

KVANTNA TEORIJA POLJA I  
Beleške za predavanja  
Radna verzija

Voja Radovanović

Beograd, 2017.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Klasična teorija polja</b>	<b>7</b>
1.1	Ojler-Lagranževe jednačine kretanja . . . . .	7
1.1.1	Mehanički sistemi . . . . .	7
1.1.2	Klasična polja . . . . .	8
1.1.3	Hamiltonov princip. Ojler Lagranževe jednačine kretanja . . . . .	9
1.1.4	Primeri . . . . .	11
1.1.5	Hamiltonova formulacija . . . . .	14
1.2	Neterina teorema . . . . .	16
1.2.1	Fazna invarijantnost . . . . .	20
1.2.2	Translaciona invarijantnost i tenzor energije impulsa . . . . .	21
1.2.3	Lorencova simetrija i uglovni moment . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Kvantovanje slobodnog skalarnog polja</b>	<b>23</b>
2.1	Realno skalarno polje . . . . .	23
2.2	Kompleksno skalarno polje . . . . .	29
2.3	Kovarijantne komutacione relacije. Mikrokauzalnost . . . . .	30
2.4	Feynman-ov propagator . . . . .	34
2.5	Poenkareova simetrija kvantnih polja i stanja . . . . .	36
2.6	Kazimirov efekat . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Kvantovanje slobodnog spinorskog polja</b>	<b>43</b>
3.1	Dirakove $\gamma$ -matrice . . . . .	43
3.2	Lagranžijan i hamiltonijan . . . . .	44
3.3	Tenzor energije-impulsa . . . . .	45
3.4	Lorencova simetrija . . . . .	45
3.5	Dirakova jednačina . . . . .	47
3.6	Kvantovanje Dirakovog polja . . . . .	49
3.7	Lorencova simetrija i spin . . . . .	53
3.8	Veza između spina i statistike. Mikrokauzalnost. . . . .	55
3.9	Feynmanov propagator . . . . .	56
3.10	Diskretne transformacije . . . . .	57
3.10.1	Prostorna inverzija . . . . .	58
3.10.2	Konjugacija naboja . . . . .	59

3.10.3	Vremenska inverzija . . . . .	60
3.11	CPT teorema . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Kvantovanje elektromagnetnog polja</b>	<b>63</b>
4.1	Uvod . . . . .	63
4.2	Kanonski hamiltonijan . . . . .	64
4.3	Kvantovanje elektromagnetnog polja u Kulonovoj kalibraciji . . . . .	65
4.3.1	Hamiltonijan i impuls . . . . .	68
4.3.2	Spin fotona . . . . .	70
4.4	Kvantovanje elektromagnetnog polja u Lorencovoj kalibraciji . . . . .	71
4.4.1	Fotonski propagator . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Perturbativni račun</b>	<b>77</b>
5.1	Šredingerova, Hajzenbergova i Dirakova slika . . . . .	78
5.2	Dajsonova formula . . . . .	80
5.3	S matrica . . . . .	83
5.4	Vikova teorema . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Kvantna elektrodinamika</b>	<b>89</b>
6.1	S matrica u QED . . . . .	89
6.2	Prvi red teorije perturbacije . . . . .	91
6.3	Drugi red teorije perturbacije . . . . .	93
6.3.1	Mollerovo rasejanje . . . . .	93
6.3.2	Polarizacija vakuma . . . . .	95
6.3.3	Sopstvena energija elektrona . . . . .	96
6.4	Fajnmanova pravila u QED . . . . .	97
6.5	Presek za rasejanje . . . . .	99
6.6	Rasejanje $\mu^-(p_1) + \mu^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2)$ . . . . .	101
6.7	Komptonovo rasejanje . . . . .	103
6.8	Rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu . . . . .	107

# Predgovor

Ovaj tekst je nastao na osnovu predavanja koja držim iz predmeta Kvantna teorija polja 1 studentima teorijske i eksperimentalne fizike na Fizičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu. Ovaj predmet se sluša u osmom semestru, nakon Relativističke kvantne mehanike.

Kvantna mehanika opisuje nerelativističke kvantne fenomene, kao što su npr. atomski i molekularni spektri. Međutim, nerelativistička teorija je samo aproksimacija relativističkih efekata. Kvantna teorija polja je kombinacija kvantne mehanike i specijalne relativnosti zasnovana na konceptu polja.

Izloženi materijal se oslanja na zbirku zadataka [11]. Mnogi detalji računa su dati kroz zadatke u ovoj zbirci.

Zahvaljujem se studentima koji su školske 2015/16. godine slušali ovaj predmet i motivisali me da prekucam svoje beleške. Posebno se zahvaljujem Milanu Kornjači i Ani Mariji Nedić koji su mi dostavili sve štamparske greške koje su uočili u tekstu. Takođe, zahvaljujem se i Dušku Latasu, docentu Fizičkog fakulteta, koji je nacrtao slike.

Beograd, 2016.

Voja Radovanović  
e-mail: rvoja@ipb.ac.rs



# Glava 1

## Klasična teorija polja

Ova glava posvećena je klasičnim poljima. Na kursu Elektrodinamike već ste se susreli sa elektromagnetnim poljem. Polja možemo shvatiti kao generalizaciju diskretnih mehaničkih sistema na sisteme sa beskonačno puno stepeni slobode. Primenom Hamiltonovog principa minimalnog dejstva dobićemo jednačine kretanja polja. Poslednji deo ove glave posvećen je simetriji i Neterinoj teoremi.

### 1.1 Ojler-Lagranževe jednačine kretanja

#### 1.1.1 Mehanički sistemi

U klasičnoj mehanici stanje sistema je jednoznačno određeno generalisanim koordinatama:  $q_1, \dots, q_n$ . Centralna veličina u analitičkoj mehanici koja sadrži svu informaciju o sistemu je lagranžijan. On je funkcija generalisanih koordinata i generalisanih brzina,  $L = L(q, \dot{q}, t)$ . Sa  $q$  odnosno  $\dot{q}$  smo obeležili sve generalisane koordinata, odnosno brzine. Lagranžijan idealnih sistema sa potencijalnim silama je razlika kinetičke i potencijalne energije,  $L = T - U$ .

Dejstvo (akcija) je vremenski integral lagranžijana:

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt . \quad (1.1.1)$$

Sa  $t_i$  i  $t_f$  obeležili smo početni i krajnji trenutak. Sa matematičke tačke gledišta dejstvo je funkcional, jer trajektorije preslikava u realne brojeve. Dinamika sistema je određena Hamiltonovim principom (princip najmanjeg dejstva). Trajektorija po kojoj se sistem kreće od početne konfiguracije  $(q_1^{(i)}, \dots, q_n^{(i)})$  do finalne  $(q_1^{(f)}, \dots, q_n^{(f)})$  u konfiguracionom prostoru određena je Hamiltonovim principom najmanjeg dejstva<sup>1</sup>. Po ovom principu trajektorija po kojoj se sistem kreće je ona za

---

<sup>1</sup>Neka je  $F[f(x)]$  funkcional koji funkcije  $f(x)$  preslikava u brojeve. Funkcionalni izvod  $\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$  je definisan sa

$$\delta F = \int dy \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) .$$

koju je dejstvo stacionarno, tj. za koju je

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0, i = 1, \dots, n. \quad (1.1.2)$$

Podrazumeva se da su varijacije generalisanih koordinata u početnom i krajnjem trenutku jednake nuli. Na kursu analitičke mehanike pokazano je da uslov stacionarnosti dejstva daje Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, n. \quad (1.1.3)$$

Dakle, Hamiltonov princip daje jednačine kretanja sistema.

### 1.1.2 Klasična polja

Gornja analiza se lako generalizuje na teoriju polja. Polja su funkcije prostorno-vremenskih koordinata  $\phi_r = \phi_r(t, \mathbf{x})$ . Indeks  $r = 1, \dots, N$  je diskretan i on prebrojava polja. U klasičnoj teoriji polja generalisane koordinate su polja:

$$q_i(t) \rightarrow \phi_{r\mathbf{x}}(t) = \phi_r(x). \quad (1.1.4)$$

Iz prethodnog izraza vidimo da su polja fizički sistemi sa beskonačno puno stepeni slobode, jer je  $\mathbf{x} \in V \subset R^3$ .

Relativistička polja poseduju određena transformaciona svojstva pri Lorencovim transformacijama. Prostorno-vremenske koordinate se pri Lorencovim transformacijama transformišu kao

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

gde matrica  $\Lambda$  zadovoljava  $\Lambda^T g \Lambda = g$ . Lorencove transformacije povezuju koordinate dva inercijalna sistema. Skalarno polje,  $\phi(x)$  se ne menja pri Lorencovom transformacijama, tj.

$$\phi'(x' = \Lambda x) = \phi(x). \quad (1.1.5)$$

Sa  $\phi'(x')$  obeležili smo polje nakon Lorencove transformacije u novim koordinatama. Vektorsko polje se pri Lorencovim transformacijama menja po sledećem zakonu

$$A'^{\mu}(x' = \Lambda x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x). \quad (1.1.6)$$

Dirakovo polje zadovoljava sledeće transformaciono pravilo

$$\psi'(x') = e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4} \psi(x).$$

Generalno, zakon transformacije polja  $\phi_r(x)$  je dat sa

$$\phi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\Lambda) \phi_s(x). \quad (1.1.7)$$



Matrice  $S(\Lambda)$  čine reprezentaciju Lorencove grupe, tj. zadovoljavaju

$$S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1\Lambda_2) .$$

Dakle, polja se transformišu po reprezentacijama Lorencove grupe.

Poenkareove transformacije se sastoje od Lorencovih transformacija i translacija. One na koordinate prostora Minkovskog deluju prema

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} ,$$

gde su  $\Lambda$  Lorencove matrice, a  $a^{\mu}$  konstantan četvorovektor. Pri Poenkareovim transformacijama skalarno, Dirakovo odnosno vektorsko polje se transformišu na sledeći način

$$\begin{aligned} \phi'(x' = \Lambda x + a) &= \phi(x) , \\ A'^{\mu}(x' = \Lambda x + a) &= \Lambda^{\mu}_{\nu}A^{\nu}(x) , \\ \psi'(x' = \Lambda x + a) &= e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4}\psi(x) , \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

respektivno.

Transformacije možemo interpretirati kao aktivne i kao pasivne. Aktivne transformacije deluju na fizički sistem transformišući ga, dok je pri tome koordinatni sistem fiksiran. Nasuprot tome, kod pasivne transformacije fizički sistem je fiksiran, a transformacija deluje na koordinatni sistem. Aktivna i pasivna transformacija su ekvivalentne.

Ako skalarno polje  $\phi(x)$  transliramo za  $a$  duž  $x$ - ose (prva slika u 1.1) dobićemo novu funkciju  $\phi'(x)$  datu sa

$$\phi'(x) = \phi(x - a) , \tag{1.1.9}$$

odnosno

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x) .$$

Translacija je delovala aktivno; koordinatni sistem je fiksiran, a polje smo transformisali. Transliranje skalarnog polja udesno u fiksnom koordinatnom sistemu ekvivalentno je transliranju koordinatnog sistema ulevo za  $a$ , dok je polje fiksirano. U ovom, drugom slučaju kažemo da transformacija deluje pasivno. Na drugoj slici u 1.1 prikazana je pasivna translacija. Sa  $\phi'(x')$  smo obeležili novo polje u novom koordinatnom sistemu. Ono je dato sa

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x) .$$

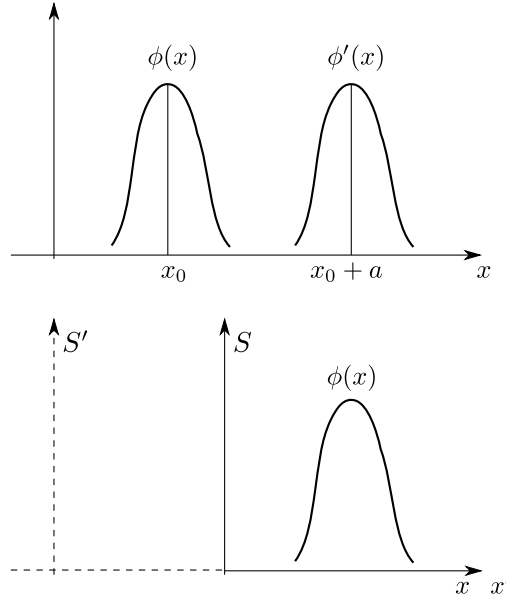
### 1.1.3 Hamiltonov princip. Ojler Lagranževe jednačine kretanja

U teoriji polja dejstvo je oblika

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} ,$$

gde je Lagranžijan

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L} .$$



Slika 1.1: Aktivna i pasivna interpretacija translacije.

Oblast prostora  $V$  može biti konačan deo prostora ili ceo  $R^3$  prostor. Veličina  $\mathcal{L}$  je gustina Lagranžijana. Gustina Lagranžijana je funkcija polja i izvoda polja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) . \quad (1.1.10)$$

Pošto želimo da konstruišemo teoriju koja je relativistički kovarijantna dejstvo mora biti Lorencov skalar. Kako je mera  $d^4x$  skalar to zaključujemo da gustina lagranžijana mora biti skalar.

Jednačine kretanja za polja se dobijaju iz Hamiltonovog principa. Pri varijacijama polja

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) , \quad (1.1.11)$$

infinitesimalna promena dejstva (tj. varijacija dejstva) je

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left( \mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu \phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta(\partial_\mu \phi_r) \right) . \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Jasno je da je  $\delta(\partial_\mu \phi_r(x)) = \partial_\mu \delta\phi_r(x)$ . Primenom poslednje formule i parcijalne integracije u drugom članu dolazimo do

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \delta\phi_r \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \right) \delta\phi_r + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r d\Sigma_\mu . \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

U zadnjem koraku primenili smo parcijalnu integraciju. Površinski član je jednak nuli, jer su varijacije polja na granici oblasti integracije jednake nuli. Prema tome

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \right) \right) \delta \phi_r . \quad (1.1.14)$$

Po Hamiltonovom principu jednačine kretanja se dobijaju iz uslova ekstremalnosti dejstva,  $\delta S = 0$ . Pošto su polja  $\phi_r(x)$  nezavisna to dobijamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \right) = 0 . \quad (1.1.15)$$

Ovo su Ojler-Lagranževe jednačine.

Lagranžijan nije jednoznačno određen. Lagranžijanu možemo da dodamo divergenciju neke funkcije polja

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_{\mu} \Lambda^{\mu}(\phi_r) . \quad (1.1.16)$$

Ovo je pokazano u zadatku 5.4.

### 1.1.4 Primeri

Sad ćemo navesti nekoliko primera u kojima ćemo naći jednačine kretanja. Gustina Lagranžijana za slobodno skalarno polje je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi) (\partial^{\mu} \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 . \quad (1.1.17)$$

Da bismo sastavili jednačine kretanja trebaju nam sledeći parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} = \partial^{\mu} \phi . \quad (1.1.18)$$

Jednačina kretanja je Klajn-Gordonova jednačina

$$(\square + m^2) \phi = 0. \quad (1.1.19)$$

Od dva realna skalarna polja  $\phi_1(x)$  i  $\phi_2(x)$  možemo konstruisati kompleksna skalarna polja  $\phi$ ,  $\phi^{\dagger}$  sa

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^{\dagger} = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} . \quad (1.1.20)$$

Gustina Lagranžijana u ovom slučaju je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_1) (\partial^{\mu} \phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_2) (\partial^{\mu} \phi_2) - \frac{m^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) . \quad (1.1.21)$$

Uvodjenjem kompleksnih polja gustina lagranžijana (1.1.21) postaje

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu} \phi^{\dagger}) (\partial^{\mu} \phi) - m^2 \phi^{\dagger} \phi . \quad (1.1.22)$$

U (1.1.22) kompleksna polja  $\phi$  i  $\phi^\dagger$  su nezavisna. Jednačine kretanja su

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\phi &= 0 \\(\square + m^2)\phi^\dagger &= 0 .\end{aligned}\tag{1.1.23}$$

I za realna kao i za kompleksna polja parametar  $m$  je masa polja.

Realno skalarno polje ima jedan, a kompleksno dva stepena slobode. Pod stepenima slobode se podrazumeva broj linearno nezavisnih funkcija. Kasnije ćemo videti da su ekscitacije skalarnog polja čestice spina nula. Gustina lagranžijana (1.1.17) opisuje slobodno skalarno polje. Medjutim, slobodne teorije polja su neinteresantne, jer se u njima ništa ne dešava. Sledeći lagranžijan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\tag{1.1.24}$$

je primer interakcione teorije, tzv.  $\phi-4$  teorije. Poslednji član u lagranžijanu opisuje interakciju polja samog sa sobom. Konstanta  $\lambda$  je konstanta interakcije.

Dirakovo polje opisuje čestice spina  $s = 1/2$ . Gustina Lagranžijana slobodnog Dirakovog polja je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi .\tag{1.1.25}$$

$\psi$  i  $\bar{\psi}$  su nezavisna polja pa dobijamo dve jednačine kretanja

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \\i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1.26}$$

Dobili smo Dirakove jednačine za polja  $\psi$  i  $\bar{\psi}$ .

Lagranžijan slobodnog vektorskog masenog polja je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu ,\tag{1.1.27}$$

gde je  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Variranjem ovog dejstva dobija se (Prokina jednačina)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0.\tag{1.1.28}$$

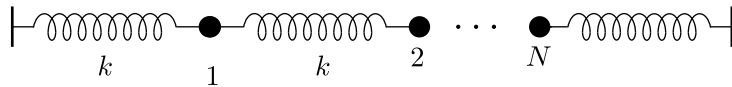
Lagranžijan elektromagnetnog polja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu ,\tag{1.1.29}$$

gde je  $j^\mu$  četvorovektor gustine struje. Poslednji član je interakcioni član.

Da bismo sastavili jednačine kretanja za potencijale, moramo prvo odrediti

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta\tag{1.1.30}$$



Slika 1.2: Lanac tačkastih masa

i

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) \\
 &= -\frac{1}{2} (F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}) \\
 &= -F^{\alpha\beta} .
 \end{aligned}$$

Jednačine kretanja (Maksvelove jednačine) su

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta , \quad (1.1.31)$$

odnosno

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu \\
 \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= j^\nu .
 \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

Spin vektorskog polja je 1. Bezmaseno vektorsko polje ima dva, a maseno tri stepena slobode.

Sledeći primer je polje koje nije relativističko. Neka je  $n$  malih kuglica masa  $m$  vezano oprugama konstanti elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l$ , kao na slici 1.1.4. Rastojanje izmedju susednih kuglica je  $l$ . Razmotrimo longitudinalne oscilacije ovog sistema. Neka je  $\xi_i$  odstupanje, tj. elongacija  $i$ -te kuglice od ravnotežnog položaja. Lagranžijan sistema je

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k (\xi_{i+1} - \xi_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l \left( \frac{m}{l} \dot{\xi}_i^2 - kl \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{l} \right)^2 \right) .
 \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

Uzmimo sada da rastojanje izmedju kuglica  $l$  teži nuli, ali tako da je veličina  $m/l = \mu$  konstantna. Ova veličina je masa jedinice dužine žice. U ovom limesu diskretni stepeni slobode,  $\xi_i(t)$  postaju polje  $\xi = \xi(t, x)$ . Suma prelazi u integral po promenljivoj  $x$ . Lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2} \int_0^d dx \left( \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) , \quad (1.1.34)$$

gde je  $Y = kl$  modul elastičnosti. Lagranževa jednačina kretanja je

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0 ,$$

gde smo sa tačkom (primom) obeležili izvod po vremenu, odnosno po koordinati  $x$ . Lako se dobija da je jednačina kretanja

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 . \quad (1.1.35)$$

Jednačina kretanja je talasna jednačina, iz koje možemo pročitati faznu brzinu longitudinalnih talasa u žici:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} . \quad (1.1.36)$$

### 1.1.5 Hamiltonova formulacija

Hamiltonova formulacija teorije polja je generalizacija ove formulacije sa mehaničkih sistema na teoriju polja. Podsetimo se prvo Hamiltonove formulacije u analitičkoj mehanici.

Generalisani impulsi su definisani sa

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (1.1.37)$$

Da bi se n predhodnih jednačina rešilo po generalisanim brzinama potrebno je da

$$\det \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0 . \quad (1.1.38)$$

Hamiltonijan je Ležandrova transformacija Lagranžijana definisan sa

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) . \quad (1.1.39)$$

Hamiltonijan je funkcija generalisanih koordinata i impulsa. Hamiltonove jednačine se dobijju iz Hamiltonovog principa, pri čemu se lagranžijan izražava preko hamiltonijana. Iz

$$\delta \int dt \left[ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right] = 0 , \quad (1.1.40)$$

dobijaju se Hamiltonove jednačine:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} , \quad (1.1.41)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} . \quad (1.1.42)$$

Poasonova zagrada definisana je sa

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \quad (1.1.43)$$

Recimo na kraju da je Poasonova zagrada antisimetrična i da zadovoljava Jakobijev identitet.

Prelazak na teoriju polja je pravolinijski. Generalisani impulsi su izvodi gustine lagranžijana po  $\dot{\phi}_r$ , tj.<sup>2</sup>

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r}. \quad (1.1.44)$$

Kao i u analitičkoj mehanici hamiltonijan je Ležandrova transformacija lagranžijana. On zavisi od generalisanih impulsa i polja i definisan je sa

$$H = \int d^3x \left[ \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \right]. \quad (1.1.45)$$

Veličina

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \quad (1.1.46)$$

je gustina Hamiltonijana. Lako se vidi da je gustina Hamiltonijana realnog slobodnog skalarnog polja data sa

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (1.1.47)$$

Da bismo našli Hamiltonove jednačine kretanja variraćemo dejstvo

$$S_H = \int dt \int d^3x \left( \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{H} \right),$$

u kome je lagranžijan izražen preko hamiltonijana. Variracija fazne trajektorije podrazumeva

$$\begin{aligned} \phi_r(x) &\rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \\ \pi_r(x) &\rightarrow \pi_r(x) + \delta\pi_r(x), \end{aligned} \quad (1.1.48)$$

gde su varijacije polja i generalisanih impulsa nezavisne. Jedino se zahteva da je varijacija polja na granici oblasti integracije jednaka nuli. Varijacija dejstva je

$$\delta S_H = \int dt \int d^3x \left[ \delta\pi_r \dot{\phi}_r + \pi_r \delta\dot{\phi}_r - \frac{\delta H}{\delta\phi_r} \delta\phi_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r} \delta\pi_r \right]. \quad (1.1.49)$$

Drugi sabirak u podintegralnoj funkciji u poslednjem izrazu napisaćemo kao

$$\pi_r \delta\dot{\phi}_r = \frac{\partial}{\partial t} (\pi_r \delta\phi_r) - \dot{\pi}_r \delta\phi_r,$$

pa je

$$\delta S_H = \int d^4x \left[ \left( \dot{\phi}_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r} \right) \delta\pi_r - \left( \dot{\pi}_r \delta + \frac{\delta H}{\delta\phi_r} \right) \delta\phi_r \right]. \quad (1.1.50)$$

---

<sup>2</sup>Sa tačkom smo obeležili parcijalni izvod po vremenu, tj.  $\dot{\phi} = \partial_0\phi$ .

Odavde, na osnovu Hamiltonovog principa, dobijamo Hamiltonove jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_r}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi_r} \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta \pi_r} .\end{aligned}\tag{1.1.51}$$

Nadjimo Hamiltonove jednačine za slobodno skalarno polje. Prvo imamo

$$\frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \int d^3 y \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\delta \pi(\mathbf{y}, t)}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t) ,\tag{1.1.52}$$

i slično

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} &= \int d^3 y \left( \partial_i \phi(\mathbf{y}, t) \partial_i^y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + m^2 \phi(\mathbf{y}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &= -\Delta \phi(x) + m^2 \phi(x) .\end{aligned}\tag{1.1.53}$$

Hamiltonove jednačine za slobodno skalarno polje su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial t} &= \Delta \phi - m^2 \phi , \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \pi .\end{aligned}\tag{1.1.54}$$

Kombinovanjem ovih jednačina dobijamo Klajn-Gordonovu jednačinu.

