(\mathbf{k})|0\rangle = 0$, za svako $\mathbf{k}$. Jednočestično stanje $a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ ima impuls $\mathbf{k}$, energiju E_k i naelektrisanje $Q = q$. Stanje $b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ ima impuls $\mathbf{k}$, energiju E_k i naelektrisanje $-q$. Prema tome kreacioni operatori $a^\dagger(\mathbf{p})$, odnosno $b^\dagger(\mathbf{p})$ kreiraju česticu, odnosno antičesticu. Čestica i antičestica imaju pozitivne energije, a razlikuju se po znaku naelektrisanja. U kvantnoj teoriji polja i čestice i antičestice imaju pozitivne energije. Višečestična stanja se dobijaju uzastopnom primenom kreacionih operatora.

2.3 Kovarijantne komutacione relacije. Mikrokauzalnost

Kauzalnost fizičke teorije podrazumeva da je evolucija fizičkog sistema jednoznačno odredjena početnim uslovima i zakonima kretanja. Medjutim ovde govorimo o mikroskopskoj kauzalnosti tj. mikrokauzalnost. Signal ne može putovati većom brzinom od brzine svetlosti pa merenje u tački x ne može da utiče na merenje u tački y, ako su ove dve tačke razdvojene intervalom prostornog tipa. Prema tome, lokalne opservable $\mathcal{O}_1(x)$ i $\mathcal{O}_2(y)$ moraju zadovoljavati uslov

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0, \text{ za } (x-y)^2 < 0 \ . \tag{2.3.47}$$

Ovaj uslov se naziva uslovom mikrokauzalnosti.

Definišimo $i\Delta(x-y)$ sa

$$i\Delta(x-y) = [\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] \ . \tag{2.3.48}$$

Ova veličina je komutator dva skalarna polja i naziva se Pauli–Jordanovom funkcijom. Uvedimo pomoćne funkcije:

$$i\Delta^\pm(x-y) = [\phi^\pm(x), \phi^\mp(y)] \ . \tag{2.3.49}$$

Lako se vidi da je

$$i\Delta^+(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik\cdot(x-y)} \tag{2.3.50}$$

i

$$i\Delta^-(x-y) = -\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{ik\cdot(x-y)} = -i\Delta^+(y-x) \ , \tag{2.3.51}$$

pa je

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left(e^{-ik\cdot(x-y)} - e^{ik\cdot(x-y)} \right) \ . \tag{2.3.52}$$

Komutator dva slobodna skalarna polja je funkcija. U teoriji u kojoj je prisutna interakcija komutator dva polja nije funkcija već je operator. Jasno je da važi

$$i\Delta(x-y) = \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle - \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \ . \tag{2.3.53}$$

Ako je $x^0 > y^0$ veličina $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ predstavlja amplitudu da čestica propagira od tačke y do tačke x. Funkciju Pauli-Jordana možemo prepisati u obliku

$$i\Delta(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} \epsilon(k^0) \ , \tag{2.3.54}$$

gde je

$$\epsilon(k^0) = \begin{cases} 1, & \text{za } \ k^0 > 0 \\ -1, & \text{za } \ k^0 < 0 \ . \end{cases} \tag{2.3.55}$$

Na osnovu oblika (2.3.54) zaključujemo da je Pauli–Jordanova funkcija invarijantna na prave ortohrone Lorencove transformacije. Ako je $(x-y)^2 > 0$, tačke x i y su razdvojene intervalom vremenskog tipa (time-like separation) i tada možemo preći u sistem reference gde su ova dva dogadjaja na istom mestu, tj. gde je $x-y=(t,0,0,0)$. Funkcija $i\Delta^+(x-y)$ je

$$i\Delta^+(x-y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_m^\infty \mathrm{d}\omega\sqrt{\omega^2-m^2}e^{-i\omega t}\ . \tag{2.3.56}$$