Neka su  $F$  i  $G$  funkcije faznih promenljivih. Njihova (istovremena) Poasonova zagrada je definisana sa

$$\{F(t, \mathbf{x}), G(t, \mathbf{y})\} = \int d^3 z \left( \frac{\delta F(t, \mathbf{x})}{\delta \phi_r(t, \mathbf{z})} \frac{\delta G(t, \mathbf{y})}{\delta \pi_r(t, \mathbf{z})} - \frac{\delta F(t, \mathbf{x})}{\delta \pi_r(t, \mathbf{z})} \frac{\delta G(t, \mathbf{y})}{\delta \phi_r(t, \mathbf{z})} \right) .\tag{1.1.55}$$

Lako se vidi da je

$$\{\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} = \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .\tag{1.1.56}$$

Hamiltonove jednačine (1.1.54) možemo prepisati pomoću Poasonove zagrade na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_r}{\partial t} &= \{\pi_r, H\} \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial t} &= \{\phi_r, H\} .\end{aligned}\tag{1.1.57}$$

## 1.2 Neterina teorema

Simetrija igra važnu ulogu u fizici. Transformacije simetrije ne menjaju oblik jednačina kretanja. Simetrija može biti diskretna ili neprekidna, odnosno kontinualna. Inverzije prostora odnosno vremena kao i konjugacija naboja su primeri diskretnih transformacija. Sa druge strane rotacije,



translacije kao i fazne transformacije su primeri kontinualnih transformacija. Kontinualne transformacije su parametrizovane sa nekim skupom parametara. Npr. rotacije parametrizujemo uglovima rotacije, translacije vektorom za koji je izvršena translacija. Simetrija može biti globalna ili lokalna (odnosno kalibraciona ili gauge). Ako su parametri transformacija konstante transformacije su globalne, a ako su funkcije prostorno-vremenskih koordinata simetrija je lokalna.

Zakoni održanja fizičkih veličina su posledica kontinualne globalne simetrije sistema, što je sadržaj Netrine teoreme.

Neka su neprekidne infinitezimalne transformacijama koordinata i polja date sa

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_r(x) &\rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) . \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

Dejstvo se pri transformacijama (1.2.58) menja jer se menja mera integracije kao i podintegralna funkcija, odnosno gustina lagranžijana. Varijacija dejstva pri transformacijama (1.2.58) je razlika dejstva pre i nakon transformacije, tj.

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu \phi'_r(x')) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) .$$

$\Omega$  i  $\Omega'$  su jedna te ista oblast prostora Minkovskog parametrizovana jednom sa  $x$ , a drugi put sa  $x'$  koordinatama (pasivna transformacija). Element zapremine prostora Minkovskog se menja na sledeći način

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x .$$

Lako se vidi da je Jakobijan transformacije koordinata dat sa

$$\left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \det \left[ \delta^\mu_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta x^\mu \right] \approx 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu) ,$$

gde smo primenili

$$\det(1 + A) = e^{\text{Tr} \ln(1+A)} = e^{\text{Tr} A + \dots} = 1 + \text{Tr} A + \dots .$$

Dakle

$$d^4x' \approx (1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)) d^4x . \quad (1.2.59)$$

Totalna varijacija polja definisana je sa

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x)$$

Ona predstavlja razliku 'novog' polja u novim koordinatama i 'starog' polja u polaznim koordinatama. Promena oblika polja u istom koordinatnom sistemu,

$$\delta_0\phi = \phi'(x) - \phi(x)$$

je tzv. varijacija forme polja. Veza izmedju varijacije forme i totalne varijacije polja je

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) \\
&= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) \\
&= \delta_0\phi(x') + \partial_\mu\phi\delta x^\mu \\
&= \delta_0\phi(x) + \partial_\mu\phi\delta x^\mu .
\end{aligned} \tag{1.2.60}$$

U poslednjem koraku umesto koordinata  $x'$  napisali smo  $x$ , jer računamo u prvom redu po  $\delta x$ . Lako se vidi da diferenciranje komutira sa varijacijom forme:

$$\delta_0\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta_0\phi .$$

Varijacija forme Lagranžijana je

$$\begin{aligned}
\delta_0\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu\phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\partial_\mu\phi .
\end{aligned} \tag{1.2.61}$$

Totalna varijacija lagranžijana je

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu\phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \\
&= \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu\phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial'_\mu\phi_r(x')) + \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial'_\mu\phi_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x))
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu . \tag{1.2.62}$$

Primenom (1.2.59) i (1.2.62) dobijamo da je infinitezimalna promena dejstva data sa

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int (1 + \partial_\mu\delta x^\mu)d^4x(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}) - \int d^4x\mathcal{L} \\
&= \int d^4x(\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu) \\
&= \int d^4x(\delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})) .
\end{aligned} \tag{1.2.63}$$

Primenom (1.2.61) dolazimo do

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta_0\phi_r + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta_0\phi_r\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right)\delta_0\phi_r + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)\right) \\
&= \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta_0\phi_r + \mathcal{L}\delta x^\mu\right) \\
&= \int d^4x\partial_\mu J^\mu .
\end{aligned} \tag{1.2.64}$$

Polja  $\phi_r(x)$  zadovoljavaju jednačine kretanja, što smo iskoristili u drugom redu. Dakle, pokazali smo da je promena dejstva, za polja koja zadovoljavaju jednačine kretanja integral četvorodivergencije.

Jednačine kretanja se pri transformacijama (1.2.58) ne menjaju ukoliko se dejstvo ne promeni, tj. ako je  $\delta S = 0^3$  onda je

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.2.65)$$

gde je Neterina gustina struja  $J_\mu$  data sa

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu. \quad (1.2.66)$$

Veličina

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \quad (1.2.67)$$

je tenzor energije-impulsa.

Transformacije se parametrizuju sa konstantnim nezavisnim parametrima  $\theta^a$ . Gustina struje ima oblik  $J_\mu = J_\mu^a \theta^a$ . Iz (1.2.65) je  $\partial^\mu J_\mu^a = 0$ . Definišimo naelektrisanja (naboje) sa

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(t, \mathbf{x}). \quad (1.2.68)$$

Izračunajmo vremenski izvod naelektrisanja:

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \frac{\partial J_0^a(t, \mathbf{x})}{\partial t}. \quad (1.2.69)$$

Primenom Neterine teoreme i Gausove teoreme imamo

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \operatorname{div} \mathbf{J}_a(t, \mathbf{x}) = \oint \mathbf{J}^a(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.2.70)$$

Oblast integracije je najčešće ceo realan trodimenzionalan prostor i Neterine struje dovoljno brzo teže nuli kad  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , tako da je njihov fluks jednak nuli. Dakle, uz odgovarajuću asimptotiku polja u beskonačnosti, dobijamo da su naboji konstante kretanja, tj.

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0. \quad (1.2.71)$$

Ovim smo pokazali Neterinu teoremu: Ako je dejstvo invarijantno na neprekidne transformacije (koje čine n-parametarsku Lijevu grupu) onda postoji  $n$  veličina (naboji) koji su konstante kretanja. Integrala kretanja ima onoliko koliko grupa simetrije ima generatora.

---

<sup>3</sup>Opštije: Dejstvo poseduje simetriju ukoliko je

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu K^\mu,$$

gde je  $K^\mu$  četvorovektor. Izraz za Neterinu gustinu struja postaje

$$J^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) - K^\mu.$$

### 1.2.1 Fazna invarijantnost

U ovom paragrafu analiziraćemo faznu simetriju slobodnih Lagranžijana skalarnog i Dirakovog polja. Gustina lagranžijana kompleksnog slobodnog polja

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (1.2.72)$$

je invarijantna na fazne, tj.  $U(1)$  transformacije

$$\phi \rightarrow e^{iq\theta} \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{-iq\theta} \phi^\dagger, \quad (1.2.73)$$

gde je  $q$  konstanta, za koju ćemo kasnije videti da je naelektrisanje čestica koje su ekscitacije ovog polja. Fazne transformacije su tzv. unutrašnje transformacije, jer je  $x' = x$ . Infinitesimalne promene polja i koordinata pri faznim transformacijama su

$$\begin{aligned} \delta\phi &= iq\theta\phi \\ \delta\phi^\dagger &= -iq\theta\phi^\dagger \\ \delta x^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.74)$$

pa je Neterina struja

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger - T^\mu_\nu \delta x^\nu \\ &= iq\theta(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi). \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

Očuvan naboj je

$$Q = iq \int d^3x (\phi^\dagger \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^\dagger). \quad (1.2.76)$$

Dirakov lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi$$

je takodje invarijantan na fazne transformacije:

$$\psi \rightarrow e^{iq\theta} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-iq\theta} \bar{\psi}.$$

Neterina gustina struje u ovom slučaju je

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= -q\theta(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi). \end{aligned} \quad (1.2.77)$$

Kako je  $\theta$  konstantan parametar to ga možemo odbaciti, pa je gustina Neterine struje

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.2.78)$$

Na kursu Relativističke kvantne mehanike pokazano je, kao posledica Dirakove jednačine, da je divergencija ove struje nula. Očuvani naboj je

$$Q = q \int d^3x \psi^\dagger \psi. \quad (1.2.79)$$

Posledica fazne invarijantnosti teorije je očuvanje električnog naelektrisanja.

### 1.2.2 Translaciona invarijantnost i tenzor energije impulsa

U ovom poglavlju analiziraćemo translacionu simetriju slobodnog skalarnog polja. Pri translacijama koordinate se menjaju prema

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} ,$$

gde su  $\epsilon^{\nu}$  infinitezimalni parametri. Skalarno polje je nepromenjeno pri translacijama,  $\phi'(x+\epsilon) = \phi(x)$ . Totalna varijacija skalarnog polja je  $\delta\phi = 0$ , pa je varijacija forme  $\delta_0\phi = -\epsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi$ . Dejstvo slobodnog skalarnog polje je invarijantno na translacije. Neterina gustina struje je

$$J_{\mu} = (-\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \mathcal{L}g_{\mu\nu})\epsilon^{\nu} = -T_{\mu\nu}\epsilon^{\nu} . \quad (1.2.80)$$

Očuvana veličina je četvoroimpuls skalarnog polja

$$P^{\nu} = \int d^3x T^{0\nu} . \quad (1.2.81)$$

Nulta komponenta impulsa je Hamiltonijan

$$\begin{aligned} H = P^0 &= \int d^3x T^{00} \\ &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \\ &= \int d^3x \mathcal{H} . \end{aligned} \quad (1.2.82)$$

Vidimo da 00 komponenta tenzora energije impulsa predstavlja gustinu energija polja. Impuls slobodnog skalarnog polja je

$$P^i = - \int d^3x \partial_0\phi\partial_i\phi . \quad (1.2.83)$$

Tenzor energije impulsa skalarnog polja je simetričan tenzor. U opštem slučaju, za proizvoljno polje ovaj tenzor nije simetričan. Procedura simetrizacije tenzora energije impulsa je data u zadatku 5.18.

U ovom poglavlju smo odredili energiju i impuls slobodnog skalarnog polja. Te veličine su očuvane veličine, odnosno generatori vremenske odnosno prostorne tranlacije.

### 1.2.3 Lorencova simetrija i uglovni moment

Pri infinitezimalnim Lorencovim transformacijama koordinate se menjaju prema

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} \approx (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu})x^{\nu} ,$$

gde su  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  antisimetrični parametri Lorencovih transformacija, tj. bustova i rotacija. Dakle  $\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu}x_{\nu}$ . Polja  $\phi_r(x)$  se pri Lorencovim transformacijama menjaju po

$$\phi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\omega)\phi_s(x) = \left( e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} \right)_{rs} \phi_s(x) , \quad (1.2.84)$$

gde su  $\Sigma_{\mu\nu}$  generatori Lorencove grupe u prostoru komponenti polja<sup>4</sup>. Totalna varijacija polja je

$$\delta\phi_r(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{rs}\phi_s(x), \quad (1.2.85)$$

pa je Neterina gustina struje

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r - T^\mu{}_\nu\delta x^\nu \\ &= -\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\omega^{\nu\rho}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) - T^\mu{}_\nu\omega^{\nu\rho}x_\rho. \end{aligned}$$

Parametri Lorencovih transformacija su antisimetrični, tako da član  $x_\rho T^\mu{}_\nu$  moramo antisimetriзовати po indeksima  $\nu$  i  $\rho$ . Tako dobijamo

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}\left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^\mu{}_\rho - x_\rho T^\mu{}_\nu)\right] \\ &= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}M^\mu{}_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (1.2.86)$$

gde je

$$M^\mu{}_{\nu\rho} = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^\mu{}_\rho - x_\rho T^\mu{}_\nu). \quad (1.2.87)$$

Očuvana veličina je integral nulte komponente gustine struje, tj.

$$\begin{aligned} M_{\nu\rho} &= \int d^3x M^\mu{}_{\nu\rho} \\ &= \int d^3x \left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^0{}_\rho - x_\rho T^0{}_\nu)\right]. \end{aligned} \quad (1.2.88)$$

Prvi sabirak je spinski, a drugi orbitalni angularni moment. Veličine  $M_{0i}$  su generatori boostova, a  $M_{ij}$  generatori rotacija. Veličine  $M_{\mu\nu}$  nazivamo generalisanim momentom impulsa polja.

---

<sup>4</sup>Ovo su generatori u sistemu mirovanja. U zadatku 8.5 pokazano je da je generator spinorskog polja

$$i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}.$$

Prva dva sabirka su orbitalni moment, dok je

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$$

spinski deo uglovnog momenta.

# Glava 2

## Kvantovanje slobodnog skalarnog polja

Relativistička kvantna mehanika je jednočestična teorija. U ovoj teoriji Klajn-Gordonova jednačina  $(\square + m^2)\phi = 0$  je talasna jednačina čestice spina 0, gde se  $\phi$  interpretira kao talasna funkcija čestice. Nulta komponenta Neterine struje (1.2.75):

$$J^0 = i(\phi^\dagger \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^\dagger)$$

je gustina verovatnoće u ovoj teoriji. Iz ovog izraza je jasno da gustina verovatnoće nije pozitivno definitna veličina. To predstavlja ozbiljan problem u interpretaciji talasne funkcije  $\phi(x)$ . Pored toga ova teorija ima problem sa interpretacijom negativno-energetskih rešenja. U ovoj glavi videćemo kako se ovi problemi prevazilaze u kvantnoj teoriji polja. Često se jednočestična teorija, zasnovana na pojmu talasne funkcije, naziva prvom kvantizacijom. U tom smislu se kvantizacija skalarnog polja koju ćemo izložiti u ovoj glavi naziva drugom kvantizacijom. Medjutim, za kvantizaciju polja dovoljno je poznavati kalsičnu teoriju. Medjukorak, tj. prva kvantizacija, je u tom smislu nepotreban.

### 2.1 Realno skalarno polje

U klasičnoj teoriji polja gustina lagranžijana skalaranog realnog polja je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 . \quad (2.1.1)$$

Jednačina kretanja za skalarno polje je Klajn-Gordonova jednačina:

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.1.2)$$

Recimo još jednom da u klasičnoj teoriji  $\phi$  je obična funkcija prostorno-vremenskih koordinata. Partikularna rešenja Klajn Gordonove jednačine su ravni talasi  $e^{i(\pm E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ , gde je  $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Opšte rešenje je

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^*(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) , \quad (2.1.3)$$

gde su  $a(\mathbf{k})$  i  $a^*(\mathbf{k})$  koeficijenti. Generalisani impuls, konjugovan polju  $\phi$  je  $\pi = \dot{\phi}$ .

U kvantnoj teoriji polja  $\phi(x)$  i  $\pi(x)$  su operatori. Koeficijenti u razvoju polja po ravnim talasima  $a(\mathbf{k})$  i  $a^*(\mathbf{k})$  postaju operatori, tj. kvantno skalarno polje ima oblik

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) . \quad (2.1.4)$$

Ovo polje je hermitsko, što je analogon realnog polja u klasičnoj teoriji polja. Operatori  $a^\dagger(\mathbf{k})$  su hermitski odjungevani operatori od operatora  $a(\mathbf{k})$ . Četvorovektor  $k^\mu$  nije proizvoljan, već zadovoljava uslov<sup>1</sup>  $k_\mu k^\mu = m^2$ . On je dat sa  $k^\mu = (E_k, \mathbf{k})$ . Generalisani impuls je

$$\pi(x) = i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{E_k}{2}} (-a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) . \quad (2.1.5)$$

Operatori  $\phi(x)$  i  $\pi(x)$  su operatori polja, odnosno generalisanog impulsa u Hajzenbergovoj slici. Skalarno polje u Šredingerovoj slici je  $\phi(\mathbf{x}, 0)$ , a generalisani impuls je  $\pi(\mathbf{x}, 0)$ . Za referentnu tačku u kojoj se obe slike poklapaju uzeli smo  $t_0 = 0$ . Veza izmedju ove dve slike je<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{iHt} \phi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt} \\ \pi(x) &= e^{iHt} \pi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHt} , \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

gde je  $H$  hamiltonijan.

Recept za kvantovanje znamo iz kvantne mehanike<sup>3</sup>. Generalisane koordinate i impulsi klasične teorije postaju operatori. Uvodjenje operatora polja umesto odgovarajućih klasičnih funkcija je samo početak kvantizacije. Operatori, za razliku od običnih funkcija su nekomutirajuće veličine. Za potpuni opis fizičkih sistema moramo odrediti komutacione relacije izmedju operatora. Poasonova zagrada pri kvantizaciji prelazi u komutator po sledećem 'pravilu'

$$\{ , \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [ , ] . \quad (2.1.7)$$

Konkretno, ako klasične varijable  $A, B$  i  $C$  zadovoljavaju Poasonovu zagradu  $\{A, B\} = C$ , onda odgovarajući operatori  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  zadovoljavaju  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}$ . Ova relacija je tačna u prvom redu po Plankovoj konstanti. Ovaj 'recept' potiče od Pola Diraka. Komutacione relacije izmedju operatora koordinate i impulsa su

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 , \quad (2.1.8)$$

gde smo sa latinskim indeksima obeležili Dekartove koordinate.

Koordinate i generalisani impusli u našem slučaju su polja  $\phi(\mathbf{x})$ , odnosno  $\pi(\mathbf{x})$ . Komutacione relacije izmedju njih su analogne sa komutacionim relacijama (2.1.8) i one imaju oblik:

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 . \quad (2.1.9)$$

<sup>1</sup>Ovaj uslov se često naliva 'on-shell' uslovom, tj. četvorovektor impulsa je na masenoj površi.

<sup>2</sup>Indeks  $H$  koji ukazuje da su polja u Hazenbergovoj slici često se izostavlja.

<sup>3</sup>Mnogi ga nazivaju aksiomom kvantizacije.



U (2.1.9) operatori  $\phi(\mathbf{x})$  i  $\pi(\mathbf{x})$  su u Šredingerovoj slici. Iz (2.1.9) slede istovremene komutacione relacije

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (2.1.10)$$

za polja u Hajzenbergovoj slici. Relacije (2.1.4) i (2.1.5) se mogu invertovati, tj. operatori  $a(\mathbf{k})$  i  $a^\dagger(\mathbf{k})$  se mogu izraziti preko polja i impulsa. Rezultat je (zadatak 7.1)

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \int d^3x e^{ik \cdot x} [E_k \phi(x) + i\dot{\phi}(x)], \quad (2.1.11)$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \int d^3x e^{-ik \cdot x} [E_k \phi(x) - i\dot{\phi}(x)]. \quad (2.1.12)$$

Primenom (2.1.11) i (2.1.12) nalazimo:

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3x d^3y e^{i(k \cdot x - k' \cdot y)} \left( -E_k [\phi(x_0, \mathbf{x}), \dot{\phi}(x_0, \mathbf{y})] + \right. \\ &\quad \left. + E_{k'} [\dot{\phi}(x_0, \mathbf{x}), \phi(x_0, \mathbf{y})] \right) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{E_k E_{k'}}} \int d^3x e^{i(E_k - E_{k'})t + i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} (E_k + E_{k'}) \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Operatori  $a(\mathbf{k})$ ,  $a^\dagger(\mathbf{q})$  su anihilacioni, odnosno kreacioni operatori. Njihov smisao će biti jasan uskoro. U prethodnom računu uzeli smo da je  $x_0 = y_0$ , jer kreacioni i anihilacioni operatori ne zavise od vremena. Slično se nalaze i preostala dva komutatora. Dakle, komutacione relacije koje zadovoljavaju kreacioni i anihilacioni operatori slobodnog skalarnog polja su:

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{q})] &= 0 \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Operatori  $a(\mathbf{k})$ ,  $a^\dagger(\mathbf{q})$  zadovoljavaju bozonske komutacione relacije.

Hamiltonijan realnog skalarnog polja je integral gustine hamiltonijana ili integral 00 komponente tenzora energije-impulsa:

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right). \quad (2.1.15)$$

Zamenom (2.1.4) u izraz za hamiltonijan dobijamo

$$H = \frac{1}{2} \int d^3p E_p [a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})]. \quad (2.1.16)$$

Iz (2.1.14) je

$$a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) = \delta^{(3)}(0) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}),$$

pa dobijamo

$$H = \int d^3p E_p \left[ a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0) \right]. \quad (2.1.17)$$

Vidimo da je hamiltonijan slobodnog skalarnog polja suma beskonačno puno energija dekuplovanih harmonijskih oscilatora. Drugi sabirak u izrazu za hamiltonijan je beskonačna konstanta, koja potiče od integracije po modovima osnovnih stanja oscilatora. Ovo je prva beskonačnost sa kojom se susrećemo u teoriji polja. Često je potrebno odrediti razliku energija između dva stanja tako da je ova beskonačna konstanta nevažna i možemo je ignorisati. Mi smo prvo hamiltonijan odredili u klasičnoj teoriji. Zatim na osnovu klasičnog izraza za hamiltonian određujemo hamiltonijan u kvantnoj teoriji. Medjutim ova procedura nije jednoznačna. Klasične funkcije su komutativne veličine, a odgovarajući operatori nisu. Sasvim generalno, pri prelasku sa klasične na kvantnu teoriju susrećemo se sa problemom uređenje operatora, tj. redosledom pisanja operatora. Npr. klasičnoj varijabli  $x^2p$  odgovaraju operatori  $\hat{x}^2\hat{p}$ ,  $\hat{x}\hat{p}\hat{x}$  i  $\hat{p}\hat{x}^2$ . Ovi operatori se razlikuju za članove reda  $\hbar$  i svi imaju dobar klasičan limes.

Jedan način da uklonimo beskonačnu konstantu koja se pojavila u hamiltonijanu, je da uvedemo tzv. normalno uređenje operatora, koje ćemo obeležiti sa  $: \dots$ . Normalno uređenje podrazumeva da se kreacioni operatori pomeraju na levo, a anihilacioni na desno. Na primer

$$: a_1 a_2 a_3^\dagger a_4 a_5^\dagger := a_3^\dagger a_5^\dagger a_1 a_2 a_4 .$$

Realno skalarno polje je zbir pozitivno-frekventnih,  $\phi^+(x)$  i negativno-frekventnih modova,  $\phi^-(x)$ , tj.

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) .$$

Pozitivno-frekventni deo sadrži anihilacione, a negativno-frekventni deo kreacione operatore. Normalno uređenje proizvoda dva skalarna polja je

$$: \phi(x_1)\phi(x_2) := \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_2^- \phi_1^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- . \quad (2.1.18)$$

Hamiltonijan (2.1.16) posle normalnog uređenja postaje

$$\begin{aligned} : H : &= \frac{1}{2} \int d^3p E_p \left[ : a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}) : + : a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) : \right] \\ &= \int d^3p E_p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Normalnim uređenjem hamiltonijana uklonili smo vakumsku očekivanu vrednost  $\langle 0|H|0\rangle$ , tj.

$$: H := H - \langle 0|H|0\rangle . \quad (2.1.20)$$

Vakuu, tj. osnovno stanje je definisan sa uslovima

$$a(\mathbf{p})|0\rangle = 0, \text{ za svako } \mathbf{p} .$$

Drugim rečima vakuum je stanje na koje kada deluju anihilacioni operatori dobijamo nulu. Energija ovog stanja je

$$: H : |0\rangle = \int d^3p E_p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})|0\rangle = 0 , \quad (2.1.21)$$

ako smo hamiltonijan definisali sa normalnim uredjenjem. Ako ne koristimo normalno uredjenje pri definisanju hamiltonijana onda je energija osnovnog stanja odredjena sa

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3p E_p \delta^{(3)}(0) . \quad (2.1.22)$$

Ona je proizvod dva beskonačna člana. Jedan je delta funkcija (tzv. infracrvena divergencija koja odgovara velikim rastojanjima, tj. malim energijama)

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} . \quad (2.1.23)$$

Beskonačnost koja potiče od trodimenzione delta funkcije izrazili smo preko zapremine prostora  $V$ . Drugi činilac je integral od  $E_p$ . Gustina energije vakuuma je

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3p E_p \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2} . \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Zbog ponašanja podintegralne funkcije u gornjoj granici integracije, tj. na visokim energijama (malim rastojanjima) ovaj integral je divergentan. Zato se ova divergencija naziva ultravioletnom divergencijom. Ako sa  $E_{\max}$  označimo maksimalnu energiju primenljivosti teorije onda je vakuumska gustina energije

$$\frac{E_0}{V} \sim \int_0^{E_{\max}} \sqrt{E_p^2 - m^2} E_p^2 dE_p \sim E_{\max}^4 . \quad (2.1.25)$$

Ako izaberemo da je  $E_{\max}$  granica važenja standardnog modela, tj.  $E_{\max} \approx 10^3 \text{GeV}$ , tada je vakuumska gustina energije reda  $10^{48} \text{eV}^4$ . Ako bismo uzeli da je maksimalna energija reda veličine Plankove energije,  $E_{\max} \approx 10^{19} \text{GeV}$  gustina energije je  $10^{112} \text{eV}^4$ . Dakle, teorijski gustina energije vakuuma je u oblasti od  $10^{48} \text{eV}^4$  do  $10^{112} \text{eV}^4$ . Vakuumska gustina energije je eksperimentalno merljiva veličina, i naziva se kosmološkom konstantom. Kosmološka konstanta je dobar kandidat za tzv. tamnu energiju. Njena eksperimentalna vrednost je

$$\Lambda = 10^{-12} \text{eV}^4 .$$

Ova ogromna razlika izmedju teorijske i eksperimentalne vrednosti za kosmološku konstantu naziva se problemom kosmološke konstante. Konstantni član u dejstvu

$$\int d^4x \Lambda$$

ne utiče na jednačine kretanja i takav član se može ignorisati. Ovaj član samo hamiltonijanu dodaje konstantu i pomera čitav spektar za fiksirani iznos. Deluje nebitno. Medjutim situacija izgleda potpuno drugačije u prisustvu gravitacionog polja. Gravitaciono polje se opisuje metričkim

tenzorom,  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ . U prisustvu gravitacione interakcije konstantan član u lagranžijanu postaje

$$\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda .$$

Sa  $g$  smo obeležili determinatnu metričkog tenzora  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Konstanta  $\Lambda$  je kuplovana za gravitacionim poljem i utiče na jednačine kretanja gravitacionog polja. Stoga se u prisustvu gravitacije ona ne može ignorisati. Dakle, u inercijalnim sistemima, tj. u specijalnoj relativnosti konstantni član u hamiltonijanu, odnosno lagranžijanu je nebitan. Sad druge strane gravitaciona interakcija 'vidi' ovu konstanu, što znači da se ona u prisustvu gravitacije ne može ignorisati.

Rekli smo da je osnovno stanje slobodne teorije  $|0\rangle$ . Jednočestična stanja se dobijaju delovanjem sa kreacionim operatorima na vakuum, tj.  $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ . Dvočestična stanja se dobijaju delovanjem sa dva kreaciona opertora,  $a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ , itd. Hilbertov prostor stanja je Fokoov prostor

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \dots , \quad (2.1.26)$$

gde je  $\mathcal{H}^{(0)}$  vakuumsko stanje,  $\mathcal{H}^{(1)}$  podprostor jednočestičnih stanja, itd.

Impuls skalarnog polja odrednjen je primenom Neterine teoreme. Zamenom (2.1.4) u izraz (1.2.83) dobijamo impulsa slobodnog skalarnog polja

$$\mathbf{P} = \int d^3p p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) . \quad (2.1.27)$$

Delovanjem operatora impulsa na jednočestično stanje  $|\mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  dobijamo

$$\mathbf{P}|\mathbf{k}\rangle = \int d^3p p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle . \quad (2.1.28)$$

Primenom komutacione relacije

$$a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{p}) ,$$

imamo

$$\mathbf{P}|\mathbf{k}\rangle = \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle . \quad (2.1.29)$$

Dakle impuls stanja  $a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle$  je  $\mathbf{k}$ . Energija ovog stanja je  $E_k$ .

Energija dvočestičnog stanja  $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = a^\dagger(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  je  $E_p + E_k$ , a impuls  $\mathbf{p} + \mathbf{k}$ . Vidimo da je  $|\mathbf{p}, \mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}, \mathbf{p}\rangle$ , tj. ovo stanje je simetrično na zamenu čestica  $\mathbf{k} \longleftrightarrow \mathbf{p}$ , što je karakteristika bozonskih stanja. Zapravo Fokov prostor stanja čine simetrizovana stanja, jer su skalarne čestice bozoni. Proizvoljno višečestično stanje je

$$|\dots, n_i(\mathbf{k}_i), \dots\rangle = \dots \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a^\dagger(\mathbf{k}_i))^{n_i} \dots |0\rangle , \quad (2.1.30)$$

gde je  $n_i$  broj čestica impulsa  $\mathbf{k}_i$ . Operator broja čestica je

$$N = \int d^3p N(\mathbf{p}) = \int d^3p a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) . \quad (2.1.31)$$

Pokazati da važi  $[H, N] = 0$ , tj. u slobodnoj teoriji polja broj čestica je konstantan. Ako je prisutna interakcija ovo više neće važiti, jer se čestice mogu kreirati odnosno anihilirati. Ukupni angularni moment skalarnog polja je

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \int d^2x(x_j T_{ok} - x_k T_{oj}) . \quad (2.1.32)$$

Spin čestice se definiše u sistemu mirovanja. Račun daje

$$\mathbf{J}|\mathbf{p} = 0, p^0 = m\rangle = 0 , \quad (2.1.33)$$

tj. spin skalarne čestice je jednak nuli.

## 2.2 Kompleksno skalarno polje

Gustina lagranžijana slobodnog kompleksnog skalarnog polja je

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi , \quad (2.2.34)$$

gde je

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} . \quad (2.2.35)$$

Sa  $\phi_1$  i  $\phi_2$  obeležili smo realna polja. Jednačine kretanja su

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (\square + m^2)\phi^\dagger = 0 . \quad (2.2.36)$$

Operatori polja se kao i u slučaju realnog polja mogu razviti po ravnim talasima

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}) , \quad (2.2.37)$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} (b(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}) , \quad (2.2.38)$$

gde su  $a(\mathbf{k})$  i  $b(\mathbf{k})$  anihilacioni, a  $a^\dagger(\mathbf{k})$  i  $b^\dagger(\mathbf{k})$  kreacioni operatori.

Generalisani impulsi konjugovani poljima  $\phi$  and  $\phi^\dagger$  su

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} .$$

Istovremene komutacione relacije koje zadovoljavaju polja i/ili impulsi su

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (2.2.39)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0 , \quad (2.2.40)$$

$$[\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 . \quad (2.2.41)$$

Odavde dobijamo bozonske komutacione relacije:

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad (2.2.42)$$

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{q})] = [a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = 0 , \quad (2.2.43)$$

$$[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = [b^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{q})] = [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{q})] = 0 . \quad (2.2.44)$$

Tenzor energije impulsa slobodnog kompleksnog polja se dobija primenom formule (1.2.67). Rezultat je

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^\dagger - \mathcal{L}g_{\mu\nu} . \quad (2.2.45)$$

Hamiltonijan skalarnog kompleksnog polja je

$$: H := \int d^3p E_p (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) . \quad (2.2.46)$$

Impuls skalarnog polja je

$$: \mathbf{P} := \int d^3p \mathbf{p} (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) . \quad (2.2.47)$$

Lagranžijan kompleksnog skalarnog polja je  $U(1)$  invarijantan. Naelektrisanje je dato sa (1.2.76). Primenom (2.2.37) i (2.2.38) dobijamo

$$: Q := q \int d^3p (a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})) . \quad (2.2.48)$$

Vakuum  $|0\rangle$  je definisan sa  $a(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ ,  $b(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ , za svako  $\mathbf{k}$ . Jednočestično stanje  $a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  ima impuls  $\mathbf{k}$ , energiju  $E_k$  i naelektrisanje  $q$ . Stanje  $b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  ima impuls  $\mathbf{k}$ , energiju  $E_k$  i naelektrisanje  $-q$ . Prema tome kreacioni operatori  $a^\dagger(\mathbf{p})$ , odnosno  $b^\dagger(\mathbf{p})$  kreiraju česticu, odnosno antičesticu. Čestica i antičestica imaju pozitivne energije, a razlikuju se po znaku naelektrisanja. U kvantnoj teoriji polja i čestice i antičestice imaju pozitivne energije. Višestruka stanja se dobijaju uzastopnom primenom kreacionih operatora.

## 2.3 Kovarijantne komutacione relacije. Mikrokauzalnost

Evolucija fizičkih sistema je jednoznačno određena početnim uslovima i zakonima kretanja. Dinamički zakoni moraju zadovoljavati ovaj uslov, poznat pod imenom kauzalnost. Medjutim, u ovom paragrafu govorimo o mikroskopskoj kauzalnosti, tj. mikrokauzalnost. Signal ne može putovati brzinom koja je veća od brzine svetlosti. Stoga merenje u tački  $x$  ne može da utiče na merenje u tački  $y$ , ako su ove dve tačke razdvojene intervalom prostornog tipa. Prema tome, lokalne opservable  $\mathcal{O}_1(x)$  i  $\mathcal{O}_2(y)$  moraju zadovoljavati uslov

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] = 0, \text{ za } (x - y)^2 < 0 . \quad (2.3.49)$$

Ovaj uslov se naziva uslovom mikrokauzalnosti. Dakle opservable  $\mathcal{O}_1(x)$  i  $\mathcal{O}_2(y)$  komutiraju ako je  $(x - y)^2 < 0$ .

Definišimo  $i\Delta(x-y)$  sa

$$i\Delta(x-y) = [\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] . \quad (2.3.50)$$

Ova veličina je komutator dva skalarna polja i naziva se Pauli–Jordanovom funkcijom. Uvedimo pomoćne funkcije:

$$i\Delta^\pm(x-y) = [\phi^\pm(x), \phi^\mp(y)] . \quad (2.3.51)$$

Lako se vidi da je

$$i\Delta^+(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (2.3.52)$$

i

$$i\Delta^-(x-y) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{ik \cdot (x-y)} = -i\Delta^+(y-x) , \quad (2.3.53)$$

pa je

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left( e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) . \quad (2.3.54)$$

Komutator dva slobodna skalarna polja je funkcija. U teoriji u kojoj je prisutna interakcija komutator dva polja nije funkcija već je operator. Mi ćemo ovde razmatrati samo slučaj slobodnog polja. Jasno je da važi

$$i\Delta(x-y) = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle . \quad (2.3.55)$$

Ako je  $x^0 > y^0$  veličina  $\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$  predstavlja amplitudu da čestica propagira od tačke  $y$  do tačke  $x$ . Funkciju Pauli–Jordana možemo prepisati u obliku

$$i\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta^{(4)}(k^2 - m^2) e^{-ikx} \epsilon(k^0) , \quad (2.3.56)$$

gde je

$$\epsilon(k^0) = \begin{cases} 1, & \text{za } k^0 > 0 \\ -1, & \text{za } k^0 < 0 . \end{cases} \quad (2.3.57)$$

Na osnovu oblika (2.3.56) zaključujemo da je Pauli–Jordanova funkcija invarijantna na prave ortohrone Lorencove transformacije. Ako je  $(x-y)^2 > 0$ , tačke  $x$  i  $y$  su razdvojene intervalom vremenskog tipa (time-like separation) i tada možemo preći u sistem reference gde su ova dva događaja na istom mestu, tj. gde je  $x-y = (t, 0, 0, 0)$ . Funkcija  $i\Delta^+(x-y)$  je

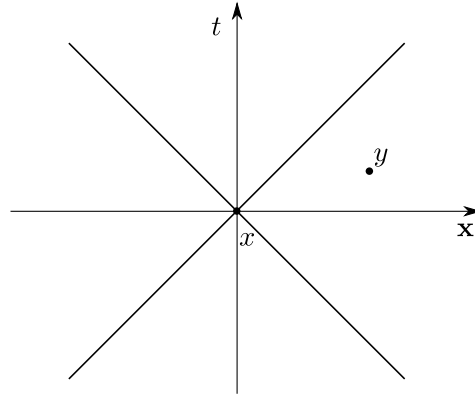
$$i\Delta^+(x-y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty d\omega \sqrt{\omega^2 - m^2} e^{-i\omega t} . \quad (2.3.58)$$

Za veliko vreme  $t$ , tj. za  $\rightarrow \infty$  izraz (2.3.58) postaje

$$i\Delta^+(x-y) \rightarrow e^{-imt} . \quad (2.3.59)$$

Slično je i

$$i\Delta^-(x-y) \rightarrow e^{imt} . \quad (2.3.60)$$

Slika 2.1: Tačke  $x$  i  $y$  su razdvojene intervalom prostornog tipa.

Dakle, za veliko vreme  $t$ , Pauli–Jordanova funkcija se ponaša kao

$$i\Delta(x - y) \rightarrow e^{-imt} - e^{imt} . \quad (2.3.61)$$

Zaključujemo da je ona različita od nule. Dakle, komutator  $[\phi(x), \phi(y)]$  ne iščezava za  $(x - y)^2 > 0$ . Odredimo sada ponašanje Pauli-Jordanove funkcije ako je vektor  $x - y$  prostornog tipa, tj. ako je  $(x - y)^2 < 0$ . Tada je moguće preći u sistem gde je  $x - y = (0, \mathbf{r})$ . U ovom sistemu, a i u svakom drugom koji je sa njim povezan ortohronom Lorencovom transformacijom, je

$$i\Delta(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = 0 . \quad (2.3.62)$$

Dakle, za  $(x - y)^2 < 0$ , zbog invarijantnosti Pauli-Jordanove funkcije, je

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 . \quad (2.3.63)$$

Specijalno za  $x^0 = y^0$  dobijamo istovremenu komutacionu relaciju

$$[\phi(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] = 0 . \quad (2.3.64)$$

Osobina da operatori  $\phi(x)$  i  $\phi(y)$  komutiraju ako je vektor  $x - y$  prostornog tipa naziva se mikrokauzalnost. Drugim rečima polja u tačkama  $x$  i  $y$  ne utiču jedno na drugo ako su razdvojeni intervalom prostornog tipa.

Za kompleksno skalarno polje Pauli–Jordanova funkcija je definisana sa

$$i\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle . \quad (2.3.65)$$

Ona je data sa

$$\begin{aligned} i\Delta(x - y) &= \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &= i\Delta^+(x - y) - i\Delta^-(x - y) . \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

Funkcije  $i\Delta(x - y)$ ,  $i\Delta^+(x - y)$  i  $i\Delta^-(x - y)$  su iste kao u slučaju realnog skalarnog polja. Ako je  $x^0 > y^0$ , propagator  $\langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle$  je amplituda za propagaciju čestice od tačke  $y$  do tačke  $x$ .



Sa druge strane, ako je  $x^0 > y^0$ , izraz  $\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle$  je amplituda propagiranja antičestice od tačke  $x$  do tačke  $y$ . Obe funkcije  $i\Delta^+(x-y)$  i  $i\Delta^-(x-y)$  su nenulte van svetlosnog konusa, tj. u oblasti gde je  $(x-y)^2 < 0$ . Drugim rečima propagiranje čestice i antičestice curi van svetlosnog konusa i preti da naruši princip mikrokauzalnosti. Medjutim, ova dva doprinosa se egzaktno poništavaju, što se vidi iz relacije (2.3.66). U kvantnoj mehanici propagator slobodne čestice od  $\mathbf{x}_2$  do  $\mathbf{x}_1$  za vreme  $t$  je

$$\langle \mathbf{x}_2 | e^{-i\mathbf{p}^2 t/2m} | \mathbf{x}_1 \rangle = \left( \frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{im(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2/2t} . \quad (2.3.67)$$

Ovaj izraz je nenulti za sve vrednosti položaja i vremena. Mikrokauzalnost u kvantnoj mehanici je narušena jer propagator curi van svetlosnog konusa. Narušenje mikrokauzalnosti u kvantnoj mehanici je očekivano jer kvantna mehanika nije relativistička teorija. U Kvantnoj teoriji polja ovaj problem, kao što smo videli, rešen je poništavanjem propagacije čestice i antičestice van svetlosnog konusa.

Zadatak: Pokazati da je

$$i\Delta^+(x^0 = y^0, \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(mr) , \quad (2.3.68)$$

kao i da za veliko  $r$  važi

$$i\Delta^+ \rightarrow e^{-mr} . \quad (2.3.69)$$

Rešenje: Prelaskom na sferne koordinate u  $\mathbf{k}$  prostoru imamo

$$\begin{aligned} i\Delta^+ &= -\frac{i}{8\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= -\frac{i}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikr} . \end{aligned}$$

Kompleksna funkcija  $\sqrt{z}$  ima zasek (cut) koji počinje u tački  $z = 0$ . Zasek ćemo u kompleksnoj  $z$  ravni usmeriti duž negativnog dela realne ose. Zbog postojanja zaseka imamo dve grane funkcije  $\sqrt{z}$ . Jedna je  $\sqrt{\rho}e^{i\varphi/2}$ , a druga  $\sqrt{\rho}e^{i(\varphi/2+\pi)}$ , gde je  $z = \rho e^\varphi$ . Za malo pozitivno  $\epsilon$  je

$$\sqrt{-X \pm i\epsilon} = \pm i\sqrt{X} , \quad (2.3.70)$$

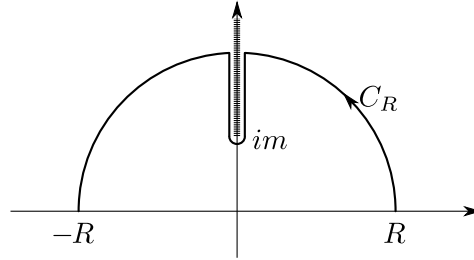
za  $X > 0$ . Ovu analizu ćemo primeniti na funkciju  $\sqrt{k^2 + m^2}$ . Ona ima dva tačke zaseka  $\pm im$ . Na slici 2.2 smo nacrtali zasek koji počinje u tački  $im$  kompleksne  $k$  ravni. Primenićemo Košijevu teoremu na konturu prikazanu na slici 2.2.

Za veliko  $R$  je

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ikr}}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -i \int_\infty^m \frac{dy(iy + \epsilon)}{\sqrt{-y^2 + m^2 + i\epsilon}} e^{(i\epsilon - y)r} - i \int_m^\infty \frac{dy(iy - \epsilon)}{\sqrt{-y^2 + m^2 - i\epsilon}} e^{(-i\epsilon - y)r} ,$$

odakle je

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikr} = -2i \int_\infty^m \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} . \quad (2.3.71)$$



Slika 2.2: Kontura integracije.

Prema tome

$$\begin{aligned} i\Delta^+(0, r) &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_m^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2 - m^2}} e^{-yr} . \end{aligned} \quad (2.3.72)$$

Smenom  $y = mt$  integral se svodi na Beselovu funkciju treće vrste

$$i\Delta^+(0, r) = \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(mr) . \quad (2.3.73)$$

Za veliko  $r$  se dobija

$$i\Delta^+(0, r) \rightarrow e^{-mr} . \quad (2.3.74)$$

## 2.4 Feynman-ov propagator

Vremensko uredjenje dva operatora skalarnog polja je definisano sa

$$T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(y), & \text{za } x^0 > y^0 \\ \phi^\dagger(y)\phi(x), & \text{za } x^0 < y^0 . \end{cases} \quad (2.4.75)$$

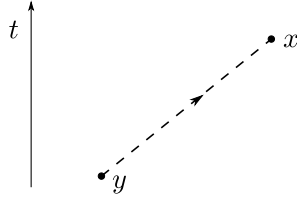
Vremensko uredjenje postavlja polja po opadajućem vremenu gledano sa leva na desno. Ova definicija se lako generalizuje za slučaj proizvoda više polja, npr.

$$TA(x)B(y)C(z) = B(y)A(x)C(z) ,$$

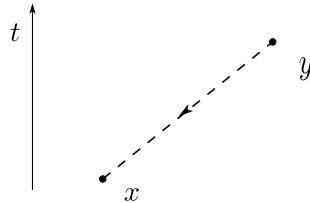
ako je  $y^0 > x^0 > z^0$ . Fajnmanov propagator za skalarno polje je vakuumska očekivana vrednost vremenskog uredjenja dva operatora polja, tj.

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x - y) &= \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0)\langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle + \theta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi^\dagger(y)\phi(x)|0\rangle . \end{aligned} \quad (2.4.76)$$

Iz ovog izraza je jasno da ako je  $x^0 > y^0$  čestica kreirana u tački  $\mathbf{y}$  u trenutku  $y^0$  propagira do tačke  $\mathbf{x}$  u trenutku  $x^0$  gde se anihilira. To je prikazano na slici 2.3. Takodje, ako je  $x^0 <$



Slika 2.3:



Slika 2.4:

$y^0$  antičestica kreirana u tački  $\mathbf{x}$  u trenutku  $x^0$  propagira do tačke  $\mathbf{y}$  u trenutku  $y^0$  gde se anihilira. Ova situacija prikazana je na slici 2.4. Čestica propagira unapred, a antičestica unazad u vremenu. Strelica na Fajnmanovom propagatoru je u oba slučaja usmerena od tačke  $y$  ka tački  $x$ . Fajnmanov propagator za skalarno polje prikazan je na slici 2.5.

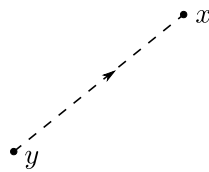
Vremenski redosled događaja zavisi od sistema reference. Zbog prisustva vremenskog uređenja u definiciji Fajnmanovog propagatora (2.4.76) postavlja se pitanje da li je Fejnmanov propagator definisan kovarijantno. Ako je  $(x - y)^2 > 0$  onda je vremenski sled događaja isti u svim inercijalnim sistemima koji su povezani pravim ortohronim Lorencovim transformacijama. Ako je  $(x - y)^2 < 0$ , vremenski redosled događaja zavisi od sistema reference. Medjutim u ovom slučaju to nije bitno, jer operatori  $\phi(x)$  i  $\phi^\dagger(y)$  komutiraju. Dakle, Fajnmanov propagator je definisan kovarijantno.

Koristeći izraze za funkcije  $i\Delta^\pm(x - y)$  dobijamo

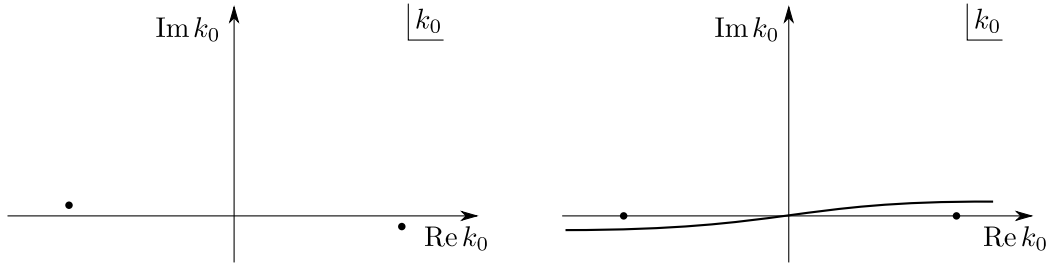
$$\begin{aligned} i\Delta_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0)i\Delta^+(x - y) + \theta(y^0 - x^0)i\Delta^+(y - x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} \left( \theta(x^0 - y^0)e^{-ik \cdot (x-y)} - \theta(y^0 - x^0)e^{ik \cdot (x-y)} \right) \Big|_{k^0=E_k}. \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

Fajnmanov propagator se može prepisati kao integral po četvoimpulsu:

$$i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (2.4.78)$$



Slika 2.5: Fajnmanov propagator za skalarno polje.



Slika 2.6: Fajnmanova kontura.

Primenom Košijevе teoreme u (2.4.78) dobija se rezultat (2.4.77). U formuli (2.4.78) integrali se po realnoj osi u kompleksnoj  $k^0$  ravni, a  $i\epsilon$  preskripcija pomera polove sa realne ose. Ekvivalentno, možemo integraliti po konturi koja je deformisana. Ove dve ekvivalentne konture integracije prikazane su na slikama 2.6. Pokažimo sada da se iz (2.4.78) dobija (2.4.77). Polovi podintegralne funkcije integrala (2.4.78) su u tačkama  $\pm E_k \mp i\epsilon$ . Za  $x^0 > y^0$  konturu integracije zatvaramo u donjoj poluravni jer se podintegralna funkcija ponaša kao  $e^{-(x^0-y^0)\Im(k^0)}$ , pa je po Košijevoj teoremi

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= i(-2\pi i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \text{Res}_{E_k} \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0)^2 - E_k^2} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k} e^{-iE_k(x^0-y^0) + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} . \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

U drugom slučaju  $x^0 < y^0$  konturu integracije dopunjujemo u gornjoj poluravni. Tada pol  $-E_k + i\epsilon$  daje doprinos integraciji. Rezultat se dobija analogno prethodnom slučaju. Ova dva slučaja daju rezultat (2.4.77).