U limesu $t\to\infty$ je

$$i\Delta^+(x-y)\to e^{-imt}\ . \tag{2.3.57}$$

Slično je i

$$i\Delta^-(x-y)\to e^{imt}\ . \tag{2.3.58}$$

Dakle, za veliko vreme t, Pauli– Jordanova funkcija se ponaša kao

$$i\Delta(x-y)\to e^{-imt}-e^{imt}\ . \tag{2.3.59}$$

Zaključujemo da je ona različita od nule. Dakle, komutator $[\phi(x),\phi(y)]$ ne isčezava za $(x-y)^2>0$. Odredimo sada ponašanje Pauli-Jordanove funkcije ako je interval $x-y$ prostornog tipa, tj. ako je $(x-y)^2<0$. Tada je moguće preći u sistem gde je $x-y=(0,\mathbf{r})$. U ovom sistemu, a i u svakom drugom koji je sa njim povezan ortohronom Lorencovom transformacijom, je

$$i\Delta(x-y)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Big)=0\ . \tag{2.3.60}$$

Dakle, za $(x-y)^2<0$, zbog invarijantnosti Pauli-Jordanove funkcije, je

$$[\phi(x),\phi(y)]=0\ . \tag{2.3.61}$$

Specijalno za $x^0=y^0$ dobijamo istovremenu komutacionu relaciju

$$[\phi(x^0,\mathbf{x}),\phi(x^0,\mathbf{y})]=0\ . \tag{2.3.62}$$

Osobina da operatori $\phi(x)$ i $\phi(y)$ komutiraju ako je vektor $x-y$ prostornog tipa naziva se mikrokauzalnost. Drugim rečima polja u tačkama x i y ne mogu uticati jedno na drugo.

Za kompleksno skalarno polje Pauli–Jordanova funkcija je definisana sa

$$i\Delta(x-y)=[\phi(x),\phi^\dagger(y)]=\langle 0|[\phi(x),\phi^\dagger(y)]|0\rangle\ . \tag{2.3.63}$$

Ona je data sa

$$\begin{aligned} i\Delta(x-y) &= \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle-\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \\ &= i\Delta^+(x-y)-i\Delta^-(x-y)\ . \end{aligned} \tag{2.3.64}$$

Funkcije $i\Delta(x-y), i\Delta^+(x-y)$ i $i\Delta^-(x-y)$ su iste kao kod relnog sklarnog polja. Ako je $x^0>y^0$, propagator $\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle$ je amplituda za propagaciju čestice od tačke y do tačke x. Sa druge strane, ako je $x^0>y^0$, izraz $\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle$ je amplituda propagagiranja antičestice od tačke x do tačke y. Obe funkcije $i\Delta^+(x-y)$ i $i\Delta^-(x-y)$ su nenulte van svetlosnog konusa, tj. u oblasti gde je $(x-y)^2>0$. Drugim rečima propagagiranje čestice i antičestice curi van svetlosnog konusa i preti da naruši princip mikrokauzalnosti. Medjutim ova dva doprinosa se egzaktno poništavaju, što se vidi iz relacije (2.3.64). U kvantnoj mehanici propagator slobodne čestice od $\mathbf{x}_2$ do $\mathbf{x}_1$ za vreme t je

$$\langle \mathbf{x}_2 | e^{-i\mathbf{p}^2/2m} | \mathbf{x}_1 \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2/2t} \ . \tag{2.3.65}$$

Ovaj izraz je nenulti za sve vrednosti položaja i vremena. Mikrokauzalnost u kvantnoj mehanici je narušena jer propagator curi van svetlosnog konusa. Narušenje mikrokauzalnosti u kvantnoj mehanicije je očekivano jer kvantna mehanika nije relativistička teorija. U KTP ovaj problem, kao što smo videli, rešen je poništavanjem propagacije čestice i antičestice.
Zadatak: Pokazati da je

$$i\Delta^+(x^0 = y^0, \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(mr) \ , \tag{2.3.66}$$

kao i da za veliko r važi

$$i\Delta^+ \to e^{-mr} \ . \tag{2.3.67}$$

Rešenje: Prelaskom na sferne koordinate u $\mathbf{k}$ prostoru imamo

$$\begin{aligned} i\Delta^+ &= -\frac{i}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \mathrm{d}k \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \left(e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \\ &= -\frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikr} \ . \end{aligned}$$