Lako se vidi da je Fajnmanov propagator Grinova funkcija za Klajn–Gordonovu jednačinu uz odgovarajuće granične uslove, tj.

$$(\square_x + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) . \quad (2.4.80)$$

Pokazati da su retardovana i advansirana Grinova funkcija date sa

$$i\Delta_R(x-y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle , \quad (2.4.81)$$

$$i\Delta_A(x-y) = \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle . \quad (2.4.82)$$

## 2.5 Poenkareova simetrija kvantnih polja i stanja

Poenkareove transformacije se sastoje od Lorencovih transformacija i translacija u prostoru Minkovskog. One su prostorno–vremenska simetrija relativističke teorije polja. Transformacija koordinata je data sa

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu , \quad (2.5.83)$$

odnosno infinitezimalno

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu + \epsilon^\mu . \quad (2.5.84)$$

Parametri Lorencovih transformacija su antisimetrični,  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Zakon transformacije klasičnih polja pri Poenkareovim transformacijama je

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(\Lambda^{-1}(x - \epsilon)) . \quad (2.5.85)$$

U (2.5.83) Poenkareove transformacije deluju aktivno na polja. Matrice  $S_{rs}(\Lambda)$  čine konačnodimenzionu reprezentaciju Lorencove grupe. Transformacije polja u klasičnoj teoriji su kanonske transformacije. U kvantnoj teoriji njima odgovaraju unitarne reprezentacije.

Sada ćemo da odredimo kako se kvantna polja i stanja transformišu pri Poenkareovim transformacijama. Matrični elementi operatora polja  $\langle \psi | \phi_r(x) | \chi \rangle$ , gde su  $|\chi\rangle$  i  $|\psi\rangle$  stanja, treba da se transformišu na isti način kao i klasična polja  $\varphi_r(x)$ . Pri koordinatnim transformacijama (2.5.83) u izrazu  $\langle \psi | \phi_r(x) | \chi \rangle$  transformišu se ili stanja ili polja. U zavisnosti od toga šta smo transformisali govorimo o aktivnoj ili pasivnoj transformaciji. Kod aktivne interpretacije transformacije transformišu se stanja, a kod pasivne operatori. Analizirajmo prvo aktivne Poenkareove transformacije. Stanja se transformišu po unitarnim reprezentacijama Poenkareove grupe

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U(\omega, \epsilon)|\psi\rangle , \quad (2.5.86)$$

tj.  $U(\omega, \epsilon)U^\dagger(\omega, \epsilon) = U^\dagger(\omega, \epsilon)U(\omega, \epsilon) = I$ . Transformacije su unitarne zbog očuvanja verovatnoće u kvantnoj teoriji. Unitarni operator Poenkareove transformacije možemo predstaviti u obliku

$$U(\omega, \epsilon) = e^{iP^\mu \epsilon_\mu - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}} , \quad (2.5.87)$$

gde su  $P^\mu$  generatori translacija, tj. impulsi, a  $M_{\mu\nu}$  generatori Lorencovih transformacija. Ovi operatori čine reprezentaciju Poenkareove algebre. Zakon transformacije matričnih elemenata je

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi_r(x) | \chi \rangle &\rightarrow \langle \psi' | \phi_r(x) | \chi' \rangle \\ &= \langle \psi | U^{-1}(\omega, \epsilon) \phi_r(x) U(\omega, \epsilon) | \chi \rangle \\ &= S_{rs}(\omega) \varphi_s(\Lambda^{-1}(x - \epsilon)) \\ &= S_{rs}(\omega) \langle \psi | \phi_s(\Lambda^{-1}(x - \epsilon)) | \chi \rangle . \end{aligned} \quad (2.5.88)$$

Zaključujemo da kvantna polja zadovoljavaju sledeće transformaciono pravilo

$$\phi'_r(x) = U^{-1}(\omega, \epsilon) \phi_r(x) U(\omega, \epsilon) = S_{rs}(\omega) \phi_s(\Lambda^{-1}(x - \epsilon)) . \quad (2.5.89)$$

Desna strana zakona transformacije kvantnih polja (2.5.89) je ista kao desna strana (2.5.85), što je u skladu sa principom korespondencije.

Ako Poenkareove transformacije interpretiramo pasivno tada se klasična polja transformišu prema

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x') = S_{rs}(\Lambda) \varphi_s(x) . \quad (2.5.90)$$

Matrični elementi operatora polja treba da zadovoljavaju

$$\langle \psi | \phi'_r(x') | \chi \rangle = S_{rs}(\Lambda) \langle \psi | \phi_s(x) | \chi \rangle , \quad (2.5.91)$$

odnosno

$$\phi'_r(\Lambda x + \epsilon) = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(x) . \quad (2.5.92)$$

Gornju jednačinu možemo prepisati u obliku

$$\phi'_r(x) = S_{rs}(\Lambda)\phi_s(\Lambda^{-1}(x - \epsilon)) , \quad (2.5.93)$$

što je ekvivaletno sa (2.5.89).

Analizirajmo prvo translacije. Iz (2.5.89) za skalarno polje imamo

$$U^{-1}(\epsilon)\phi(x)U(\epsilon) = \phi(x - \epsilon) , \quad (2.5.94)$$

gde je  $U(\epsilon) = e^{iP_\mu\epsilon^\mu}$ . Impuls realnog skalarnog polja je

$$P^\mu = \int d^3p p^\mu a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) . \quad (2.5.95)$$

Iz (2.5.94) za infinitezimalne translacije je

$$(1 - i\epsilon^\mu P_\mu)\phi(x)(1 + i\epsilon^\mu P_\mu) = \phi(x) - \epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) , \quad (2.5.96)$$

odakle je

$$[P_\mu, \phi(x)] = -i\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} . \quad (2.5.97)$$

Varijacija forme kvantnog polja je

$$\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x) , \quad (2.5.98)$$

odnosno

$$\delta_0\phi(x) = -i[\epsilon^\mu P_\mu, \phi(x)] . \quad (2.5.99)$$

Za  $\mu = 0$  jednačina (2.5.97) je Hamiltonova jednačina kretanja. Ako u izrazu

$$e^{iP_\mu\epsilon^\mu}\phi(x)e^{-iP_\mu\epsilon^\mu} = \phi(x + \epsilon) \quad (2.5.100)$$

izaberemo  $x^\mu = (0, \mathbf{x})$  i  $\epsilon^\mu = (t, 0)$  dobijamo vezu izmedju operatora polja u Šredingerovoj i Hajzenbergovoj slici.

Pri Lorencovim transformacijama kvantno skalarno polje transformiše se prema

$$U^{-1}(\omega)\phi(x)U(\omega) = \phi(\Lambda^{-1}x) , \quad (2.5.101)$$

gde je  $U(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}$  reprezentacija Lorencove transformacije. Gornja jednačina je prema tome

$$e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(x)e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) , \quad (2.5.102)$$

odakle je

$$[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\phi(x) . \quad (2.5.103)$$

Generatori  $M_{\mu\nu}$  i  $P_\mu$  zadovoljavaju tenzorski zakon transformacija

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\nu P^\nu \\ U^{-1}(\Lambda)M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} , \end{aligned} \quad (2.5.104)$$

odakle slede komutacione relacije Poenkareove algebre:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\rho\sigma}, P_\mu] &= i(g_{\mu\sigma}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\sigma) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}) . \end{aligned} \quad (2.5.105)$$

Iz zakona transformacije kvantnih polja pri Lorencovim transformacijama slede zakoni transformacija kreacionih i anihilacionih operatora. Odavde se nalazi kako se stanja transformišu u odnosu na Lorencove transformacije. Rezultat je

$$U(\Lambda)|k_1, \dots, k_n\rangle = U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{k}_1) \dots a^\dagger(\mathbf{k}_n)|0\rangle = \sqrt{\frac{E_{k'_1} \dots E_{k'_n}}{E_{k_1} \dots E_{k_n}}} |\Lambda k_1, \dots, \Lambda k_n\rangle . \quad (2.5.106)$$

Detalji ovog računa su dati u zadatku 7.20. Mnogo više detalja o Poenkareovoj simetriji dato je na kursu Teorije elementarnih čestica.

## 2.6 Kazimirov efekat

Razmatrajmo bezmaseno skalarno polje izmedju dve paralelne ploče koje su na medjusobnom rastojanju  $a$ . Neka su ploče kvadratne, ivica  $L$  i neka je  $L \gg a$ . Uzmimo da je polje na ove dve granične ravni jednako nuli. Ako  $z$  osu orjentišemo normalno na ravni, onda su granični uslovi

$$\phi(z=0) = \phi(z=a) = 0 . \quad (2.6.107)$$

Ispitaćemo kako ovi netrivialni granični uslovi utiču na vakuum. Partikularna rešenja Klajn–Gordonove jednačine

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = 0$$

su

$$e^{\pm i\omega t + ik_1 x + ik_2 y} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) .$$

Iz jednačine sledi disperziona relacija

$$\omega_{k,n} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} . \quad (2.6.108)$$

Impuls duž  $z$ -ose je diskretizovan kvantnim brojem  $n$ , dok je impuls u  $xOy$  ravni kontinualan. Opšte rešenje Klajn–Gordonove jednačine koje zadovoljava zadate granične uslove je

$$\phi = \sqrt{\frac{a}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2k}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{kn}}} \left( a(\mathbf{k}, n) e^{-i\omega_{kn}t + ik^1 x + ik^2 y} + a^\dagger(\mathbf{k}, n) e^{i\omega_{kn}t - ik^1 x - ik^2 y} \right) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) . \quad (2.6.109)$$

Komutacione relacije koje zadovoljavaju kreacioni i anihilacioni operatori su

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}, n), a^\dagger(\mathbf{q}, m)] &= \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})\delta_{nm} \\ [a(\mathbf{k}, n), a^\dagger(\mathbf{q}, m)] &= 0 \\ [a^\dagger(\mathbf{k}, n), a^\dagger(\mathbf{q}, m)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.110)$$

Energija osnovnog stanja je

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0|H|0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle 0|\sum_{n=1}^{\infty}\int d^2k\omega_{kn}\left(a^\dagger(\mathbf{k}, n)a(\mathbf{k}, n) + a(\mathbf{k}, n)a^\dagger(\mathbf{k}, n)\right)|0\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^2k\omega_{kn}\delta^{(2)}(0). \end{aligned} \quad (2.6.111)$$

Kako je

$$\delta^{(2)}(0) = \frac{L^2}{(2\pi)^2}$$

to je vakuumska energija po jedinici površine ploča data sa

$$\frac{E_0}{L^2} = \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int dk_1dk_2\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (2.6.112)$$

Integral po impulsima u  $Oxy$  ravni je divergentan. Regularizovaćemo ga dimenzionom regularizacijom. Sa dvodimenzionog prostora prećićemo na prostor čija je dimenzija  $D = 2 - \epsilon$ . Dimenzija prostora u kojem računamo integral je manja od 2 i postoji  $\epsilon$  za koje je integral konačan. Prema tome integral ćemo izračunati u  $D = 2 - \epsilon$ , a zatim ćemo dobijeni rezultat analitički produžiti u dve dimenzije. Dakle

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{L^2} &= \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^{2-\epsilon}k_\perp\sqrt{k_\perp^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{\pi^{\frac{2-\epsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2-\epsilon}{2}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\int dk_\perp k_\perp^{1-\epsilon}\sqrt{k_\perp^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \end{aligned} \quad (2.6.113)$$

gde smo primenili sledeću formulu za površinu jedinične sfere u  $D$  dimenzionom prostoru

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}.$$

Integral u (2.6.113) je tablični i jednak je beta funkciji:

$$\int_0^\infty x^b(x^2 + M)^{-a} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+b}{2}\right)\Gamma\left(a - \frac{1+b}{2}\right)}{2M^{a-\frac{1+b}{2}}\Gamma(a)}. \quad (2.6.114)$$



Primenom ove formule dobijamo

$$\frac{E_0}{L^2} = -\frac{\pi^2}{12a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\epsilon-3}}, \quad (2.6.115)$$

i on je očigledno divergentan, jer suma koja se u njemu pojavljuje je beskonačna. Suma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2.6.116)$$

je Rimanova zeta funkcija. Ona je definisana ako je ispunjeno  $Re(s) > 1$ . Rimanova  $\zeta$ - funkcija se može analitički produžiti na celu kompleksnoj ravni. Tako se dobija sledeći rezultat

$$\zeta(-3) = \frac{1}{120}.$$

Prema tome energija osnovnog stanja po jedinici površine je

$$\frac{E_0}{L^2} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (2.6.117)$$

Diferenciranjem izraza za energiju po rastojanju izmedju ploča dobijamo silu po jedinici površine

$$f = -\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{E_0}{L^2} \right) = -\frac{\pi^2}{480a^4}. \quad (2.6.118)$$

Sila izmedju ploča je privlačna. U našem svetu dominira elektromagnetna interakcija. Za elektromagnetno polje rezultat je duplo veći od rezultata koji smo mi ovde našli, jer foton ima dva stepena slobode. Evaj efekat je predvideo Kazimir 1984 godine. Desetak godina kasnije to je i eksperimentalno potvrđeno. Privlačna sila izmedju ploča je mala. Konkretno za  $a \approx 1\mu m$ ,  $L \approx 1cm$  ona iznosi  $F \approx 10^{-8} N$ .



# Glava 3

## Kvantovanje slobodnog spinorskog polja

U ovoj glavi kvantovaćemo slobodno Dirakovo polje. Pre toga ćemo se podsetiti osobina gama matrica ('gama gimnastika') i Dirakove jednačine. Poslednje poglavlje posvećeno je diskretnim simetrijama Dirakovog polja.

### 3.1 Dirakove $\gamma$ -matrice

U ovom poglavlju daćemo definiciju i osobine  $\gamma$ -matrica.  $\gamma$ -matrice u  $D$ -dimenzionom prostoru zadovoljavaju antikomutacione relacije

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} . \quad (3.1.1)$$

U  $D$  dimenzionom prostoru matrice formata  $2^{\lfloor D/2 \rfloor} \times 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ , gde je uglasta zagrada oznaka za najveći ceo broj čine najniže dimenzionalnu reprezentaciju ovih matrica. U četvorodimenzionom prostoru to su  $4 \times 4$  matrice. Lako se vidi da ako matrice  $\gamma^\mu$  zadovoljavaju antikomutacione relacije (3.1.1) onda i skup matrica  $\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}$ , gde je  $S$  nesingularna matrica takodje zadovoljavaju (3.1.1). Drugim rečima postoji čitava klasa  $\gamma$ -matrica. Najčešće se koristi tzv. Vajlova ili kiralna reprezentacija u kojoj su gama matrice date sa:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} .$$

U Dirakovoj reprezentaciji gama matrice su

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} .$$

Takodje na gama matrice ćemo nametnuti uslov  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ . Ovaj uslov daje  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ ,  $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ . Drugim rečima matrica  $\gamma^0$  je hermitska, dok su matrice  $\gamma^i$  antihermitske. Ovaj uslov je vezan za činjenicu da je Dirakov hamiltonijan hermitski. Matrica  $\gamma_5$  je data sa

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} . \quad (3.1.2)$$

Ona antikomutira sa gamma matricama, tj.  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ . Antikomutator dve gama matrice je tzv. sigma matrica, tj.

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] . \quad (3.1.3)$$

Lako se proverava da matrice  $M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$  zadovoljavaju Lorencovu algebru

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}) . \quad (3.1.4)$$

Generatori  $\sigma_{\mu\nu}/2$  su spinorska reprezentacija Lorencove grupe. U Dirakovoj reprezentaciji  $\gamma$ -matrica  $\sigma_{\mu\nu}$  matrice su

$$\begin{aligned} \sigma^{0i} &= i\gamma^0\gamma^i = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^{ij} &= \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^j\sigma^i - \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j\sigma^i - \sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Postoje mnogi identiteti sa gama matricama. Navešćemo samo neke od njih. Kao prvo nekoliko identiteta sa kontrakcijama:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 , \\ \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu , \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} , \\ \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\mu &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha . \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Identiteti sa tragovima gama matrica:

$$\begin{aligned} \text{tr}\gamma_\mu &= 0 , \\ \text{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu} , \\ \text{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) &= 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) , \\ \text{tr}\gamma_5 &= 0 , \\ \text{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu) &= 0 , \\ \text{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Trag neparnog broja gama matrica je jednak nuli. Svi ovi identiteti su pokazani u Zbirci (treća glava).

Fajnmanov sleš (slash) je definisan sa  $\not{a} = a^\mu\gamma_\mu$ .

Gama matrice,  $\gamma^\mu$  generišu tzv. Klifordovu algebru. Proizvoljna  $4 \times 4$  matrica može biti razvijena po bazu koji čine šesnaest matrica: jedinična matrica, gama matrice, sigma matrice,  $\gamma_5$  matrica i matrice  $\gamma^\mu\gamma_5$ . Dokaz je dat u zadatku 3.12.

## 3.2 Lagranžijan i hamiltonijan

Gustina Lagranžijana slobodnog Dirakovog polja je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi , \quad (3.2.8)$$

gde je  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  tzv. Dirakov adjoint. Iz lagranžijana dobijamo Dirakovu jednačinu

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 . \quad (3.2.9)$$

Generalisani impulsi su

$$\begin{aligned} \pi_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = i\psi_a^\dagger , \\ \bar{\pi}_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} = 0 . \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Crta (bar) na generalisanom impulsu je samo oznaka. Generalisani impuls konjugovan polju  $\bar{\psi}$  jednak je nuli, pa je  $\bar{\psi} = 0$  veza u teoriji. Kanonska gustina hamiltonijana je

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_a \dot{\psi}_a + \bar{\pi}_a \dot{\bar{\psi}}_a - \mathcal{L} \\ &= -\bar{\psi}(i\gamma^i \partial_i - m)\psi . \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

### 3.3 Tenzor energije-impulsa

Dirakov lagranžijan je invarijantan na translacije:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + a^\mu \\ \psi'(x+a) &= \psi(x) . \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Očuvana struja je tenzor energije-impulsa

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \partial_\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi})} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \bar{\psi}(i\gamma^\rho \partial_\rho - m)\psi . \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Tenzor energije-impulsa (3.3.13) nije simetričan. U zadatku 5.18 data je procedura simetrizacije tenzora energije-impulsa. Hamiltonijan Dirakovog polja je

$$H = \int d^3x T^{00} = - \int d^3x \bar{\psi}(i\gamma_i \partial^i - m)\psi , \quad (3.3.14)$$

a impuls

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = i \int d^3x \psi^\dagger \partial^i \psi . \quad (3.3.15)$$

### 3.4 Lorencova simetrija

Dejstvo slobodnog Dirakovog polja je invarijantno na Lorencove transformacije. Pri Lorencovim transformacijama,  $x' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \approx x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$  Dirakovo ('klasično') polje se transformiše prema

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = e^{-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}} \psi(x) , \quad (3.4.16)$$

gde je

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Parametri  $\omega_{0i}$ , odnosno  $\omega_{ij}$  su parametri bustova, odnosno rotacija. Konkretno  $\omega_{0i} = -\arctan v_i$ , gde je  $v_i$  brzina kojom se primovan sistem kreće duž  $i$ -te ose. Ugao rotacije oko  $i$ -te ose je  $\theta_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$ . Matrica rotacije za ugao  $\theta$  oko  $z$ -ose je

$$S = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & & 0 \\ & & \\ 0 & & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Iz prethodnog izraza vidimo da Dirakov spinor  $\psi$  pri rotaciji za  $2\pi$  postaje  $-\psi$ . Pri rotacijama za  $2\pi$  tenzori se ne menjaju. Dirakov spinor se ne transformiše po tenzorskoj već po spinorskoj reprezentaciji Lorencove grupe.

Varijacija forme Dirakovog polja pri Lorencovim transformacijama je

$$\delta_0\psi = \psi'(x) - \psi(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\left(i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\right). \quad (3.4.18)$$

Iz ovog izraza vidimo da su

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$$

generatori Lorencovih transformacija u reprezentaciji klasičnog Dirakovog polja. Matrice  $\sigma^{\mu\nu}/2$  su Lorencovi generatori u sistemu mirovanja. Generatori  $\sigma_{ij}/2$  su generatori rotacione podgrupe Lorencove grupe, a  $\sigma_{0i}/2$  su generatori bustova. Generatori rotacija su hermitski, dok generatori bustova nisu. To je posledica činjenice da nekompaktne grupe nemaju konačno-dimenzione unitarne reprezentacije. Od generatora  $\sigma^{ij}/2$  možemo formirati vektor

$$\Sigma_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \frac{i}{4}\epsilon_{ijk}[\gamma^j, \gamma^k], \quad (3.4.19)$$

odnosno

$$\Sigma = \frac{i}{2}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.4.20)$$

U Dirakovoj reprezentaciji  $\boldsymbol{\gamma}$ -matrica ovaj vektor je

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.4.21)$$

Primenom Neterine teoreme angularni moment Dirakovog polja je

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \left( x_\mu T^0_\nu - x_\nu T^0_\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^0\sigma_{\mu\nu}\psi \right). \quad (3.4.22)$$

### 3.5 Dirakova jednačina

Mnoge osobine Dirakove jednačine su vam poznate iz kursa Relativističke kvantne mehanike. Ovde ćemo se ukratko podsetiti najbitnijih. Kao prvo Dirakova jednačina

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.5.23)$$

je relativistička talasna jednačina masene čestice spina 1/2, kao što je npr. elektron. Partikularna rešenja ove jednačine podelićemo u dve klase: pozitivno i negativno frekventna rešenja. Pozitivno frekventna rešenja su  $u_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}$ , a negativno frekventna  $v_r(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}$ . Zamenom ovih rešenja u Dirakovu jednačinu dobijamo da Dirakovi spinori  $u_r(\mathbf{p})$  i  $v_r(\mathbf{p})$  zadovoljavaju

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) &= 0 \\ (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

Indeks  $r$  prebrojava spinske stepene slobode. Obično se uzima ili  $r = 1, 2$  ili  $r = +, -$ . Neka je  $\mathbf{n}$  ort. Operator projekcije spina na pravac određen ovim ortom,  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  komutira sa hamiltonijanom u sistemu mirovanja. U Dirakovoj reprezentaciji gama matrica, matrica  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  je

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}. \quad (3.5.25)$$

Bazisni spinori u sistemu mirovanja su

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_1 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Nerelativistički spinori  $\varphi$  zadovoljavaju svojstvenu jednačinu

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi_r = (-1)^{r+1} \varphi_r. \quad (3.5.27)$$

Spinori koje smo obeležili sa  $\chi$  su jednaki spinorima  $\varphi$ , samo što smo ih obrnuli:  $\chi_1 = \varphi_2$ ,  $\chi_2 = \varphi_1$ . Prema tome, u sistemu mirovanja projekcija spina na ort  $\mathbf{n}$  određena je jednačinama

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} u_r(\mathbf{p} = 0) &= (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p} = 0) \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} v_r(\mathbf{p} = 0) &= (-1)^r v_r(\mathbf{p} = 0). \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

Ako je  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  tada je

$$\varphi_1 = \chi_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \chi_1 = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.5.29)$$

Specijalno, ako je  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  ovi spinori su

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.30)$$

Dirakovi spinori u sistemu u kome je impuls čestice jednak  $\mathbf{p}$  dobijaju se primenom odgovarajućeg busta. Tako dobijamo

$$u_r(\mathbf{p}) = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p+m} \varphi_r \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{p}) = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p+m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}, \quad (3.5.31)$$

gde je normalizacioni faktor dat sa  $\mathcal{N}_p = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}$ . Generalizacija operatora  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}$  u proizvoljnom sistemu je  $W^\mu s_\mu/m$ , gde je

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma \quad (3.5.32)$$

vektor Pauli–Lubanskog. Vektor polarizacije  $s^\mu$  je dobijen primenom odgovarajućeg busta na vektor  $s^{\mu(0)} = (0, \mathbf{n})$  iz sistema mirovanja. U zadatku 4.11 pokazano je da važi

$$W^\mu s_\mu/m = \gamma_5 \not{s}.$$

Operator  $\gamma_5 \not{s}$  ja dat sa (zadaci 4.12, 4.13)

$$\gamma_5 \not{s} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m(E_p+m)} & -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{m} \\ \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{m} & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m(E_p+m)} \end{pmatrix}. \quad (3.5.33)$$

Spinori (3.5.31) zadovoljavaju sledeće svojstvene jednačine

$$\begin{aligned} \gamma_5 \not{s} u_r(\mathbf{p}) &= (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}) \\ \gamma_5 \not{s} v_r(\mathbf{p}) &= (-1)^{r+1} v_r(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

Spinori  $u_1(\mathbf{p})$ , odnosno  $u_2(\mathbf{p})$  opisuju pozitivno energetska rešenja, sa projekcijom spina na  $\mathbf{n}$  osu jednakom  $+1/2$ , odnosno  $-1/2$ . Sa druge strane spinori  $v_1(\mathbf{p})$  i  $v_2(\mathbf{p})$  su negativno energetska rešenja sa projekcijom spina  $-1/2$ , odnosno  $1/2$ . Ovi spinori čine tzv. spinorski bazis. Saglasno teoriji šupljina odsustvo negativno-frekventnog elektrona impulsa  $-\mathbf{p}$  i projekcije spina  $\pm \frac{1}{2}$  ekvivalentno je prisustvu pozitrona pozitivne energije, impulsa  $\mathbf{p}$  i projekcije spina  $\mp \frac{1}{2}$ .