Komleksna funkcija $\sqrt{z}$ ima zasek (cut) koji počinje u tački $z = 0$. Zasek ćemo u kompleksnoj z ravni usmeriti duž negativnog dela realne ose. Zbog postojanja zaseka imamo dve grane funkcije $\sqrt{z}$. Jedna je $\sqrt{\rho} e^{i\varphi/2}$, a druga $\sqrt{\rho} e^{i(\varphi/2 + \pi)}$, gde je $z = \sqrt{\rho} e^{\varphi}$. Za malo ϵ je

$$\sqrt{-X \pm i\epsilon} = \pm i \sqrt{X} \ , \tag{2.3.68}$$

za $X > 0$. Ovu analizu ćemo primeniti na funkciju $\sqrt{k^2 + m^2}$. Ona ima dva tačke zaseka $\pm im$. Primenićemo Košijevu teoremu na konturu prikazanu na slici ???. Za veliko R je

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \frac{k e^{ikr}}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -i \int_\infty^m \frac{\mathrm{d}y(iy + \epsilon)}{\sqrt{-y^2 + m^2 + i\epsilon}} e^{(i\epsilon - y)r} - i \int_m^\infty \frac{\mathrm{d}y(iy - \epsilon)}{\sqrt{-y^2 + m^2 - i\epsilon}} e^{(-i\epsilon - y)r} \ ,$$

odakle je

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikr} = -2i \int_\infty^m \frac{y \mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} \ . \tag{2.3.69}$$

Prema tome

$$\begin{aligned} i\Delta^+(0, r) &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty \frac{y \mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_m^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} \ . \end{aligned} \tag{2.3.70}$$

Smenom $y = mt$ integral se svodi na Beselovu funkciju treće vrste

$$i\Delta^+(0,r) = \frac{1}{4\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial r}K_0(mr) \ . \tag{2.3.71}$$

Za veliko r se dobija

$$i\Delta^+(0,r) \to e^{-mr} \ . \tag{2.3.72}$$

2.4 Feynman-ov propagator

Vremensko uredjenje dva operatora skalarnog polja je definisano sa

$$T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(y), & \text{za} \ \ x^0 > y^0 \\ \phi^\dagger(y)\phi(x), & \text{za} \ \ x^0 < y^0 \ . \end{cases} \tag{2.4.73}$$

Vremensko uredjenje polja postavlja po opadajućem vremenu gledano sa desna na levo. Ova definicija se lako generalizuje za slučaj proizvoda više polja, npr.

$$TA(x)B(y)C(z) = A(x)B(y)C(z) \ ,$$

ako je $x^0 > y^0 > z^0$. Fajnmanov propagator za skalarno polje je vakuumska očekivana vrednost vremenskog uredjenja dva operatora polja, tj.

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \langle 0|T(\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\ &= \theta(x_0-y_0)\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y_0-x_0)\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.4.74}$$

Iz ovog izraza je jasno da ako je $x^0 > y^0$ čestica kreirana u tački $\mathbf{y}$ u trenutku y^0 propagira do tačke $\mathbf{x}$ u trenutku x^0 gde se anihilira. Takodje, ako je $x^0 < y^0$ antičestica kreirana u tački $\mathbf{x}$ u trenutku x^0 propagira do tačke $\mathbf{y}$ u trenutku y^0 gde se anihilira. Čestica propagira unapred, a antičestica unazad u vremenu.

Fajnmanov propagator (2.4.74) može da naruši Lorencovu simetriju, jer vremenski redosled dogadjaja može da zavisi sistema reference. Medjutim to ipak nije tačno. Ako je $(x-y)^2 > 0$ onda je vremenski sled dogadjaja isti u svim inercijalnim sistemima koji su povezani pravim ortohronim Lorencovim transformacijama. Ako je $(x-y)^2 < 0$, vremenski redosled dogadjaja zavisi od sistema reference. Medjutim u ovom slučaju to nije bitno, jer operatori $\phi(x)$ i $\phi(y)$ komutiraju. Dakle Fajnmanov propagator je definisan kovarijantno.