Ako specijalno izaberemo da je  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  tada operator  $\gamma_5 \not{s}$  postaje (zadatak 4.12)

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \not{\not{p}}.$$

Jednačine (3.5.34) postaju

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_r(\mathbf{p}) &= (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \\ \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} v_r(\mathbf{p}) &= (-1)^r v_r(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Uočimo promenu znaka u jednačini za  $v$  spinore. Operator  $\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$  je operator heliciteta, tj. projekcije spina na pravac kretanja. Ako je  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  spinori  $u_r(\mathbf{p})$  i  $v_r(\mathbf{p})$  predstavljaju svojstvena stanja operatora heliciteta i čine helicitetni bazis. Konkretni oblik spinora sa definisanim



helicitetom nadjen je u zadatku 4.2. Rezultat je dat sa (3.5.31), ali nerelativistički spinori zadovoljavaju svojstvenu jednačinu

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_r = (-1)^{r+1} \varphi_r ,$$

i dati su sa

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} , \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} . \quad (3.5.35)$$

Sa  $\hat{\mathbf{p}}$  smo obeležili jedinični vektor  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Spinori  $u_1(\mathbf{p})$ , odnosno  $u_2(\mathbf{p})$  opisuju pozitivno energetska rešenja, sa helicitetom jednakim  $+1/2$ , odnosno  $-1/2$ . Sa druge strane spinori  $v_1(\mathbf{p})$  i  $v_2(\mathbf{p})$  su negativno energetska rešenja sa helicitetom  $1/2$ , odnosno  $-1/2$ . Saglasno teoriji šupljina odsustvo negativno frekventnog elektrona impulsa  $-\mathbf{p}$  i heliciteta  $\pm\frac{1}{2}$  ekvivalentno je prisustvu pozitrona energije  $E_p$ , impulsa  $\mathbf{p}$  i heliciteta  $\pm\frac{1}{2}$ .

Spinori  $u$  i  $v$  zadovoljavaju relacije ortogonalnosti

$$\begin{aligned} u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_p}{m}\delta_{rs} , \\ u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) &= v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(-\mathbf{p}) = 0 , \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} , \\ \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.5.36)$$

Relacije kompletnosti su

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) &= \frac{\not{p} + m}{2m} \equiv \Lambda_+(p) , \\ - \sum_{r=1}^2 v_r(p)\bar{v}_r(p) &= -\frac{\not{p} - m}{2m} \equiv \Lambda_-(p) . \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

Veličine  $\Lambda_+(p)$  i  $\Lambda_-(p)$  su projektori na pozitivno, odnosno negativne energetska rešenja.

Opšte rešenje Dirakove jednačine je

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + v_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \right) \quad (3.5.38)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( \bar{u}_r(\mathbf{p})c_r^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \bar{v}_r(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} \right) . \quad (3.5.39)$$

## 3.6 Kvantovanje Dirakovog polja

U kvantnoj teoriji polja  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  kao i  $c_r(\mathbf{p})$ ,  $c_r^\dagger(\mathbf{p})$ ,  $d_r(\mathbf{p})$  i  $d_r^\dagger(\mathbf{p})$  su operatori. Preciznije,  $c_r(\mathbf{p})$  i  $d_r(\mathbf{p})$  su anihilacioni, a  $c_r^\dagger(\mathbf{p})$  i  $d_r^\dagger(\mathbf{p})$  su kreacioni operatori.

Probaćemo da kvantujemo Dirakovo polje pomoću istovremenih komutacionih relacija. Već smo pokazali da su generalisani impulsi konjugovani poljima  $\psi$ , odnosno  $\bar{\psi}$  redom  $i\psi^\dagger$ , odnosno 0. Istovremene komutacione relacije su onda

$$\begin{aligned} [\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)] &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab} \\ [\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{y}, t)] &= 0 \\ [\psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

Izrazimo kreacione i anihilacione operatore preko operatora polja. Pomnožimo (3.5.38) sa  $u_s^\dagger(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$  i integralimo po  $\mathbf{x}$ . Tako dolazimo do

$$c_s(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \int d^3x u_s^\dagger(\mathbf{q})\psi(0, \mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.6.41)$$

Sličnim postupkom dobijamo

$$d_s^\dagger(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \int d^3x v_s^\dagger(\mathbf{q})\psi(0, \mathbf{x})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.6.42)$$

Nadjimo komutator između  $c$  i  $c^\dagger$ . Primenom (3.6.41) imamo

$$[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})] = \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E_p E_q}} \int d^3x d^3y u_{ra}^\dagger(\mathbf{p})u_{sb}(\mathbf{q})[\psi_a(0, \mathbf{x}), \psi_b^\dagger(0, \mathbf{y})]e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}. \quad (3.6.43)$$

Primenom istovremenih komutacionih relacija i relacija ortogonalnosti dobijamo

$$[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q})] = \delta_{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3.6.44)$$

Na sličan način se dobija

$$[d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q})] = -\delta_{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.6.45)$$

dok su svi preostali komutatori jednaki nuli. Znak minus u komutatoru (3.6.45) je neobičan. Odredimo normu stanja  $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ :

$$\|d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle\|^2 = \langle 0|d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = -\delta^{(3)}(0). \quad (3.6.46)$$

Primenom (3.6.45) dobili smo da je norma stanja  $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  negativna, što narušava unitarnost teorije. Stanja negativne norme se nazivaju duhovima<sup>1</sup>. Realistične teorije polja ne treba da sadrže stanja negativne norme. .

Hamiltonijan Dirakovoog polja je dat izrazom (3.3.14). Primenom Dirakove jednačine i razvoja po ravnim talasima imamo

$$\begin{aligned} H &= i \int d^3x \psi^\dagger \partial_0 \psi \\ &= - \sum_{r,s} \int d^3p d^3q m \sqrt{\frac{E_q}{E_p}} \left( -c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad + c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(-\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p})e^{2iE_p t} \\ &\quad \left. - d_r(\mathbf{p})c_s(-\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(-\mathbf{p})e^{-2iE_p t} + d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) \right). \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

<sup>1</sup>Engleski termin je ghost.

Ako dalje primenimo relacije ortogonalnosti (3.5.36) dolazimo do

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p \left( c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) - d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) \right) . \quad (3.6.48)$$

Primenom (3.6.45) dobijamo

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p \left( c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) + \delta^{(3)}(0) \delta_{rr} \right) . \quad (3.6.49)$$

Beskonačnu konstantu u izrazu za hamiltonijan (3.6.49) možemo da ignorišemo. Problem sa hamiltonijanom (3.6.49) je taj što nije ograničen sa donje strane. Dakle, kvantizacija Dirakovog polja pomoću komutacionih relacija (3.6.40) daje fizički neprihvatljive rezultate. Spektar hamiltonijana nije ograničen odozdo i teorija nije unitarna.

Dirakovo polje je fermionsko polje i treba ga kvantovati istovremenim antikomutacionim, a ne komutacionim relacijama. One su date sa

$$\begin{aligned} \{ \psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t) \} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab} \\ \{ \psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b(\mathbf{y}, t) \} &= 0 \\ \{ \psi_a^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t) \} &= 0 . \end{aligned} \quad (3.6.50)$$

Iz (3.6.50) se dobijaju fermionske komutacione relacije

$$\begin{aligned} \{ c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{q}) \} &= \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{ d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{q}) \} &= \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \\ \{ c_r(\mathbf{p}), c_s(\mathbf{q}) \} &= \dots = 0 . \end{aligned} \quad (3.6.51)$$

Iz izraza za Hamiltonijan (3.6.48), primenom (3.6.51) dobija se

$$H = \sum_{r=1}^2 \int d^3p E_p \left( c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) - \delta^{(3)}(0) \delta_{rr} \right) . \quad (3.6.52)$$

Poredjenjem (3.6.52) sa (3.6.49) vidimo da zadnja dva člana imaju suprotne znake. Hamiltonijan je ograničen odozdo, tako da je model stabilan. Drugo, beskonačna konstanta u izrazu za hamiltonijan je negativna. Podsetimo se da je odgovarajući član u izrazu za hamiltonijan skalarnog polja pozitivan. Pažljivim odnosom između fermionskih i bozonskih stepeni slobode beskonačne konstante se mogu skratiti. Ovo se dešava kod supersimetričnih teorija polja.

Beskonačna konstanta koja se pojavljuje u izrazu (3.6.52) se može ukloniti primenom normalnog uredjenja. Pod tim se podrazumeva da se kreacioni operatori pomeraju desno, a anihilacioni levo, samo što mora da se vodi računa o antikomutacionim relacijama. Npr.

$$\begin{aligned} : c(\mathbf{q}) c^\dagger(\mathbf{p}) : &:= -c^\dagger(\mathbf{p}) c(\mathbf{q}) , \\ : c(\mathbf{q}) c(\mathbf{k}) c^\dagger(\mathbf{p}) : &:= c^\dagger(\mathbf{p}) c(\mathbf{q}) c(\mathbf{k}) . \end{aligned}$$

Analogno je

$$: \psi_a(x)\psi_b(y) := \psi_a^+(x)\psi_b^+(y) + \psi_a^-(x)\psi_b^+(y) - \psi_b^-(y)\psi_a^+(x) + \psi_a^-(x)\psi_b^-(y) , \quad (3.6.53)$$

gde su  $\psi^+(x)$ , odnosno  $\psi^-(x)$  pozitivno, odnosno negativno frekventna rešenja.

Dirakov lagranžijan je invarijantan na  $U(1)$  transformacije. Očuvana veličina je naelektrisanje Dirakovog polja

$$Q = q \int d^3x : \psi^\dagger \psi : .$$

Nakon zamene izraza za Dirakovo polje, (3.5.38) dobijamo

$$Q = q \int d^3p \sum_{r=1} \left( c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) - d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p}) \right) . \quad (3.6.54)$$

Za elektronsko polje je  $q = -e$ . Impuls Dirakovog polja je

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int d^3x : \psi^\dagger (-i\nabla) \psi : \\ &= \int d^3p \sum_{r=1} \mathbf{p} \left( c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}) + d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p}) \right) . \end{aligned} \quad (3.6.55)$$

Osnovno stanje slobodnog Dirakovog polja,  $|0\rangle$  je definisano uslovima

$$c_r(\mathbf{p})|0\rangle = d_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0 .$$

Jednočestična stanja su  $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  i  $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ . Energija i impuls ovih stanja se određuju delovanjem sa Hamiltonijanom odnosno impulsom polja na njih. Rezultati su:

$$\begin{aligned} Hc_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= E_p c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\ Hd_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= E_p d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\ \mathbf{P}c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= \mathbf{p}c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\ \mathbf{P}d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= \mathbf{p}d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle . \end{aligned} \quad (3.6.56)$$

Naelektrisanja stanja  $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ , odnosno  $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  su određeni sa

$$\begin{aligned} Qc_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= qc_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\ Qd_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle &= -qd_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle . \end{aligned} \quad (3.6.57)$$

Prema tome naelektrisanja stanja  $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ , odnosno  $d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  su  $q$ , odnosno  $-q$ . Ova dva stanja se razlikuju po znaku naelektrisanja. Stanje  $|\mathbf{p}, e^-\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  je fermion (elektron) impulsa  $\mathbf{p}$  i energije  $E_p$ , a  $|\mathbf{p}, e^+\rangle = d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  je antifermion (pozitron) impulsa  $\mathbf{p}$  i energije  $E_p$ . Dakle,  $c_r(\mathbf{p})$  i  $d_r(\mathbf{p})$  su anihilacioni elektronski, odnosno pozitronski operatori, a  $c_r^\dagger(\mathbf{p})$  i  $d_r^\dagger(\mathbf{p})$  su kreacioni operator elektrona, odnosno pozitrona. Spinski stepeni slobode ovih stanja biće analizirani kasnije. Dvočestična stanja se dobijaju uzastopnom primenom dva kreaciona operatora na vakuum. Npr.

$$|\mathbf{p}, e^-, \mathbf{q}, e^-\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle$$

je dvoelektronsko stanje. Iz antikomutacijih relacija sledi

$$c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{q}) = -c_s^\dagger(\mathbf{q})c_r^\dagger(\mathbf{p}) ,$$

tj. dvočestično stanje je antisimetrično

$$|\mathbf{p}, e^-, \mathbf{q}, e^-\rangle = -|\mathbf{q}, e^-, \mathbf{p}, e^-\rangle .$$

Dirakove čestice su fermioni i zadovoljavaju Fermi–Dirakovu statistiku. Vidimo da je  $|\mathbf{p}, e^-, \mathbf{p}, e^-\rangle = 0$ , u skladu sa Paulijevim principom.

### 3.7 Lorencova simetrija i spin

Na osnovu Neterine teoreme angularni moment Dirakovog polja je

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \left( x_\mu T_\nu^0 - x_\nu T_\mu^0 + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \psi \right) .$$

U ovom izrazu Dirakova polja su operatori. Generatori  $M_{\mu\nu}$  u ovoj reprezentaciji su hermitski i važi  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ . Na osnovu opšteg zakona transformacije polja pri Lorencovim transformacijama (2.5.89) je

$$U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x)U(\Lambda) = \left( e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} \right)_{ab} \psi_b(\Lambda^{-1}x) , \quad (3.7.58)$$

odnosno

$$e^{\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\psi(x)e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\psi(\Lambda^{-1}x) . \quad (3.7.59)$$

Iz zadnjeg izraza, za infinitezimalne transformacije, dobijamo

$$[M_{\mu\nu}, \psi_a(x)] = -\left( i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} \right)_{ac} \psi_c(x) . \quad (3.7.60)$$

Adjungovanjem izraza (3.7.59) dobijamo

$$U^{-1}(\Lambda)\psi_a^\dagger(x)U(\Lambda) = \left( e^{\frac{i}{4}((\sigma^{\mu\nu})_{ab})^*\omega_{\mu\nu}} \right) \psi_b^\dagger(\Lambda^{-1}x) . \quad (3.7.61)$$

Primenom

$$((\sigma^{\mu\nu})_{ab})^* = ((\sigma^{\mu\nu})^\dagger)_{ba} = (\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0)_{ba}$$

dobijamo

$$U^{-1}(\Lambda)\psi_a^\dagger(x)U(\Lambda) = \psi_b^\dagger(\Lambda^{-1}x) \left( \gamma_0 e^{\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \gamma_0 \right)_{ba} \quad (3.7.62)$$

Iz zadnje relacije dobijamo

$$[M_{\mu\nu}, \psi_a^\dagger(x)] = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\psi_a^\dagger(x) + \frac{1}{2}\psi_a^\dagger(x)\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0 . \quad (3.7.63)$$

Generatori rotacija, odnosno komponente angularnog momenta Dirakovog polja su

$$M_{ij} = \int d^3x : \psi^\dagger \left( ix_i\partial_j - ix_j\partial_i + \frac{1}{2}\sigma_{ij} \right) \psi : . \quad (3.7.64)$$

Koordinatno zavisni deo je orbitalni uglovni moment, dok je deo u kome se pojavljuju  $\sigma_{ij}$  matrice tzv. spinski deo uglovnog momenta. Definišimo

$$J_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} ,$$

tj.  $\mathbf{J} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$ . Generatori  $J_i$  zadovoljavaju  $su(2)$  komutacione relacije. Primenom (3.6.41) i (3.7.63) je

$$[M_{ij}, c_r^\dagger(\mathbf{p})] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \int d^3x u_{ra}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left( (x_j p_i - x_i p_j) \psi_a^\dagger(x) + \frac{1}{2} \psi_b^\dagger(x) (\sigma_{ij})_{ba} \right) . \quad (3.7.65)$$

Određićemo kako operator projekcije spina na pravac deluje na jednočestčna stanja. Imamo

$$M_{ij} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = [M_{ij}, c_r^\dagger(\mathbf{p})] |0\rangle + c_r^\dagger(\mathbf{p}) M_{ij} |0\rangle . \quad (3.7.66)$$

Poslednji član je jednak nuli, jer je vakuum invarijantan na rotacije. Dakle

$$M_{ij} c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \int d^3x u_{ra}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left( (x_j p_i - x_i p_j) \psi_a^\dagger(x) + \frac{1}{2} \psi_b^\dagger(x) (\sigma_{ij})_{ba} \right) |0\rangle . \quad (3.7.67)$$

Spin čestice je definisan u sistemu mirovanja. Zato uzimamo da je impuls čestice jednak nuli, pa je

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} | \mathbf{p} = 0, r, e^- \rangle &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij} M_{ij} n_k c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_{kij} (\sigma_{ij})_{ba} n_k u_{ra}(\mathbf{p} = 0) \int d^3q \sum_s c^\dagger(\mathbf{q}, s) u_b^\dagger(\mathbf{q}, s) \delta^{(3)}(\mathbf{q}) |0\rangle \\ &= \sum_s \frac{1}{2} u_b^\dagger(0, s) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} u_a(0, r) c_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle . \end{aligned} \quad (3.7.68)$$

Konačno dobijamo

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} | \mathbf{p} = 0, r, e^- \rangle = \frac{1}{2} (-1)^{(r+1)} | \mathbf{p} = 0, r, e^- \rangle . \quad (3.7.69)$$

Dakle, projekcija spina na pravac  $\mathbf{n}$  elektronskog stanja  $| \mathbf{p} = 0, r = 1, e^- \rangle$  je  $+1/2$ , a  $| \mathbf{p} = 0, r = 2, e^- \rangle$  je  $-1/2$ . Analogno se dobija izraz za pozitronska stanja

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} | \mathbf{p} = 0, r, e^+ \rangle = \frac{1}{2} (-1)^{(r+1)} | \mathbf{p} = 0, r, e^+ \rangle . \quad (3.7.70)$$

Npr. stanje  $| \mathbf{p}, 1, e^+ \rangle$  opisuje pozitron impulsa  $\mathbf{p}$ , energije  $E_p$  i polarizacije  $+\frac{1}{2}$ . U slučaju helicitetnog bazisa rezultat je analogan prethodnom. Indek  $r = 1$  se odnosi na pozitivan, a 2 na negativan helicitet.

Da zaključimo spin elektrona, odnosno pozitrona je  $1/2$ .

### 3.8 Veza izmedju spina i statistike. Mikrokauzalnost.

Definišimo funkciju

$$iS_{ab}(x-y) = \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} . \quad (3.8.71)$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \sum_{r,s} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3q \frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ &\times \left( u_a(\mathbf{p}, r) \bar{u}_b(\mathbf{q}, s) e^{i(qy - px)} \right. \\ &\left. + v_a(\mathbf{p}, r) \bar{v}_b(\mathbf{q}, s) e^{-i(qy - px)} \right) . \end{aligned}$$

Primenom (3.5.37) je

$$iS_{ab}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left[ (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)_{ab} e^{ip \cdot (x-y)} \right] . \quad (3.8.72)$$

Poslednji izraz možemo lako transformisati u:

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu^x + m)_{ab} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left[ e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right] . \quad (3.8.73)$$

Ako je interval izmedju tačaka  $x$  i  $y$  prostornog tipa, tj.  $(x-y)^2 < 0$  možemo preći u sistem gde je  $x-y = (0, \mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0)$ . Tada je

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|_{x_0=y_0} = (\gamma^0)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = (\gamma^0)_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (3.8.74)$$

Kako je  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$  to zaključujemo da je

$$iS(x-y) \Big|_{(x-y)^2 < 0} = 0 . \quad (3.8.75)$$

Takodje je i

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} = \{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = 0 . \quad (3.8.76)$$

Već smo ranije rekli da lokalne opservable  $\mathcal{O}_1(x)$  i  $\mathcal{O}_2(y)$  moraju zadovoljavati princip mikrokauzalnosti. Ako su tačke  $x$  i  $y$  razdvojene intervalom prostornog tipa opservable  $\mathcal{O}_1(x)$  i  $\mathcal{O}_2(y)$  moraju da komutiraju. Pokazali smo da su antikomutatori (3.8.75) i (3.8.76) jednaki nuli. Da li ovo može narušiti princip mikrokauzalnosti? Zapravo, ne. Oportori  $\psi$  i  $\bar{\psi}$  nisu opservable. Opservable (hamiltonijan, impuls, naelektrisanje, itd.) su bilinearne po poljima. Komutator dve bilinearne veličine možemo razložiti pomoću komutatora, odnosno antikomutatora:

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B \\ &= A\{B, C\}D - AC\{B, D\} + \{A, C\}DB - C\{A, D\}B . \end{aligned} \quad (3.8.77)$$

Zaključujemo da ako su komutatori ili antikomutatori jednaki nuli, onda će komutator  $[AB, CD]$  biti jednak nuli. Dakle, zbog mikrokauzalnost mora biti ili komutator ili antikomutator između polja jednak nuli ako je  $(x - y)^2 < 0$ , tj.

$$\text{ili } [\phi(x), \phi(y)] = 0, \text{ ili } \{\phi(x), \phi(y)\} = 0 .$$

Za čestice sa polucelom spinom (fermioni) antikomutatori između polja, za  $(x - y)^2 < 0$  moraju biti jednaki nuli. U slučaju bozona uslov mikrokauzalnosti je obezbeđen zahtevom da su komutatori između polja jednaki nuli u slučaju  $(x - y)^2 < 0$ . Izrazi (3.8.75) i (3.8.76) garantuju da Dirakovo polje ne narušava princip mikrokauzalnosti.

### 3.9 Feynmanov propagator

Vremensko uredjenje dva fermionska operatora je definisano sa

$$T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) = \theta(x_0 - y_0)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) - \theta(y_0 - x_0)\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x) .$$

Primetimo znak minus u drugom članu. On je u saglasnosti sa antikomutirajućom prirodom fermionskih polja. Feynmanov propagator za Dirakovo polje definisan je kao vakuumska očekivana vrednost vremenskog uredjenja operatora  $\psi(x)$  i  $\bar{\psi}(y)$ , tj.

$$\begin{aligned} iS_{Fab}(x - y) &= \langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle \\ &= \langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle\theta(x^0 - y^0) - \langle 0|\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle\theta(y^0 - x^0) . \end{aligned} \quad (3.9.78)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} iS_{Fab}(x - y) &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} \sum_{r,s} \left( \langle 0|c_r(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle u_{ra}(\mathbf{p})\bar{u}_{sb}(\mathbf{q})e^{-ip\cdot x + iq\cdot y}\theta(x^0 - y^0) \right. \\ &\quad \left. - \langle 0|d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle \bar{v}_{rb}(\mathbf{p})v_{sa}(\mathbf{q})e^{-ip\cdot y + iq\cdot x}\theta(y^0 - x^0) \right) . \end{aligned} \quad (3.9.79)$$

Primenom

$$\langle 0|c_r(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle = \langle 0|d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle = \delta_{rs}\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

i (3.5.37) je

$$iS_{Fab}(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left( (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip\cdot(x-y)}\theta(x^0 - y^0) - (\not{p} - m)_{ab} e^{ip\cdot(x-y)}\theta(y^0 - x^0) \right) \Big|_{p^0=E_p} . \quad (3.9.80)$$

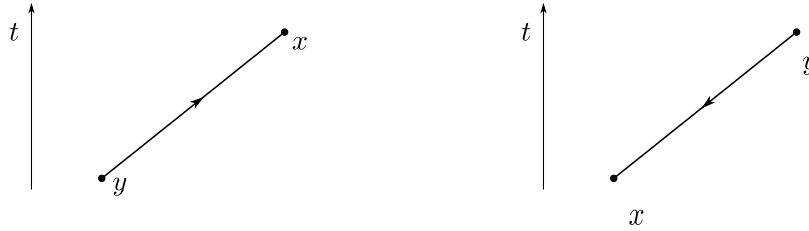
Feynmanov propagator se sastoji od dva sabirka. Ako je  $x^0 > y^0$  onda je

$$iS_F(x - y) = \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle . \quad (3.9.81)$$

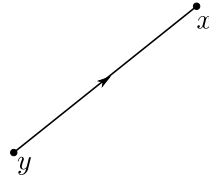
Ovaj član je propagator za kreiranje elektrona u tački  $y$ , njegove propagacije do tačke  $x$  gde je anihiliran. Sa druge strane, ako je  $x^0 < y^0$  onda je

$$iS_F(x - y) = \langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle , \quad (3.9.82)$$





Slika 3.1: Propagiranje elektrona od  $y$  ka  $x$  (desna slika) i propagiranje pozitrona od  $x$  do  $y$  (leva slika).