Koristeći izraze za funkcije $i\Delta^\pm(x-y)$ dobijamo

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \theta(x^0-y^0)i\Delta^+(x-y) + \theta(y_0-x_0)i\Delta^+(y-x) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(\theta(x^0-y^0)e^{-ik\cdot(x-y)} - \theta(y^0-x^0)e^{ik\cdot(x-y)}\Big)\Big|_{k^0=E_k} \ . \end{aligned} \tag{2.4.75}$$

Fajnmanov propagator se može prepisati kao integral po četvoroimpulsu:

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik\cdot(x-y)} \ . \tag{2.4.76}$$

Polovi podintegralne funkcije su u tačkama $\pm E_k \mp i\epsilon$. Primenom Košijeve teoreme se dobija rezultat (2.4.75). U formuli (2.4.76) integrali se po realnoj osi u kompleksnoj k^0 ravni, a $i\epsilon$ preskripcija pomera polove. Ekvivalentno, možemo integraliti po konturi koja je deformisana. Lako se vidi da je Fajnmanov propagator Grinova funkcija za Klajn–Gordonovu jednačinu uz odgovarajuće granične uslove, tj.

$$(\Box_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) \ . \tag{2.4.77}$$

Pokazati da su retardovana i advansirana Grinova funkcija date sa

$$i\Delta_R(x-y) = \theta(x^0-y^0)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle \ , \tag{2.4.78}$$

$$i\Delta_A(x-y) = \theta(y^0-x^0)\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle \ , \tag{2.4.79}$$

2.5 Poenkareova simetrija kvantnih polja i stanja

Poenkareove transformacije se sastoje od Lorencovih transformacija i translacija u prostoru Minkovskog. One su prostorno–vremenska simetrija relativističke teorije polja. Transformacija koordinata je data sa

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu \ , \tag{2.5.80}$$

odnosno infinitezimalno

$$x^\mu \to x'^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu \ . \tag{2.5.81}$$

Lorencove transformacije zadovoljavaju $\Lambda^T g \Lambda = g$ odnosno $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Zakon transformacije klasičnih polja pri Poenkareovim transformacijama je

$$\varphi_r(x) \to \varphi'_r(x) = S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(\Lambda^{-1}(x-\epsilon)) \ . \tag{2.5.82}$$

Matrice $S_{rs}(\Lambda)$ čine konačnodimenzionu reprezentaciju Lorencove grupe. Transformacije polja u klasičnoj teoriji su kanonske transformacije. U kvantnoj teoriji njima odgovaraju unitarne reprezentacije. Sada ćemo da odredimo kako se kvantna polja i stanja transformišu pri Poenkareovim transformacijama. Matrični elementi operatora polja $\langle\psi|\phi_r(x)|\chi\rangle$, gde su $|\chi\rangle$ i $|\psi\rangle$ stanja, treba da se transformišu na isti način kao i klasična polja $\varphi_r(x)$. Pri koordinatnim transformacijama (2.5.80) u izrazu $\langle\psi|\phi_r(x)|\chi\rangle$ transformišu se ili stanja ili polja. U zavisnosti od toga šta smo transformisali govorimo o aktivnoj ili pasivnoj transformaciji. Kod aktivne interpretacije transformacije transformišu se stanja, a kod pasivne operatori. Analizirajmo prvo aktivne Poenkareove transformacije. Stanja se transformišu po unitarnim reprezentacijama Poenkareove grupe

$$|\psi\rangle \to |\psi\rangle' = U(\omega,\epsilon)|\psi\rangle \ , \tag{2.5.83}$$

tj. $U(\omega,\epsilon)U^\dagger(\omega,\epsilon) = U^\dagger(\omega,\epsilon)U(\omega,\epsilon) = I$. Transformacije su unitarne zbog očuvanja verovatnoće u kvantnoj teoriji. Unitarni operator Poenkareove transformacije možemo predstaviti u obliku

$$U(\omega,\epsilon) = e^{iP^\mu\epsilon_\mu - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} \ , \tag{2.5.84}$$

gde su P^μ generatori translacija, tj. impulsi, a $M_{\mu\nu}$ generatori Lorencovih transformacija. Ovi operatori čine reprezentaciju Poenkareove algebre. Zakon transformacije matričnih elemenata je

$$\begin{aligned} \langle\psi|\phi_r(x)|\chi\rangle &\rightarrow \langle\psi'|\phi_r(x)|\chi'\rangle \\ &= \langle\psi|U^{-1}(\omega,\epsilon)\phi_r(x)U(\omega,\epsilon)|\chi\rangle \\ &= S_{rs}(\omega)\varphi_s(\Lambda^{-1}(x-\epsilon)) \\ &= S_{rs}(\omega)\langle\psi|\phi_s(\Lambda^{-1}(x-\epsilon))|\chi\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.5.85}$$

Zaključujemo da kvantna polja zadovoljavaju sledeće transformaciono pravilo

$$\phi'_r(x) = U^{-1}(\omega,\epsilon)\phi_r(x)U(\omega,\epsilon) = S_{rs}(\omega)\phi_s(\Lambda^{-1}(x-\epsilon)) \ . \tag{2.5.86}$$

Ako Poenkareove transformacije interpretiramo pasivno tada klasična polja se transformišu prema

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(x) \ . \tag{2.5.87}$$

Matrični elementi operatora polja treba da zadovoljavaju

$$\langle\psi|\phi'_r(x')|\chi\rangle = S_{rs}(\Lambda)\langle\psi|\phi_s(x)|\chi\rangle \ , \tag{2.5.88}$$

odnosno

$$\phi'(\Lambda x+\epsilon) = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(x) \ . \tag{2.5.89}$$

Gornju jednačinu možemo prepisati u obliku

$$\phi'_r(x) = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(\Lambda^{-1}(x-\epsilon) \ , \tag{2.5.90}$$

što je ekvivaletno sa (2.5.86).

Analizirajmo prvo translacije. Iz (2.5.86) za skalarno polje imamo

$$U^{-1}(\epsilon)\phi(x)U(\epsilon) = \phi(x-\epsilon) \ , \tag{2.5.91}$$

gde je $U(\epsilon) = e^{iP_\mu\epsilon^\mu}$. Impuls realnog skalarnog polja je

$$P^\mu = \int \mathrm{d}^3p p^\mu a^\dagger \mathbf{p})a(\mathbf{p}) \ . \tag{2.5.92}$$

Iz (2.5.91) za infinitezimalne translacije je

$$(1-i\epsilon^\mu P_\mu)\phi(x)(1+i\epsilon^\mu P_\mu) = \phi(x) - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) \ , \tag{2.5.93}$$

odakle je

$$[P_\mu, \phi(x)] = -i\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \ . \tag{2.5.94}$$

Varijacija forme kvantnog polja je

$$\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) \ , \tag{2.5.95}$$

odnosno

$$\delta_0\phi(x) = -i[\epsilon^\mu P_\mu, \phi(x)] \ . \tag{2.5.96}$$

Za $\mu = 0$ jednačina (2.5.94) je Hamiltonova jednačina kretanja. Ako u izrazu

$$e^{iP_\mu\epsilon^\mu}\phi(x)e^{-iP_\mu\epsilon^\mu} = \phi(x+\epsilon) \tag{2.5.97}$$

izaberemo $x^\mu = (0, \mathbf{x})$ i $\epsilon^\mu = (t, 0)$ dobijamo vezu izmedju operatora polja u Šredingerovoj i Hajzenbergovoj slici.