Slika 3.2: Fejnmanov propagator u koordinatnom prostoru.

što odgovara kreiranju pozitrona u tački  $x$ , propagaciju do tačke  $y$  u kojoj je pozitron anihiliran. Obe situacije su prikazane na slici 3.1. Oba slučaja sa slike 3.1 se prikazuju kao linija usmerena od  $y$  ka  $x$ . Fejnmanov propagator u koordinatnom prostoru za Dirakovo polje je dat na slici 3.2. Primenom Košijeve teoreme se može pokazati da se (3.9.80) može napisati u obliku integrala po četvoroimpulsu (zadatak 6.13)

$$iS_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (3.9.83)$$

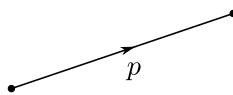
Fejnmanov propagator u impulsnom prostoru je

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}. \quad (3.9.84)$$

Na slici 3.3 nacrtali smo Fejnmanov proagator u impulsnom prostoru.

### 3.10 Diskretne transformacije

U ovom poglavlju analiziraćemo inverziju prostora, vremena i konjugaciju naboja. Videćemo kako ove transformacije deluju na polja i stanja čestica.



Slika 3.3: Fejnmanov propagator u impulsnom prostoru.

### 3.10.1 Prostorna inverzija

Prostorna inverzija je diskretana transformacija pri kojoj  $t' = t$  i  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ . Na kursu Relativističke kvantne mehanike pokazano je da je Dirakova jednačina invarijantna na prostornu inverziju. Pri prostornoj inverziji Dirakov spinor transformiše se prema

$$\psi'(t, \mathbf{r}) = \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{r}) . \quad (3.10.85)$$

U Kvantnoj teoriji polja inverzija prostora je reprezentovana unitarnim operatorom  $P$  prema

$$P\psi(t, \mathbf{x})P^{-1} = \eta_P \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) , \quad (3.10.86)$$

gde je  $\eta_P$  fazni faktor. Podsetimo se transformacionog zakona Dirakovog spinorskog polja pri pravim ortohronim Lorencovim transformacijam

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})\psi(\Lambda x) . \quad (3.10.87)$$

Transformacioni zakon (3.10.86) je analogan sa (3.10.87), iako je inverzija prostora neprava Lorencova transformacija. Lako se proveravaju jednačine

$$\begin{aligned} \gamma^0 u_r(\mathbf{p}) &= u_r(-\mathbf{p}) \\ \gamma^0 v_r(\mathbf{p}) &= -v_r(-\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (3.10.88)$$

Ako uvedemo oznaku  $\tilde{p}^\mu = (E_p, -\mathbf{p})$  tada desna strana jednačine (3.10.86) je

$$P\psi(x)P^{-1} = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(\mathbf{p}) P c_r(\mathbf{p}) P^{-1} e^{-i\tilde{p}\cdot x} + v_r(\mathbf{p}) P d_r^\dagger(\mathbf{p}) P^{-1} e^{i\tilde{p}\cdot x} \right) , \quad (3.10.89)$$

dok je leva strana data sa

$$\begin{aligned} \eta_P \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) &= \eta_P \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(-\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) e^{-i\tilde{p}\cdot x} - v_r(-\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\tilde{p}\cdot x} \right) \\ &= \eta_P \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(\mathbf{p}) c_r(-\mathbf{p}) e^{-i\tilde{p}\cdot x} - v_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(-\mathbf{p}) e^{i\tilde{p}\cdot x} \right) , \end{aligned}$$

gde je drugi red dobijen smenom  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  u prvom redu. Odavde je

$$\begin{aligned} P c_r(\mathbf{p}) P^{-1} &= \eta_P c_r(-\mathbf{p}) \\ P d_r^\dagger(\mathbf{p}) P^{-1} &= -\eta_P d_r^\dagger(-\mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (3.10.90)$$

odnosno

$$\begin{aligned} P c_r^\dagger(\mathbf{p}) P^{-1} &= \eta_P^* c_r^\dagger(-\mathbf{p}) \\ P d_r(\mathbf{p}) P^{-1} &= -\eta_P^* d_r(-\mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (3.10.91)$$

Ako dva puta primenimo prostornu inverziju vraćamo se na početnu konfiguraciju, što se vidi na sledećem primeru:

$$P^2 c_r(\mathbf{p}) P^{-2} = \eta_P^2 c_r(\mathbf{p}) .$$

Dva puta primenjena inverzija prostora može biti shvaćena kao rotacija za  $2\pi$ , što znači da je  $P^2 = \pm 1$ , odnosno  $\eta_P^2 = \pm 1$ . Prema tome fazni faktor može biti:  $1, -1, i, i - i$ . Opservable su kvadratne po spinorskim poljima, pa kada dva puta primenimo inverziju prostora na njih dobićemo  $+1$ .

Vakuum je invarijantan na prostornu inverziju  $P|0\rangle = |0\rangle$ . Odredimo sada kako inverzija prostora deluje na elektronsko, odnosno pozitronsko stanje:

$$\begin{aligned} P|\mathbf{p}, r, e^- \rangle &= P c_r^\dagger(\mathbf{p}) P^{-1} |0\rangle = \eta_P^* |-\mathbf{p}, r, e^- \rangle \\ P|\mathbf{p}, r, e^+ \rangle &= P d_r^\dagger(\mathbf{p}) P^{-1} |0\rangle = -\eta_P |-\mathbf{p}, r, e^+ \rangle . \end{aligned} \quad (3.10.92)$$

Pri inverziji prostora impuls čestice menja znak, tj.  $\mathbf{p}$  prelazi u  $-\mathbf{p}$ , dok projekcija spina na osu se ne menja. Ako koristimo helicitetni bazu inverzija prostora menja helicitet,  $\pm 1/2 \rightarrow \mp 1/2$ , jer se menja impuls stanja. Faza  $\eta_P$  se naziva unutrašnja parnost. Izborom  $\eta_P = 1$  vidimo da elektron i pozitron imaju suprotnu unutrašnju parnost.

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} P c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) P^{-1} &= |\eta_P|^2 c_r^\dagger(-\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) \\ P d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) P^{-1} &= |\eta_P|^2 d_r^\dagger(-\mathbf{p}) d_r(-\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (3.10.93)$$

Na osnovu ovih izraza dobijamo  $P H P^{-1} = H$ ,  $P \mathbf{P} P^{-1} = -\mathbf{P}$ . Hamiltonijan slobodnog Dirakovog polja komutira sa operatorom prostorne inverzije, što znači da je hamiltonijan invarijantan pri prostornoj inverziji. Prostorna inverzija impulsu polja menja znak.

### 3.10.2 Konjugacija naboja

Hamiltonijan slobodnog Dirakovog polja je invarijantan na zamenu  $c_r(\mathbf{p}) \longleftrightarrow d_r(\mathbf{p})$ . Ova simetrija je poznata kao konjugacija naboja. Podsetimo se da je Dirakova jednačina invarijantna na konjugaciju naboja:

$$\psi(x) \rightarrow \psi_c(x) = C \bar{\psi}^T(x) , \quad (3.10.94)$$

gde je  $C$  matrica konjugacije naboja. Ona zadovoljava uslov  $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$ . Matrica  $C$  je  $C = i\gamma^2 \gamma^0$  i ona zadovoljava  $C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C$ . U Kvantnoj teoriji polja konjugacija naboja je reprezentovana unitarnim operatorom  $\mathcal{C}$ . Operator  $\psi(x)$  se transformiše na sledeći način

$$\mathcal{C} \psi_a(x) \mathcal{C}^{-1} = C_{ab} \bar{\psi}_b(x) . \quad (3.10.95)$$

Iz (3.10.95) je

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(\mathbf{p}) \mathcal{C} c_r(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} e^{-ip \cdot x} + v_r(\mathbf{p}) \mathcal{C} d_r^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} e^{ip \cdot x} \right) = \\ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( C_{ab} \bar{u}_{rb}(\mathbf{p}) c_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + C_{ab} \bar{v}_{br}(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right) . \end{aligned} \quad (3.10.96)$$

Ako primenimo  $C\bar{u}_r^T(\mathbf{p}) = v_r(\mathbf{p})$ ,  $C\bar{v}_r^T(\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p})$  dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_r(\mathbf{p}) \mathcal{C} c_r(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} e^{-ip \cdot x} + v_r(\mathbf{p}) \mathcal{C} d_r^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} e^{ip \cdot x} \right) = \\ \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( v_{ra}(\mathbf{p}) c_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + u_{ar}(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right). \end{aligned} \quad (3.10.97)$$

Iz zadnje relacije je

$$\begin{aligned} \mathcal{C} c_r(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} &= d_r(\mathbf{p}) \\ \mathcal{C} d_r^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{C}^{-1} &= c_r^\dagger(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.10.98)$$

čijom primenom dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |\mathbf{p}, r, e^- \rangle &= |\mathbf{p}, r, e^+ \rangle \\ \mathcal{C} |\mathbf{p}, r, e^+ \rangle &= |\mathbf{p}, r, e^- \rangle. \end{aligned} \quad (3.10.99)$$

Konjugacija naboja česticu transformiše u antičesticu i obrnuto, dok su impuls i polarizacija nepromenjeni.

Lako se vidi da je  $\mathcal{C} H \mathcal{C}^{-1} = H$ .

### 3.10.3 Vremenska inverzija

Operatori simetrije u kvantnoj teoriji su ili unitarni ili antiunitarni. Ovaj iskaz je poznat kao Vignerova teorema.

Linarni i unitarni operatori zadovoljavaju

$$\begin{aligned} U(\alpha|\psi\rangle + \beta|\chi\rangle) &= \alpha U|\psi\rangle + \beta U|\chi\rangle \\ \langle U\psi|U\chi\rangle &= \langle\psi|\chi\rangle, \end{aligned} \quad (3.10.100)$$

gde su  $\alpha$  i  $\beta$  koeficijenti. Prvi uslov je uslov linearnosti. Napomenimo da za linearne operatore važi  $\langle\psi|U\chi\rangle = \langle U^\dagger\psi|\chi\rangle$ , čijom primenom dobijamo  $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$  za unitarne operatore. Na osnovu druge osobine vidimo da unitarni operatori ne menjaju skalarni proizvod.

Antilinearni i antiunitarni operatori zadovoljavaju

$$\begin{aligned} A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\chi\rangle) &= \alpha^* A|\psi\rangle + \beta^* A|\chi\rangle \\ \langle A\psi|A\chi\rangle &= \langle\psi|\chi\rangle^* = \langle\chi|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.10.101)$$

Adjungovani operator za antilinearne operatore se ne može definisati kao za linearne. On se definiše na sledeći način:  $\langle\psi|A\chi\rangle = \langle A^\dagger\psi|\chi\rangle^*$ . Antiunitaran operator je proizvod unitarnog operatora i kompleksne konjugacije.

Vremenska evolucija (za konzervativne sisteme) u kvantnoj mehanici je data sa

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle. \quad (3.10.102)$$

Neka je  $\tau$  operator vremenske inverzije, tada je  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tau|\psi(-t)\rangle$  stanje dobijeno iz  $|\psi(t)\rangle$  vremenskom inverzijom. Vremenska inverzija je simetrija kvantne mehanike pa ovo stanje evoluira prema

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-iHt}|\tilde{\psi}(0)\rangle . \quad (3.10.103)$$

Sa jedne strane je

$$\tau|\psi(-t)\rangle = e^{-iHt}|\tilde{\psi}(0)\rangle = e^{-iHt}\tau|\psi(0)\rangle . \quad (3.10.104)$$

Sa druge strane imamo

$$\tau|\psi(-t)\rangle = \tau e^{iHt}|\psi(0)\rangle . \quad (3.10.105)$$

Poredjenjem dolazimo do  $\tau e^{iHt} = e^{-iHt}\tau$ , odnosno

$$\tau(iH) = (-iH)\tau . \quad (3.10.106)$$

Operator vremenske inverzije je antilinearan i antiunitaran operator. Iz (3.10.106) sledi  $\tau H \tau^{-1} = H$ . Dakle operator vremenske inverzije komutira sa hamiltonijanom. Kada bi bio linearan i unitaran spektar stanja ne bi bio ograničen odozdo.

Vremenska inverzija je simetrija Dirakove jednačine. Dirakov spinor se pri vremenskoj inverziji transformiše na sledeći način

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(-t, \mathbf{x}) = T\psi^*(t, \mathbf{x}) , \quad (3.10.107)$$

gde matrica  $T$  zadovoljava  $T\gamma_\mu T^{-1} = (\gamma^\mu)^*$ . U Dirakovoj i Vajlovoj reprezentaciji gama matrica je  $T = i\gamma^1\gamma^3$ .

U Kvantnoj teoriji polja vremenska inverzija je reprezentovana antiunitarnim operatorom  $\tau$ . Dirakovo polje se transformiše prema

$$\tau\psi_a(t, \mathbf{x})\tau^{-1} = \eta_T T_{ab}\psi_b(-t, \mathbf{x}) , \quad (3.10.108)$$

gde je  $\eta_T$  fazni faktor. Pre nego što odredimo kako vremenska inverzija deluje na kreacione i anihilacione operatore nadjimo  $Tu(\mathbf{p}, \pm)$  i  $Tv(\mathbf{p}, \pm)$ . Dobijamo

$$\begin{aligned} Tu(\mathbf{p}, \pm) &= i\gamma^1\gamma^3 u(\mathbf{p}, \pm) = -\mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\pm \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_p+m}\varphi_\pm \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \sigma_2\varphi_\pm^* \\ \sigma_2\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_p+m}\varphi_\pm^* \end{pmatrix}^* \end{aligned} \quad (3.10.109)$$

Primenom  $\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_2$  i  $\sigma_2\varphi_+^* = i\varphi_-$ ,  $\sigma_2\varphi_-^* = -i\varphi_+$  dobijamo  $Tu(\mathbf{p}, \pm) = \mp iu^*(-\mathbf{p}, \mp)$ . Slično se dobija  $Tv(\mathbf{p}, \pm) = \pm iv^*(-\mathbf{p}, \mp)$ . Desna strana jednačine (3.10.108) je

$$\tau\psi_a(t, \mathbf{x})\tau^{-1} = \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( u_{ra}^*(\mathbf{p})\tau c(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} e^{ip\cdot x} + v_{ra}^*(\mathbf{p})\tau d^\dagger(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} e^{-ip\cdot x} \right) . \quad (3.10.110)$$

Leva strana jednačine (3.10.108) je

$$\begin{aligned}
\eta_T T_{ab} \psi_b(-t, \mathbf{x}) &= \eta_T \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( -isu^*(-\mathbf{p}, -s)c(\mathbf{p}, s)e^{iE_p t + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right. \\
&\quad \left. + isv^*(-\mathbf{p}, -s)d^\dagger(\mathbf{p}, s)e^{-iE_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right) \\
&= \eta_T \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left( isu^*(\mathbf{p}, s)c(-\mathbf{p}, -s)e^{ip \cdot x} \right. \\
&\quad \left. - isv^*(\mathbf{p}, s)d^\dagger(-\mathbf{p}, -s)e^{-ip \cdot x} \right). \tag{3.10.111}
\end{aligned}$$

Poredjenjem (3.10.110) i (3.10.111) dobijamo

$$\begin{aligned}
\tau c(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} &= is\eta_T c(-\mathbf{p}, -s) \\
\tau d^\dagger(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} &= -is\eta_T d^\dagger(-\mathbf{p}, -s), \tag{3.10.112}
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\tau c^\dagger(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} &= -is\eta_T^* c^\dagger(-\mathbf{p}, -s) \\
\tau d_r(\mathbf{p}, s)\tau^{-1} &= is\eta_T^* d(-\mathbf{p}, -s). \tag{3.10.113}
\end{aligned}$$

Često se uzima  $\eta_T = -i$ . Inverzija prostora na elektron, odnosno pozitron deluju prema

$$\begin{aligned}
\tau|\mathbf{p}, \pm, e^-\rangle &= \mp i\eta_T^* |-\mathbf{p}, \mp, e^-\rangle \\
\tau|\mathbf{p}, \pm, e^+\rangle &= \pm i\eta_T |-\mathbf{p}, \mp, e^-\rangle. \tag{3.10.114}
\end{aligned}$$

Vremenska inverzija menja znak impulsa i flipuje projekciju spina čestice, a helicitet čestice se ne menja pri prostornoj inverziji.

### 3.11 CPT teorema

Svaka lokalna kvantna teorija polja čiji je lagranžijan hermitski i invarijantan na Lorencove transformacije i čiji operatori zadovoljavaju vezu izmedju spina i statistike zadovoljava

$$CPT\mathcal{L}(x)(CPT)^{-1} = \mathcal{L}(-x).$$

Smatra se da je *CPT* univerzalna simetrija u prirodi, tj. sve interakcije su invarijantne na *CPT* transformacije. Elektrodinamika je invarijantna na prostornu inverziju, vremensku inverziju i konjugaciju naboja ponaosob. Slabe interakcije nisu invarijantne na prostornu inverziju, ali su invarijantne na *CP* i *T* ponaosob.

# Glava 4

## Kvantovanje elektromagnetnog polja

### 4.1 Uvod

Dejstvo za elektromagnetno polje je

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \right), \quad (4.1.1)$$

gde je  $j_\mu$  gustina struje polja materije. Tenzor jačine polja je

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Električno i magnetno polje su izraženi preko potencijala:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0 \\ \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} . \end{aligned}$$

Komponente tenzora jačine polja su električno i magnetno polje:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= -\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x^i} = E_i , \\ F_{ij} &= -\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \frac{\partial A^j}{\partial x^i} = -\varepsilon_{ijk} B_k . \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Variranjem dejstva dobijamo Maksvelove jednačine

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu , \quad (4.1.3)$$

odnosno

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu . \quad (4.1.4)$$

Lako se vidi da su jednačine (4.1.3) prva i četvrta Maksvelova jednačina,

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} &= \rho \\ \text{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Pored dinamičkih jednačina elektromagnetno polje zadovoljava uslove

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0 \quad . \quad (4.1.6)$$

Lako se vidi da su to druga i treća Maksvelova jednačina. Elektrodinamika je invarijantna na kalibracione, odnosno gauge transformacije

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad , \quad (4.1.7)$$

gde je  $\Lambda = \Lambda(x)$  proizvoljna diferencijabilna funkcija. Tenzor jačine polja se ne menja pri ovoj transformaciji. Prvi član u dejstvu (4.1.1) je gauge invarijantan, dok se interakcioni član pri gauge transformacijama menja prema

$$\int d^4x j_\mu A^\mu \rightarrow \int d^4x j_\mu A^\mu + \int d^4x j_\mu \partial^\mu \Lambda \quad . \quad (4.1.8)$$

Primenom parcijalne integracije, uz odgovarajuće asimptotsko ponašanje člana  $j_\mu \Lambda$  u beskonačnosti, dobijamo

$$\int d^4x j_\mu A^\mu \rightarrow \int d^4x j_\mu A^\mu - \int d^4x \Lambda (\partial_\mu j^\mu) \quad . \quad (4.1.9)$$

Poslednji član je jednak nuli, jer je elektromagnetno polje kuplovano sa očuvanom strujom. Četvoropotencijal  $A^\mu$  ima četiri komponente, ali zbog gauge simetrije samo su dve komponente nezavisni stepeni slobode.

## 4.2 Kanonski hamiltonijan

Generalisani impuls konjugovan potencijalu  $A_\mu$  je

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad . \quad (4.2.10)$$

Generalisani impuls  $\pi^0$  je jednak nuli, dok su prostorne komponente generalisanog impulsa date sa

$$\pi^i = -F^{0i} = E_i \quad . \quad (4.2.11)$$

Dakle, generalisani impuls konjugovan potencijalu  $A^i$  je električno polje, a generalisani impuls konjugovan nultoj komponenti potencijala je jednak nuli. Zbog toga komutaciona relacija

$$[A_0(t, \mathbf{x}), \pi^0(t, \mathbf{y})] = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.2.12)$$

nije konzistentna. Jednačina  $\pi^0 = 0$  je veza u teoriji.

Kanonski hamiltonijan se dobija iz lagranžijana

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left( \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} \right) \\ &= \int d^3x \left( E_i (E_i - \partial^i A^0) + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.2.13)$$



Primenom parcijalne integracije dolazimo do

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - A^0 \operatorname{div} \mathbf{E} \right). \quad (4.2.14)$$

Iz zadnjeg izraza vidimo da  $A^0$  igra ulogu Lagranževog množitelja, tj. nije dinamička promenljiva. Fundamentalne Poasonove zgrade su

$$\{A_\mu(t, \mathbf{x}), \pi_\nu(t, \mathbf{y})\} = g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.2.15)$$

Već smo rekli da je  $\pi^0 = 0$  veza u modelu. Veze u teoriji polja su analogne vezama kod mehaničkih sistema, sa kojima ste se upoznali u Analitičkoj mehanici. To su relacije koje zadovoljavaju koordinate i impulsi i na taj način one smanjuju broj stepeni slobode. Nadjimo sada vremenski izvod od  $\pi^0$ . Lako se vidi da je

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0(t, \mathbf{x}), H\} = \operatorname{div} \mathbf{E}. \quad (4.2.16)$$

Kako je  $\pi^0 = 0$ , to mora biti i  $\dot{\pi}^0 = 0$ . Dakle uslov konzistentnosti veze  $\pi^0 = 0$  daje drugu vezu  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , što je Gausova teorema. Zadnji član u hamiltonijanu (4.2.14) možemo odbaciti.

Pokažite da važi  $\{\operatorname{div} \mathbf{E}, H\} = 0$ . Ovaj uslov znači da se ne pojavljuju nove veze u teoriji. Dakle, elektromagnetno polje je primer sistema sa vezama.

### 4.3 Kvantovanje elektromagnetnog polja u Kulonovoj kalibraciji

Potencijal u Kulonovoj kalibraciji zadovoljava uslov  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .  $\nu = 0$  jednačina (4.1.4) u Kulonovoj kalibraciji je

$$\Delta \phi = -\rho, \quad (4.3.17)$$

odakle je

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(t, \mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.3.18)$$

uz asimptotski uslov  $\phi \rightarrow 0$  kad  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Dakle za slobodno elektromagnetno polje ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ) skalarni potencijal je nula,  $\phi = 0$ . U Kulonovoj kalibraciji potencijal zadovoljava  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , ali je i  $A^0 = 0$ . Ako uzmemo da je  $A^0 = 0$ , lagranžijan za slobodno elektromagnetno polje je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \partial_0 A_i \partial^0 A^i. \quad (4.3.19)$$

Iz (4.3.19) nalazimo generalisane impulse konjugovane sa  $A_i$ :

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} = -F^{0i} = E_i. \quad (4.3.20)$$

Pretpostavimo da istovremene komutacione relacije za  $A_i$  i impulse  $\pi^i$  imaju oblik

$$[A_i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] = i \delta_i^j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.3.21)$$

Divergencija leve strane ove relacije je jednaka nuli, dok desna nije. Dakle, istovremene komutacione relacije (4.3.21) nisu konzistentne sa Kulonovim kalibracionim uslovom,  $\text{div}\mathbf{A} = 0$ . Zato moramo pažljivo da postavimo komutacione relacije.