Pri Lorencovim transormacijama kvantno skalarno polje transformiše se prema

$$U^{-1}(\omega)\phi(x)U(\omega) = \phi(\Lambda^{-1}x) \ , \tag{2.5.98}$$

gde je $U(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}$ reprezentacija Lorencove transformacije. Gornja jednačina je prema tome

$$e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(x)e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = \phi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) \ , \tag{2.5.99}$$

odakle je

$$[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi(x) \ . \tag{2.5.100}$$

Generatori $M_{\mu\nu}$ i P_μ zadovoljavaju tenzorski zakon transformacija

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \\ U^{-1}(\Lambda)M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{2.5.101}$$

odakle slede komutacione relacije Poenkareove algebre:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\rho\sigma}, P_\mu] &= i\left(g_{\mu\sigma}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\sigma\right) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i\left(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}\right) \ . \end{aligned} \tag{2.5.102}$$

Iz zakona transformacije kvantnih polja pri Lorencovim transformacijama slede zakoni transformacija kreacionih i anihilacionih operatora. Odavde se nalazi kako se stanja transformišu u odnosu na Lorencove transformacije. Rezultat je

$$U(\Lambda)|k_1, \ldots, k_n\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{k}_1)\ldots a^\dagger(\mathbf{k}_n)|0\rangle = \sqrt{\frac{E_{k_1'}\ldots E_{k_n'}}{E_{k_1}\ldots E_{k_n}}}|\Lambda k_1, \ldots \Lambda k_n\rangle \ . \tag{2.5.103}$$

Detalji ovog računa su dati u zadatku 7.20. Mnogo više detalja o Poenkareovoj simetriji dato je na kursu Teorije elementarnih čestica.

2.6 Kazimirov efekat

Razmatrajmo bezmaseno skalarno polje izmedju dve paralelne ploče koje su na medjusobnom rastojanju a. Neka su ploče kvadratne, ivica L i neka je $L \gg a$. Uzmimo da je vrednost polja na ove dve granične ravni jednaka nuli. Ako z osu orjentišemo normalno na ravni, onda su granični uslovi

$$\phi(z=0)=\phi(z=a)=0\ . \tag{2.6.104}$$

Ispitaćemo kako ovi netrivijalni granični uslovu utiču na vakuum. Partikularna rešenja Klajn–Gordonove jednačine

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\Big)=0 \tag{2.6.105}$$

su

$$e^{\pm i\omega t+ik_1x+ik_2y}\sin\Big(\frac{n\pi}{a}z\Big)\ .$$

Iz jednačine sledi disperziona relacija

$$\omega_{k,n}=\sqrt{k_1^2+k_2^2+\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2}. \tag{2.6.106}$$

Impuls duž z-ose je diskretizovan kvantnim brojem n, dok je impuls u xOy ravni kontinualan. Opšte rešenje Klajn–Gordonove jednačine koje zadovoljava zadate granične uslove je

$$\phi=\sqrt{\frac{a}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{\mathrm{d}^2k}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{kn}}}\Big(a(\mathbf{k},n)e^{-i\omega_{kn}t+ik^1x+ik^2y}+a^\dagger(\mathbf{k},n)e^{i\omega_{kn}t-ik^1x-ik^2y}\Big)\sin\Big(\frac{n\pi z}{a}\Big)\ . \tag{2.6.107}$$

Komutacione relacije koje zadovoljavaju kreacion i anihilacioni operatori su

$$\begin{aligned}[a(\mathbf{k},n),a^\dagger(\mathbf{q},m)] &= \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{nm}\\ [a(\mathbf{k},n),a^\dagger(\mathbf{q},m)] &= 0\\ [a^\dagger(\mathbf{k},n),a^\dagger(\mathbf{q},m)] &= 0\ .\end{aligned} \tag{2.6.108}$$

Energija osnovnog stanja je

$$\begin{aligned}E_0 &= \langle 0|H|0\rangle\\ &= \frac{1}{2}\langle 0|\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}^2k\,\omega_{kn}\Big(a^\dagger(\mathbf{k},n)a(\mathbf{k},n))+a(\mathbf{k},n)a^\dagger(\mathbf{k},n)\Big)|0\rangle\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}^2k\,\omega_{kn}\delta^{(2)}(0)\ .\end{aligned} \tag{2.6.109}$$

Kako je

$$\delta^{(2)}(0)=\frac{L^2}{(2\pi)^2}$$

to je vakuumska energija po jedinici površine ploča data sa

$$\frac{E_0}{L^2}=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\sqrt{k_1^2+k_2^2+\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2}\ . \tag{2.6.110}$$

Integral po impulsima u Oxy ravni je divergentan. Regularizovaćemo ga dimenzionom regularizacijom. Sa dvodimenzionog prostora prećićemo na prostor čija je dimenzija $D = 2 - \epsilon$. Dimenzija prostora u kojem računamo integral je manja od 2 i postoji ϵ za koje je integral konačan. Prema tome integral ćemo izračunati u $D = 2 - \epsilon$, a zatim napravićemo analitičko produženje u dve dimenzije. Dakle

$$\begin{aligned}\frac{E_0}{L^2} &= \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{d}^{2-\epsilon}k_\perp \sqrt{k_\perp^2 + \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^{\frac{2-\epsilon}{2}}}{\Gamma\Big(\frac{2-\epsilon}{2}\Big)}\sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{d}k_\perp k_\perp^{1-\epsilon}\sqrt{k_\perp^2 + \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2}\ ,\end{aligned} \tag{2.6.111}$$

gde smo primenili sledeću formulu za površinu jedinične sfere u D dimenzionom prostoru

$$\int \mathrm{d}\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\Big(\frac{D}{2}\Big)}\ .$$

Integral u (2.6.111) je tablični i jednak je beta funkciji:

$$\int_0^\infty x^b(x^2+M)^{-a} = \frac{\Gamma\Big(\frac{1+b}{2}\Big)\Gamma\Big(a-\frac{1+b}{2}\Big)}{2M^{a-\frac{1+b}{2}}\Gamma(a)}\ . \tag{2.6.112}$$

Primenom ove formule dobijamo

$$\frac{E_0}{L^2} = -\frac{\pi^2}{12a^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\epsilon-3}}\ , \tag{2.6.113}$$

i on je očigledno divergentan, jer suma koja se u njemu pojavljuje je beskonačna. Suma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{2.6.114}$$

je Rimanova zeta funkcija. Ona je definisana ako je ispunjeno $Re(s) > 1$. Rimanova $\zeta-$ funkcija se može analitički produžiti u celoj kompleksnoj ravni. Tako se dobija sledeći rezultat

$$\zeta(-3) = \frac{1}{120}\ .$$

Prema tome energija osnovnog stanja po jedinici površine je

$$\frac{E_0}{L^2} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}\ . \tag{2.6.115}$$

Diferenciranjem izraza za energiju po rastojanju izmedju ploča dobijamo silu po jedinici površine

$$f = -\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{E_0}{L^2}\Big) = -\frac{\pi^2}{480a^4}\ . \tag{2.6.116}$$

Sila izmedju ploča je privlačna. U našem svetu dominira elektromagnetna interakcija. Za elektromagnetno polje rezultat je duplo veći od rezultata koji smo mi ovde našli, jer foton ima dva stepena slobode. Evaj efekat je predvideo Kazimir 1984 godine. Desetak godina kasnije to je i eksperimentalno potvrdjeno. Privlačna sila izmedju ploča je mala. Konkretno za $a \approx 1\mu m,\ L \approx 1cm$ ona iznosi $F \approx 10^{-8} N$.

Literatura

[1] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964

[2] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965

[3] N. N. Bogoljubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley-Interscience, New York, 1980

[4] W. Greiner and J, Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[5] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993

[6] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980

[7] F. Mandl and G. Show, *Quantum Field Theory*, New York, 1999

[8] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995

[9] L. Rayder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

[10] V. Radovanović, *Problem Book in Quantum Field Theory*, Springer, Berlin, New York, 2008

[11] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2009

[12] D. Tong, *Quantum Field Theory*, Lecture Notes, DAMTP, Cambridge

[13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I* , Cambridge University Press, New York, 1996