Podsetimo se Helmholtcove teoreme iz vektorske analize. Svako vektorsko polje  $\mathbf{A}$  možemo rastaviti u transverzalnu ( $\mathbf{A}_T$ ) i longitudinalnu komponentu ( $\mathbf{A}_L$ ):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_L . \quad (4.3.22)$$

Transverzalna komponenta zadovoljava uslov  $\text{div}\mathbf{A}_T = 0$ , a longitudinalna  $\text{rot}\mathbf{A}_L = 0$ . One su date sa

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_T)^i &= (P_T)^i_j A^j = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) A^j \\ (\mathbf{A}_L)^i &= (P_L)^i_j A^j = \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} A^j , \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

gde su  $P_T$  i  $P_L$  transverzalni, odnosno longitudinalni projektori. Oznaka  $\partial_i \partial_j / \Delta$  je simbolički zapis diferencijalnog operatora:

$$\frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} = \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (4.3.24)$$

Longitudinalna komponenta vektorskog polja je

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_L)^i(\mathbf{x}) &= \int d^3y \frac{\partial_{ix} \partial_{jx}}{\Delta_x} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A^j(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3y \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} A^j(\mathbf{y}) \\ &= - \int d^3y A^j(\mathbf{y}) \partial_{ix} \partial_{jx} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\mathbf{k}^2} \\ &= \int d^3y A^j(\mathbf{y}) \partial_{ix} \partial_{jy} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \\ &= -\partial_i^x \int d^3y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \text{div}\mathbf{A}(\mathbf{y}) . \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Dakle longitudinalna komponenta vektorskog polja je

$$\mathbf{A}_L = -\nabla \int d^3y \frac{\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} . \quad (4.3.26)$$

Kulonov kalibracioni uslov povlači da je  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_T$ , tj. longitudinalna komponenta vektorskog potencijala je jednaka nuli. Slično, generalisani impuls razlažemo na transverzalnu i longitudinalnu komponentu

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{E} = \boldsymbol{\pi}_T + \boldsymbol{\pi}_L . \quad (4.3.27)$$

Iz definicije generalisanog impulsa je jasno da generalisani impuls (tj, električno polje) ima samo transverzalnu komponentu. Od četiri komponente vektorskog potencijala samo su dve

transverzalne komponente nezavisni stepeni slobode. U Kulonovoj kalibraciji radimo sa fizičkim stepenima slobode, dok je Lorencova simetrija manifestno izgubljena.

Sada ćemo se vratiti problemu istovremenih komutacionih relacija. Relacije (4.3.21) su nesaglasne sa Kulonovim kalibracionim uslovom. Pošto nećemo ulaziti u Dirakovu proceduru kvantizacije sistema sa vezama probaćemo da pogodimo komutacione relacije. Da bi komutacione relacije bile u saglasnosti sa Kulonovim kalibracionim uslovom mora važiti

$$[A_i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] = [A_{Ti}(t, \mathbf{x}), \pi_T^j(t, \mathbf{y})] . \quad (4.3.28)$$

Na osnovu definicije transverzalne komponente je

$$\begin{aligned} [A_{Ti}(t, \mathbf{x}), \pi_T^j(t, \mathbf{y})] &= -[A_T^i(t, \mathbf{x}), \pi_T^j(t, \mathbf{y})] \\ &= -\int d^3 z_1 \int d^3 z_2 (P_T)^i_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) (P_T)^j_n(\mathbf{y}, \mathbf{z}_2) [A^m(t, \mathbf{z}_1), \pi^n(t, \mathbf{z}_2)] \end{aligned}$$

Zamenom ovog izraza u (4.3.28) dobijamo

$$[A^i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] = \int d^3 z_1 \int d^3 z_2 (P_T)^i_m(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) (P_T)^j_n(\mathbf{y}, \mathbf{z}_2) [A^m(t, \mathbf{z}_1), \pi^n(t, \mathbf{z}_2)] , \quad (4.3.29)$$

odnosno simbolički

$$[A^i, \pi^j] = (P_T)^i_m (P_T)^j_n [A^m, \pi^n] . \quad (4.3.30)$$

Rešenje ovog uslova je

$$[A_i, \pi^j] = i (P_T)_i^j , \quad (4.3.31)$$

tj.

$$\begin{aligned} [A_i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] &= i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} , \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

jer je  $P_T^2 = P_T$ . Desna strana (4.3.32) naziva se transverzalnom delta funkcijom.

Rezimirajmo: Istovremene komutacione relacije za elektromagnetno polje u Kulonovoj kalibraciji su

$$\begin{aligned} [A_i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] &= i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [A_i(t, \mathbf{x}), A_j(t, \mathbf{y})] &= [\pi^i(t, \mathbf{x}), \pi^j(t, \mathbf{y})] = 0 . \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Iz lagranžijana (4.3.19) dobijamo jednačinu za vektorski potencijal  $\square \mathbf{A} = 0$ . Njeno partikularno rešenje je ravan talas  $\mathbf{A} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}$ , gde je  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{p})$  polarizacioni vektor. Zamenom u jednačinu dobijamo  $p^2 = 0$ , tako da ćemo uzeti  $p^\mu = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ . Kulonov kalibracioni uslov daje ograničenje  $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{p}) = 0$ . Polarizacija fotona je transverzalna. Ako se foton kreće duž  $z$ -ose, tj.  $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_3$ ,

onda polarizacioni vektori pripadju  $Oxy$ -ravni. Polarizacioni vektori  $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_x$  i  $\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_y$  odgovaraju linearnoj polarizaciji, dok izbor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (4.3.34)$$

odgovaraju kružnim polarizacijama. Polarizacioni vektori su ortonormirani

$$\boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s^*(\mathbf{p}) = \delta_{rs} . \quad (4.3.35)$$

Vektori  $\boldsymbol{\epsilon}_1(\mathbf{p})$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_2(\mathbf{p})$  i  $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  čine bazis, pa važe relacije kompletnosti

$$\sum_{r=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}_r^i(\mathbf{p}) \boldsymbol{\epsilon}_r^{*j}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2} . \quad (4.3.36)$$

Primitimo da se desna strana ove relacije poklapa sa desnom stranom u (4.3.32). Opšte rešenje za vektorski potencijal je

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{r=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( a_r(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} , \quad (4.3.37)$$

gde su  $a_r(\mathbf{k})$  i  $a_r^\dagger(\mathbf{k})$  anihilacioni odnosno kreacioni operatori. Vakuum je definisan sa  $a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ . Stanje  $a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  je foton impulsa  $\mathbf{k}$  i polarizacije  $r$ . Višečestična fotonska stanja dobijaju se uzastopnom primenom kreacionih operatora. Električno polje je dato sa

$$\mathbf{E}(x) = i \sum_{r=1}^2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}} \left( a_r(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r^*(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{k^0=|\mathbf{k}|} . \quad (4.3.38)$$

Iz (4.3.33) slede komutacione relacije za kreacione i anihilacione operatore

$$\begin{aligned}[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})] &= \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \\ [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{q})] &= [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{q})] = 0 .\end{aligned}\quad (4.3.39)$$

Dobili smo bozonske komutacione relacije.

### 4.3.1 Hamiltonijan i impuls

Kanonski hamiltonijan je dat izrazom (4.2.14). Hamiltonijan se takodje može dobiti integracijom 00 komponente tenzora energije-impulsa. Tenzor energije impulsa je očuvana gustina struje pri translacijama. Primenom (1.2.67) dobijamo

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} .\end{aligned}\quad (4.3.40)$$

Tenzor energije-impulsa nije jednoznačan. Možemo mu dodati član čija je divergencija jednaka nuli. To neće uticati na naboje (u ovom slučaju četvorpimpuls polja) koje dobijamo integracijom po troprostoru. Ova sloboda u definisanju tenzora energije-impulsa se koristi da bi se ovaj tenzor simetrizovao (zadatak 5. 18). Tenzoru enrgije-impulsa elektromagnetnog polja dodaćemo član  $\partial^\rho(F_{\mu\rho}A_\nu)$ . Divergencija ovog člana je jednaka nuli

$$\partial^\mu \partial^\rho (F_{\mu\rho} A_\nu) = 0, \quad (4.3.41)$$

jer je deo koji sadrži parcijalne izvode simetričan na zamenu indeksa  $\mu$  i  $\rho$  a preostali deo je antisimetričan po ova dva indeksa. Novi tenzor energije-impulsa je

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\rho (F_{\mu\rho} A_\nu). \quad (4.3.42)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{00} &= -F^{0i} F^0_i + \frac{1}{4} (2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}) \\ &= \mathbf{E}^2 + \frac{1}{4} (-2\mathbf{E}^2 + 2\mathbf{B}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \\ \tilde{T}^{0i} &= -F^{0j} F^i_j \\ &= \epsilon^{ijk} E^j B^k \\ &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i, \\ \tilde{T}^{ij} &= -E^i E^j + \epsilon^{ikl} \epsilon^{jkn} B^l B^n + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \\ &= -(E^i E^j + B^i B^j - \delta_{ij} T_{00}). \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Iz izraza (4.3.43) je jasno da su  $\tilde{T}_{00}$ ,  $\tilde{T}^{0i}$ ,  $-\tilde{T}_{ij}$  gustna energije, impulsa i Maksvelov tenzor napona.

Oredimo sada hamiltonijan elektromagnetnog polja. On je dat izrazom (4.2.14). Takodje, hamiltonijan možete naći kao integral 00 komponente tenzora energije impulsa. Dakle, polazimo od

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (4.3.44)$$

Primenom (4.3.38) je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2 &= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \int d^3x d^3p d^3k \sqrt{|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \left[ a_r(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right. \\ &\quad - a_r(\mathbf{p}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s^*(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r^*(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s^*(\mathbf{q}) e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad \left. - a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}_r^*(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{q}) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right]. \end{aligned}$$

Integracijom dolazimo do

$$\frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2 = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \int d^3p |\mathbf{p}| \left[ -a_r(\mathbf{p}) a_r(-\mathbf{p}) - a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r^\dagger(-\mathbf{p}) + a_r(\mathbf{p}) a_r^\dagger(\mathbf{p}) + a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p}) \right].$$

Slično se nalazi i doprinos hamiltonijanu od magnetnog polja. Hamiltonijan je

$$: H := \sum_{r=1}^2 \int d^3p |a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p})|. \quad (4.3.45)$$

Hamiltonijan slobodnog elektromagnetnog polja je suma beskonačno puno neinteragujućih oscilatora. Za svaki impuls  $\mathbf{p}$  imamo dva oscilatora. Impuls elektromagnetnog polja se dobija integracijom  $0i$  komponente tenzora energije impulsa

$$P^i = \int d^3x \tilde{T}^{0i}, \quad (4.3.46)$$

odnosno

$$\mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (4.3.47)$$

Rezultat je

$$: \mathbf{P} := \sum_{r=1}^2 \int d^3p \mathbf{p} a_r^\dagger(\mathbf{p}) a_r(\mathbf{p})|. \quad (4.3.48)$$

### 4.3.2 Spin fotona

Dejstvo za elektromagnetno polje je invarijantno na Lorencove transformacije. Infinitesimalna promena vektorskog potencijala pri Lorencovim transformacijama je  $\delta A_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ . Nulta komponenta Neterine struje je

$$\begin{aligned} J^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\alpha)} \delta A_\alpha - T^0_\nu \omega^{\nu\rho} x_\rho \\ &= \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \left( -F_{0\alpha} A_\beta + F_{0\beta} A_\alpha - x_\beta T_{0\alpha} + x_\alpha T_{0\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

Generalisani angularni moment elektromagnetnog polja je

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \left( -F_{0\mu} A_\nu + F_{0\nu} A_\mu - x_\nu T_{0\mu} + x_\mu T_{0\nu} \right). \quad (4.3.50)$$

Dva sabirka u kojima figurišu  $x$  koordinate su orbitalni deo, dok su preostala dva sabirka spinski deo uglovnog momenta. Definišimo  $J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$ . Dakle, spinski deo uglovnog momenta je

$$S_i = \frac{1}{2} \epsilon_{lij} \int d^3x (-F_{0i} A_j + F_{0j} A_i) = \epsilon_{lij} \int d^3x : A^i \dot{A}^j :. \quad (4.3.51)$$

Vektorski potencijal (4.3.37) zamenićemo u izraz za spin. Možemo uzeti da je  $t = 0$ . Integracijom po prostornim koordinatama i jednom impulsu dolazimo do

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{i}{2} \epsilon_{lij} \sum_{r,s=1}^2 \int d^3k \left( -\epsilon_r^i(\mathbf{k}) \epsilon_s^j(-\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_s(-\mathbf{k}) \right. \\ &\quad + \epsilon_r^i(\mathbf{k}) \epsilon_s^{j*}(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) - \epsilon_r^{i*}(\mathbf{k}) \epsilon_s^j(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \\ &\quad \left. + \epsilon_r^{i*}(\mathbf{k}) \epsilon_s^{j*}(-\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s^\dagger(-\mathbf{k}) \right). \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

#### 4.4. KVANTOVANJE ELEKTROMAGNETNOG POLJA U LORENCOVOJ KALIBRACIJI 71

Ako u prvom i četvrtom članu u podintegralnom izrazu zamenimo indekse  $r$  i  $s$  i  $\mathbf{p}$  zamenimo sa  $-\mathbf{p}$ , dobićemo iste izraze. Zaključujemo da su ti članovi simetrični na zamenu  $i$  sa  $j$ . Množenjem tih izraza sa antisimetričnim simbolom Levi-Čivita dobijamo nulu. Dalje se može pokazati da su drugi i treći član jednaki. Dakle spin elektromagnetnog polja je

$$\mathbf{S} = i \sum_{r,s=1}^2 \int d^3k \epsilon_r(\mathbf{k}) \times \epsilon_s^*(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) . \quad (4.3.53)$$

Uzmimo da se polarizacioni vektori realni. Tako dobijamo

$$\mathbf{S} = \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (a_2^\dagger(\mathbf{k}) a_1(\mathbf{k}) - a_1^\dagger(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k})) . \quad (4.3.54)$$

Neka su stanja fotona data sa

$$|\mathbf{q}, \pm 1\rangle = a_\pm^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger(\mathbf{q}) \pm i a_2^\dagger(\mathbf{q}))|0\rangle . \quad (4.3.55)$$

Ako se foton kreće duž  $z$ -ose tada je

$$S_3|\mathbf{q} = q\mathbf{e}_3, \pm 1\rangle = \pm|\mathbf{q} = q\mathbf{e}_3, \pm 1\rangle . \quad (4.3.56)$$

Dakle stanja  $|\mathbf{q} = q\mathbf{e}_3, \pm 1\rangle$  opisuju fotone koji se kreću duž  $z$ -ose i imaju helicitet  $\pm 1$ . Spin fotona je jednak jedinici. Napomenimo da je helicitet fotona  $\pm 1$  i da ne može biti nula. To je zbog toga što je foton bezmasena čestica. Detalji na kursu Teorija elementarnih čestica.

## 4.4 Kvantovanje elektromagnetnog polja u Lorencovoj kalibraciji

Lorencov kalibracioni uslov je  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Ako potencijali ne zadovoljavaju Lorencov kalibracioni uslov onda možemo napraviti kalibracionu transformaciju tako da dobijemo nove potencijale koji zadovoljavaju Lorencov gauge. Dakle, ako je  $\partial_\mu A^\mu = \psi(x) \neq 0$ , onda prelazimo na nove potencijale  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ . Uslov  $\partial_\mu A'^\mu = 0$  daje  $\square \Lambda = -\psi$ . Ova nehomogena talasna jednačina ima rešenja. Fiksiranje simetrije nije potpuno, jer se mogu vršiti kalibracione transformacije sa funkcijama  $\Lambda$  koje zadovoljavaju homogenu talasnu jednačinu  $\square \Lambda = 0$ .

Lorencov kalibracioni uslov, pomoću Lagranževog množitelja,  $\lambda$  ćemo uključiti u lagranžijan. Modifikovana gustina lagranžijan je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 . \quad (4.4.57)$$

Drugi sabirak je član koji fiksira kalibraciju. Variranjem po Lagranževom množitelju, odnosno po potencijalu dobijamo jednačine kretanja:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ \square A^\mu - (1 - \lambda) \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.4.58)$$

Opservabilne veličine ne zavise od vrednosti  $\lambda$ . Izbor  $\lambda = 1$  je tzv. Feynmanov 'gauge',  $\lambda = \infty$  Landauvljev, a  $\lambda = 0$  unitarni 'gauge'. Reč gauge smo stavili pod navodnike jer se radi o izboru vrednosti parametra  $\lambda$ , a ne o fiksiranju neke gauge simetrije. Dalje ćemo raditi u Feynmanovom gaugu u kojem Lagranžijan ima oblik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, \quad (4.4.59)$$

gde smo odbacili članove koji su totalna divergencija. Ovaj lagranžijan se naziva Fermije-  
vim lagranžijanom i on odgovara zbiru četiri bezmasena Klajn–Gordonova polja. Medjutim, Maksvelova teorija nije ekvivalentna sa četiri skalarna polja, zbog Lorencovog kalibracionog uslova. Za  $\lambda = 1$  jednačina kretanja je  $\square A^\mu = 0$ . Opšte rešenje ove jednačine je

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( a_\lambda(\mathbf{k}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right), \quad (4.4.60)$$

gde su  $\epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k})$  polarizacioni vektori. Indeks  $\lambda$  uzima vrednosti 0, 1, 2 i 3. Polarizacioni vektori  $\epsilon_1^\mu(\mathbf{k})$  and  $\epsilon_2^\mu(\mathbf{k})$  odgovaraju transverznoj polarizaciji. Skalarana polarizacija je  $\epsilon_0^\mu = n^\mu$ , gde je  $n^\mu$  jedinični vektor vremenskog tipa. Možemo izabrati  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Longitudinalna polarizacija  $\epsilon_3^\mu(\mathbf{k})$  je data sa

$$\epsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu - (n \cdot k)n^\mu}{(n \cdot k)}.$$

Ako je  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$  tada je

$$\epsilon_3^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \end{pmatrix}, \quad (4.4.61)$$

tj. polarizacija ovog fotona je duž pravca kretanja. Za foton koji se kreće duž  $z$ -ose četvorimpuls je

$$k^\mu = (k, 0, 0, k)^T, \quad (4.4.62)$$

a polarizacioni vektori su

$$\epsilon_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_1^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.63)$$

Važe sledeće relacije

$$\begin{aligned} k_\mu \epsilon_1^\mu(k) &= k_\mu \epsilon_2^\mu(k) = 0 \\ k_\mu \epsilon_0^\mu(k) + k_\mu \epsilon_3^\mu(k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

Polarizacioni vektori zadovoljavaju relacije ortonormiranosti

$$g_{\mu\nu} \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_{\lambda'}^{\nu*}(\mathbf{k}) = g_{\lambda\lambda'}, \quad (4.4.65)$$



#### 4.4. KVANTOVANJE ELEKTROMAGNETNOG POLJA U LORENCOVOJ KALIBRACIJI 73

i relacije kompletnosti

$$g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_{\lambda'}^{\nu*}(\mathbf{k}) = g^{\mu\nu} . \quad (4.4.66)$$

U ova dva izraza  $g_{\lambda\lambda'}$  nije metrika, već se samo numerički sa njom poklapa. Npr.

$$g_{\mu\nu}\varepsilon_0^{\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_0^{\nu*}(\mathbf{k}) = 1, \quad g_{\mu\nu}\varepsilon_1^{\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_1^{\nu*}(\mathbf{k}) = -1, \quad g_{\mu\nu}\varepsilon_1^{\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_2^{\nu*}(\mathbf{k}) = 0 . \quad (4.4.67)$$

Iz (4.4.59) generalisani impulsi su  $\pi^{\mu} = -\partial_0 A^{\mu}$ . Istovremene komutacione relacije u Lorencovoj kalibraciji su

$$\begin{aligned} [A_{\mu}(t, \mathbf{x}), \pi^{\nu}(t, \mathbf{y})] &= -i\delta_{\mu}^{\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [A_{\mu}(t, \mathbf{x}), A_{\nu}(t, \mathbf{y})] &= [\pi^{\mu}(t, \mathbf{x}), \pi^{\nu}(t, \mathbf{y})] = 0 . \end{aligned} \quad (4.4.68)$$

Iz (4.4.68) naćićemo komutacione relacije izmedju kreacionih i anihilacionih operatora. Uzmimo da je  $t = 0$ . Iz

$$\begin{aligned} A^{\mu}(x) &= \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( a_{\lambda}(\mathbf{k})\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ \pi^{\mu}(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} |\mathbf{k}| \left( a_{\lambda}(\mathbf{k})\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (4.4.69)$$

sledi

$$\begin{aligned} a_{\lambda}(\mathbf{k}) &= \int d^3x \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( |\mathbf{k}|A^{\mu}(\mathbf{x}) + i\dot{A}^{\mu}(\mathbf{x}) \right) g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_{\mu\lambda'}(\mathbf{k}) \\ a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) &= \int d^3x \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left( |\mathbf{k}|A^{\mu}(\mathbf{x}) - i\dot{A}^{\mu}(\mathbf{x}) \right) g_{\lambda\lambda'}\varepsilon_{\mu\lambda'}(\mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (4.4.70)$$

Nadjimo sada komutator izmedju anihilacionih i kreacionih operatora. Polazeći od (4.4.70) imamo

$$\begin{aligned} [a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{q})] &= \int d^3x d^3y \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}}{2(2\pi)^3\sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{q}|}} \left( -i|\mathbf{k}|[A^{\mu}(\mathbf{x}), \dot{A}^{\nu}(\mathbf{y})]g_{\lambda r}\varepsilon_{\mu r}(\mathbf{k})g_{\lambda's}\varepsilon_{\nu s}(\mathbf{q}) \right. \\ &\quad \left. + i|\mathbf{q}|[\dot{A}^{\mu}(\mathbf{x}), A^{\nu}(\mathbf{y})]g_{\lambda r}\varepsilon_{\mu r}(\mathbf{k})g_{\lambda's}\varepsilon_{\nu s}(\mathbf{q}) \right) \\ &= \int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3|\mathbf{k}|} \left( -|\mathbf{k}|[A^{\mu}(\mathbf{x}), \dot{A}^{\nu}(\mathbf{y})]g_{\lambda r}g_{\lambda's}\varepsilon_{\mu r}(\mathbf{k})\varepsilon_{\nu s}(\mathbf{k})g^{\mu\nu} \right. \\ &= \left. -g_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) . \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

Slično se pokazuju i sledeća dva komutatora

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{q})] = [a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{q})] = 0 . \quad (4.4.72)$$

Komutacione relacije za transverzalne i longitudinalne fotone imaju standardni oblik, dok se u komutatoru za skalarnu fotone pojavljuje dopunski znak minus:

$$[a_0(\mathbf{k}), a_0^{\dagger}(\mathbf{q})] = -\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) . \quad (4.4.73)$$

Vakuum je definisan sa uslovima  $a_\lambda(\mathbf{k})|0\rangle = 0$ . Jednočestična stanja se dobijaju delovanjem kreacionog operatora na vakuum, tj.  $|\mathbf{k}, \lambda\rangle = a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$ . Za skalarne fotone je

$$\langle \mathbf{k}, 0 | \mathbf{p}, 0 \rangle = \langle 0 | a_0(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle . \quad (4.4.74)$$

Primenom komutacionih relacija dobijamo

$$\langle \mathbf{k}, 0 | \mathbf{p}, 0 \rangle = -\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) . \quad (4.4.75)$$

Norma skalarnih fotona je negativna, tj. ova stanja su duhovi (ghost). Oni potiču od neobičnog znaka minus u komutatoru (4.4.73). To je takodje i posledica pogrešnog znaka člana u la-granžijanu<sup>1</sup> za ove fotone. Da bismo izbegli problem beskonačne norme proverite da je norma stanja

$$|\phi\rangle = \int d^3k f(\mathbf{k}) a_0^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle$$

data sa

$$|\langle \phi | \phi \rangle|^2 = - \int d^3k |f(\mathbf{k})|^2 .$$

Skalarni fotoni su gostovi i oni kao i longitudinalni fotoni nisu fizički stepeni slobode. Medjutim da bismo manifestno očuvali Lorencovu kovarijantnost teorije zadržaćemo i ove fotone. Ali videćemo da oni ne daju doprinos opservabilnim veličinama.

Hamiltonijan elektromagnetnog polja je

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x : (\pi^\mu A_\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) : \\ &= \int d^3x : (-\frac{1}{2} \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \frac{1}{2} \partial_i A_\mu \partial^i A^\mu) : \\ &= \sum_{\lambda=0}^3 \int d^3k |\mathbf{k}| (-g_{\lambda\lambda'}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \\ &= \int d^3k |\mathbf{k}| (\sum_{i=1}^3 a_i^\dagger(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k})) . \end{aligned} \quad (4.4.76)$$

Skalarni fotoni daju negativan doprinos hamiltonijanu. To ukazuje na problem: spektar stanja nije ograničen odozdo. Medjutim, ovaj problem ćemo uskoro rešiti. Zaboravili smo Lorencov kalibracioni uslov. Ovaj uslov je nemoguće nametnuti kao operatorsku jednakost, jer je kontradiktoran sa komutacionim relacijama. Uzećemo da fizička stanja,  $|\psi\rangle$  zadovoljavaju slabiji uslov

$$\partial_\mu A^{\mu(+)} |\psi\rangle = 0 , \quad (4.4.77)$$

---

1

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_0 A^0 \partial^0 A^0 + \dots$$

gde je  $A^{\mu(+)}$  pozitivno frekventni deo potencijala. Iz (4.4.77) sledi

$$\langle \psi' | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0 . \quad (4.4.78)$$

Kako je

$$\partial_\mu A^{\mu(+)} = \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} (-ik_\mu) a_\lambda(\mathbf{k}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}$$

i

$$\begin{aligned} k_\mu \epsilon_1^\mu(\mathbf{k}) &= k_\mu \epsilon_2^\mu(\mathbf{k}) = 0 \\ k_\mu \epsilon_0^\mu(\mathbf{k}) &= -k_\mu \epsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = n \cdot k , \end{aligned} \quad (4.4.79)$$

to uslov (4.4.77) daje sledeći uslov na fizička stanja

$$(a_0(\mathbf{k}) - a_3(\mathbf{k})) | \psi \rangle = 0 . \quad (4.4.80)$$

Lako se vidi da je

$$\langle \psi | a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) - a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) | \psi \rangle = 0 . \quad (4.4.81)$$

Fizička stanja sadrže isti broj skalarnih i longitudinalnih fotona. Očekivana vrednost hamiltonijana elektromagnetnog polja je

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{i=1}^2 \int d^3k |\mathbf{k}| \langle \psi | a_i^\dagger(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}) | \psi \rangle . \quad (4.4.82)$$

Samo transverzalni fotoni (tj. pravi fotoni) daju doprinos hamiltonijanu. Slično važi i za druge opservable. Opisani metod kvantizacije je tzv. Gupta–Blojler kvantizacija.

Longitudinalni i skalarni fotoni su dekuplovani u Lorencovoj kalibraciji.

### 4.4.1 Fotonski propagator

Feynman-ov propagator za elektromagnetno polje je vakuumska očekivana vrednost vremenskog uredjenja dva operatora polja

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | A^\nu(y) A^\mu(x) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (4.4.83)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle &= \sum_{r,s=0}^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\sqrt{|\mathbf{k}||\mathbf{q}|}} e^{-ik \cdot x + iq \cdot y} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_s^\nu(\mathbf{q}) \langle 0 | a_r(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle \\ &= - \sum_r^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot (x-y)} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_s^\nu(\mathbf{k}) g_{rs} \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|} g^{\mu\nu} e^{-ik \cdot (x-y)} . \end{aligned} \quad (4.4.84)$$

Feynmanov propagator je onda dat sa

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|} g^{\mu\nu} \left( e^{-ik \cdot (x-y)} \theta(x_0 - y_0) + e^{-ik \cdot (y-x)} \theta(y_0 - x_0) \right). \quad (4.4.85)$$

Primenom Košijeve teoreme o rezidumima gornji rezultat postaje

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (4.4.86)$$

Izraz

$$i\tilde{D}_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.4.87)$$

je Feynman-ov propagator u impulsnom prostoru. Ovaj rezultat za propagator je dobijen u Feynman-ovoj kalibraciji, tj. za  $\lambda = 1$ . U slučaju proizvoljnog  $\lambda$  izraz za propagator je

$$i\tilde{D}_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{ik^\mu k^\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2}. \quad (4.4.88)$$

# Glava 5

## Perturbativni račun

Do sada smo razmatrali slobodne teorije polja, koje su samo kockica u izgradnji teorije polja koja opisuje realan svet. Lagranžijani slobodnih teorija polja su kvadratni po poljima, a odgovarajuće jednačine kretanja su linearne. U slobodnim teorijama polja čestice ne interaguju međusobno. Njihov broj se održava. Sa druge strane u prirodi čestice, zahvaljujući interakciji, se anihiliraju i kreiraju. Najprostiji primer interakcione teorije skalarnog polja je tzv.  $\phi^4$ -teorija. Gustina lagranžijana ove teorije je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 . \quad (5.0.1)$$

Prva dva člana u (5.0.1) predstavljaju gustinu lagranžijana slobodne teorije. Treći član je interakcija skalarnog polja samog sa sobom.  $\lambda$  je konstanta interakcije. Jednačina kretanje skalarnog polja se lako dobija iz gustine lagranžijana (5.0.1):

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3 . \quad (5.0.2)$$

Ova jednačina je nelinearna i ona ne može biti egzaktno rešena. Iz (5.0.1) generalisani impuls je isti kao i u slobodnoj teoriji  $\pi = \dot{\phi}$ , jer interakcioni član ne sadrži izvode polja. Istovremene komutacione relacije su iste kao za slobodno skalarno polje

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 . \quad (5.0.3)$$

Hamiltonijan  $\phi^4$  teorije je

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right) . \quad (5.0.4)$$

Poslednji član u hamiltonijanu je interakcioni hamiltonijan

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!}\phi^4 . \quad (5.0.5)$$

Drugi važan primer interakcione teorije je kvantna elektrodinamika (QED). Gustina lagranžijana je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (5.0.6)$$

odnosno

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + e\bar{\psi}A\psi. \quad (5.0.7)$$

Poslednji član opisuje interakciju fotona sa elektronom. Interakcija elektrona sa fotonom se dobija zamenom očičnog izvoda u Dirakovom lagranžijanu sa tzv. kovarijantnim izvodom

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (5.0.8)$$

Naravno potrebno je dodati i kinetički član za elektromagnetno polje. Detaljnije o ovoj preskripciji na kusu Teorije elementarnih čestica.

Sledeći primer je tzv. Jukavina teorija. Ona opisuje interakciju skalarnog polja sa Dirakovim. Gustina lagranžijana Jukavine teorije je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi - ig\bar{\psi}\psi\phi. \quad (5.0.9)$$

Recimo na kraju da ne postoji beskonačno puno interakcionih lagranžijana. Interakcija mora zadovoljiti neke kriterijume. Kao prvo ona mora biti Poenkare invarijantna, zatim lokalna, renormalizabilna i unitarna. Lokalnost znači da sva polja i izvodi polja u interakcionom lagranžijanu su u istoj tački prostor–vremena. Lokalnost teorije polja obezbedjuje važenje principa mikrokauzalnosti. Lokalnost npr. isključuje interakciju tipa  $\phi(x)\phi(y)$ , gde su  $x$  i  $y$  različite tačke prostor–vremena. Renormalizabilnost je vezana sa ponašanjem teorije na viskom energijama. Ona zabranjuje članove tipa  $\phi^n$ ,  $n > 4$ . Renormalizabilnost se detaljno izučava u Kvantnoj teoriji polja 2.

## 5.1 Šredingerova, Hajzenbergova i Dirakova slika

U kvantnoj teoriji se koriste tri reprezentacije stanja fizičkih sistema, odnosno operatora. To su tzv. Šredingerova, Hajzenbergova i interakciona (Dirakova) slika.

U Šredingerovoj slici stanja i operatore ćemo obeležiti sa indeksom  $S$ . Stanja u ovoj slici zavise od vremena, a operatori ne nose vremensku evoluciju. Dinamika stanja u Šredingerovoj slici određena je Šredingerovom jednačinom

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle_S}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle_S. \quad (5.1.1)$$

Iz Šredingerove jednačine je

$$|\psi(t)\rangle_S = U_S(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_S \quad (5.1.2)$$

gde je  $U_S(t, t_0)$  evolucionni operator u Šredingerovoj slici. Ako je Hamiltonijan nezavisan od vremena (zatvoren sistem), onda je evolucionni operator dat sa

$$U_S(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \quad (5.1.3)$$

Dalje ćemo razmatrati zatvorene sisteme.

U Hajzenbergovoj slici vektori stanja ne zavise od vremena, dok operatori nose vremensku evoluciju sistema. Vektor stanja u Hajzenbergovoj slici je definisan sa

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_S = e^{iH(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S, \quad (5.1.4)$$

gde je  $t_0$  referentna tačka. Dakle Hajzenbergov vektor stanja se poklapa sa Šredingerovim vektorom stanja u trenutku  $t_0$ . Matrični elementi operatora su isti u obe slike

$${}_S\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = {}_H\langle\psi|O_H(t)|\psi\rangle_H,$$

pa je veza izmedju operatora u Hajzenbergovoj i Šredingerovoj slici data sa

$$O_H(t) = e^{iH(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH(t-t_0)}. \quad (5.1.5)$$

Hamiltonijan celog sistema  $H$  je zbir slobodnog Hamiltonijana  $H_0$  i male perturbacije (interakcioni član)  $H_{\text{int}}$ :

$$H = H_0 + H_{\text{int}}.$$

Operatori u interakcionoj slici se definišu analogno sa operatorima u Hajzenbergovoj slici, samo se umesto  $H$  uzima  $H_0$ :

$$O_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (5.1.6)$$

odnosno

$$O_I(t) = U(t, t_0)O_H(t)U^{-1}(t, t_0), \quad (5.1.7)$$

gde je

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \quad (5.1.8)$$

evolucioni operator, odnosno propagator u interakcionoj slici. Matrični elementi operatora su isti u Šredingerovoj i interakcionoj slici

$${}_S\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = {}_I\langle\psi|O_I(t)|\psi\rangle_I,$$

pa je

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned} &= e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\psi\rangle_H \\ &= U(t, t_0)|\psi\rangle_H. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

U referentnoj tački sve tri slike se poklapaju:

$$\begin{aligned} |\psi(t_0)\rangle_I &= |\psi(t_0)\rangle_S = |\psi\rangle_H \\ O_I(t_0) &= O_H(t_0) = O_S. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Najčešće se uzima da je  $t_0 = 0$ . Iz (5.1.10) sledi

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_I. \quad (5.1.12)$$

Diferenciranjem (5.1.12) po vremenu dobijamo jednačinu kretanja za stanja u interakcionoj slici

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = (H_{int})_I |\psi(t)\rangle_I, \quad (5.1.13)$$

gde je

$$(H_{int})_I = e^{iH_0(t-t_0)} (H_{int}) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (5.1.14)$$

hamiltonijan interakcije u interakcionoj slici. Diferenciranjem (5.1.6) po vremenu dobijamo diferencijalnu jednačinu koju zadovoljavaju operatori u interakcionoj slici

$$i \frac{dO_I(t)}{dt} = [O_I(t), H_0]. \quad (5.1.15)$$

Operatori u interakcionoj slici evoluiraju po slobodnom Hamiltonijanu.

Skalarno polje u Šredingerovoj slici je razvoj po ravnim talasima

$$\phi_S(t_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k}) e^{-iE_k t_0 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{iE_k t_0 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \quad (5.1.16)$$

Odgovarajući operator u Hajzenbergovoj slici<sup>1</sup> je

$$\phi_H(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi_S(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)}. \quad (5.1.17)$$

Hamiltonijan interakcione teorije,  $H$  nije dijagonalan po kreacionim i anihilacionim operatorima, tj. nije oblika (2.1.19). Zbog toga se operator skalarnog polja u Hazenbergovoj slici ne može ergzaktno odrediti. Dakle skalarno polje u Hajzenbergovoj slici sigurno nema oblik (2.1.4). Skalarno polje u interakcionoj slici je dato sa

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi_S(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0(t-t_0)}. \quad (5.1.18)$$

Hamiltonijan slobodne teorije (2.1.19) daje

$$\phi_I(t_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2E_k}} (a(\mathbf{k}) e^{-iE_k x_0 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{iE_k x_0 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \Big|_{x^0=t-t_0}. \quad (5.1.19)$$

Skalarno polje u interakcionoj slici izgleda isto kao u slobodnoj teoriji polja. To je velika prednost interakcione slike.

## 5.2 Dajsonova formula

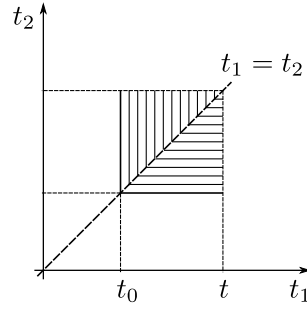
Iz (5.1.13) sledi da evolucionni operator u interakcionoj slici  $U(t, t_0)$  zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = (H_{int})_I(t) U(t, t_0), \quad (5.2.20)$$

---

<sup>1</sup>Često se indeks  $H$  izostavlja.





Slika 5.1: Oblast integracije

i granični uslov  $U(t_0, t_0) = 1$ . Sada ćemo rešiti ovu diferencijalnu jednačinu. Naivno bi bilo očekivati da je rešenje oblika

$$U(t, t_0) = e^{-i(H_{int})_I(t-t_0)} . \quad (5.2.21)$$

Ovo rešenje je pogrešno, jer je hamiltonijan interakcije operator, a ne funkcija. Jednačinu (5.2.20) ćemo prepisati kao integralnu jednačinu

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t (H_{int})_I(t) U(t, t_0) . \quad (5.2.22)$$

Ovu jednačinu ne možemo rešiti egzaktno, već ćemo je rešiti perturbativno. Pretpostavićemo da je hamiltonijan interakcije mali, odnosno da je konstanta interakcije mala. Rešenje je perturbativni razvoj po stepenima konstante interakcije:

$$U(t, t_0) = 1 + U^{(1)}(t, t_0) + U^{(2)}(t, t_0) + \dots , \quad (5.2.23)$$

gde je  $U^{(n)}(t, t_0)$  član  $n$ -tog reda po konstanti interakcije. Zamenom (5.2.23) u (5.2.22) i izjednačavanjem po istim stepenima dobijamo

$$\begin{aligned} U^{(1)}(t, t_0) &= -i \int_{t_0}^t dt_1 (H_{int})_I(t_1) \\ U^{(2)}(t, t_0) &= -i \int_{t_0}^t dt_1 (H_{int})_I(t_1) U^{(1)}(t_1, t_0) \\ &= (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (H_{int})_I(t_1) (H_{int})_I(t_2) . \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Generalno,  $n$ -ti sabirak je

$$U^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n (H_{int})_I(t_1) (H_{int})_I(t_2) \cdots (H_{int})_I(t_n) . \quad (5.2.25)$$

Razmatrajmo sada integral

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (H_{int})_I(t_1) (H_{int})_I(t_2) . \quad (5.2.26)$$

Pri ovoj integraciji je  $t_0 < t_2 < t_1 < t$ , što odgovara 'donjem' trouglu na slici 5.1. Integral  $I_2$  možemo da prepisemo u obliku

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (H_{int})_I(t_1) (H_{int})_I(t_2) \theta(t_1 - t_2) . \quad (5.2.27)$$

Integral

$$I'_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 (H_{int})_I(t_2) (H_{int})_I(t_1) \quad (5.2.28)$$

je dobijen iz  $I_2$  zamenom  $t_1$  i  $t_2$  i jednak je sa njim. Kod ove integracije je  $t_0 < t_1 < t_2 < t$ , što je gornji trougao na slici. Ovaj integral možemo prepisati u obliku

$$I'_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 (H_{int})_I(t_2) (H_{int})_I(t_1) \theta(t_2 - t_1) . \quad (5.2.29)$$

Dakle  $I_2 = I'_2 = \frac{1}{2}(I_2 + I'_2)$ , pa je

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 T(H_{int})_I(t_2) (H_{int})_I(t_1) . \quad (5.2.30)$$

Analogni rezultat važi u svim redovima teorije perturbacije. Prema tome evolucioni operator u interakcionoj slici je

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 (H_{int})_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T(H_{int})_I(t_1) (H_{int})_I(t_2) \\ &+ \dots + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n T(H_{int})_I(t_1) \dots (H_{int})_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Ovaj rezultat ćemo prepisati u sledećem obliku

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t d\tau (H_{int})_I(\tau)} . \quad (5.2.32)$$

Ovaj rezultat je poznat kao Dajsonova formula.

Evolucioni operator  $U(t, t_0)$  dat sa (5.2.32) prevodi stanja interakcione slike od referentne tačke  $t_0$  do trenutka  $t$ . Iz

$$|\psi(t')\rangle_I = U(t', t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (5.2.33)$$

i

$$|\psi(t'')\rangle_I = U(t'', t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (5.2.34)$$

uz  $t'' > t'$  je

$$|\psi(t'')\rangle_I = U(t'', t_0) U^{-1}(t', t_0) |\psi(t')\rangle_I . \quad (5.2.35)$$

Poredjenjem sa

$$|\psi(t'')\rangle_I = U(t'', t') |\psi(t')\rangle_I \quad (5.2.36)$$

vidimo da je evolucionni operator od trenutka  $t'$  do  $t''$  je definisan sa

$$U(t'', t') = U(t'', t_0)U^{-1}(t', t_0) , \quad (5.2.37)$$

odnosno

$$U(t'', t') = e^{iH_0(t''-t_0)} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0(t'-t_0)} . \quad (5.2.38)$$

Osobine evolucionog operatora (za  $t_1 > t_2 > t_3$ ) su:

$$\begin{aligned} 1. \quad & U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \\ 2. \quad & U(t_1, t_2)^{-1} = U(t_2, t_1) . \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Obe osobine trivijalno slede iz oblika evolucionog operatora (5.2.38). Prva osobina je tzv. grupno svojstvo, a druga izražava činjenicu da je evolucionni operator unitaran.

Dajsonova formula za evolucionni operator od  $t'$  do  $t''$  je

$$U(t'', t') = T e^{-i \int_{t'}^{t''} d\tau (H_{\text{int}})_I(\tau)} . \quad (5.2.40)$$

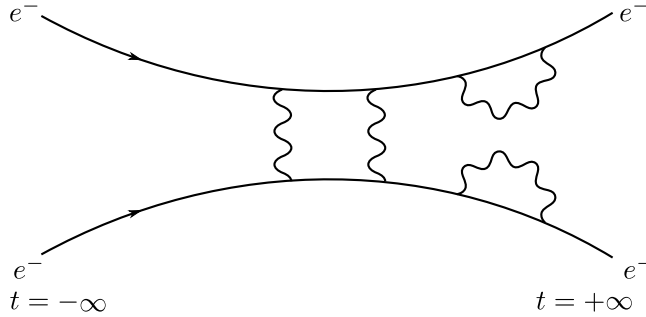
Naglasimo još jednom da je evolucionni operator koji smo ovde analizirali u interakcionoj slici.

## 5.3 S matrica

U procesima rasejanja početno stanje sastoji se od nekoliko čestica koje su skoro slobodne. To stanje je definisano mnogo pre sudara, tj. u dalekoj prošlosti. Ove čestice se sudaraju pri čemu medjusobno interaguju i na kraju procesa dobijamo finalno stanje ponovo sastavljeno od skoro slobodnih čestica u dalekoj budućnosti. U procesima rasejanja određuje se verovatnoća da inicijalna konfiguracija predje u neku finalnu. Finalna konfiguracija je takodje sastavljena od skoro neinteragujućih čestica u dalekoj budućnosti. Pretpostavićemo da je hamiltonijan u dalekoj prošlosti, odnosno budućnosti jednak slobodnom hamiltonijanu, tj. da se interakcija 'isključuje' za  $t \rightarrow \pm\infty$ . To je moguće za kratkodometne interakcije, ali u teoriji polja ovaj zahtev je teško ostvariv. Npr. elektron interaguje sa virtuelnim fotonima i zahvaljujući toj interakciji on ima fizičku masu  $m$ , a ne голу masu  $m_0$ . Gola masa elektrona je polazni parametar koji se nalazi u lagranžijnu. Slično važi i za konstantne interakcije. Npr. golo naelektrisanje elektrona  $e_0$  usled interakcije postaje fizičko naelektrisanje  $e$ . Važna pretpostavka teorije rasejanja je da se hamiltonijan u dalekoj prošlosti i budućnosti redukuje na slobodni, ali sa fizičkim masama i konstantama interakcije. Ova analiza je ilustrovana na slici 5.2. Modifikovaćemo hamiltonijan tako što ćemo njegov interakcioni deo pomnožiti sa damping faktorom

$$H = H_0 + H_{\text{int}} e^{-\epsilon|t|} . \quad (5.3.1)$$

Na ovaj način isključujemo interakciju u dalekoj prošlosti i budućnosti. Takodje, u procesima rasejanja mogu se javiti i vezana stanja. Njih ćemo ignorisati. *In* i *out* stanja su Hajzenbergova svojstvena stanja ukupnog Hamiltonijana  $H$  u dalekoj prošlosti odnosno budućnosti, koja u datim limesima teže stanjima slobodne teorije. To su asimptotska stanja i oni su direktni proizvod



Slika 5.2: Rasejanje dva elektrona.

jednočestičnih stanja. Neka je  $\varphi(0)$  stanje u trenutku  $t = 0$  koje evoluira po 'slobodnom' Hamiltonijanu, dok je  $\psi_{\text{in}}(0)$  stanje kompletnog hamiltonijana  $H$  u trenutku  $t = 0$  koje evoluira po hamiltonijanu  $H$ . Oba ova stanja su dobijena evolucijom iz  $t = -\infty$ :

$$\begin{aligned}\psi_{\text{in}}(0) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} \psi(t) \\ \varphi(0) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iH_0 t} \varphi(t) .\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

Asimptotski uslov

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) \quad (5.3.3)$$

daje

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-iHt} \psi_{\text{in}}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-iH_0 t} \varphi(0) . \quad (5.3.4)$$

Stanja u gornjim izrazima su u Šredingerovoj slici. Uzećemo da je  $t = 0$  trenutak u kome se sve tri slike poklapaju. Onda je in stanje  $\psi_{\text{in}} = \psi_{\text{in}}(0)$  Hajzenbergovo stanje interakcione teorije određeno sa

$$\psi_{\text{in}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \varphi(0) = \Omega_+ \varphi . \quad (5.3.5)$$

$\Omega_+$  je Mollerov operator. Ovaj operator prevodi stanje slobodnog hamiltonijana u odgovarajuće stanje ukupnog Hamiltonijana. Vidimo da je  $\Omega_+ = U(0, -\infty)$ . Slično se definišu i *out* stanja. Iz asimptotskog ponašanja u dalekoj beskonačnosti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iHt} \psi_{\text{out}}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iH_0 t} \varphi(0) \quad (5.3.6)$$

sledi

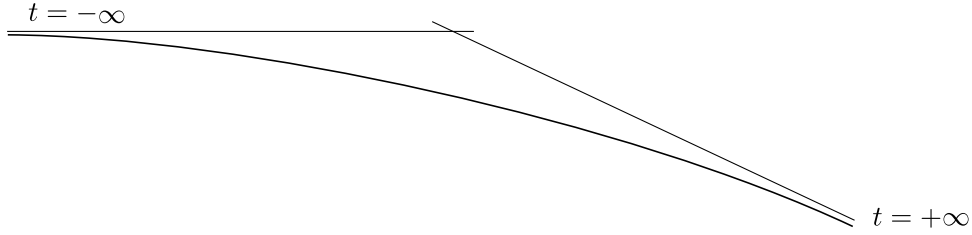
$$\psi_{\text{out}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} \varphi(0) = \Omega_- \varphi , \quad (5.3.7)$$

gde je  $\Omega_- = U(0, \infty)$  Mollerov operator. Dakle

$$\begin{aligned}|\psi_{\alpha}, \text{in}\rangle &= \Omega_+ |\varphi_{\alpha}\rangle \\ |\psi_{\beta}, \text{out}\rangle &= \Omega_- |\varphi_{\beta}\rangle .\end{aligned}\quad (5.3.8)$$

Indeksi  $\alpha$  i  $\beta$  označavaju impulse, projekcije spina i druge kvantne brojeve čestica. Iz (5.2.36) sledi

$$|\psi_{\alpha}(0)\rangle_I = U(0, -\infty) |\psi_{\alpha}(-\infty)\rangle_I . \quad (5.3.9)$$



Slika 5.3: Asimptotska stanja

Sa druge strane je  $|\psi_\alpha, in\rangle = |\psi_\alpha(0)\rangle_I$ , jer se Hajzenbergova i interakciona slika poklapaju u referentnoj tački  $t_0 = 0$ . Odavde se vidi i da je

$$|\psi_\alpha(-\infty)\rangle_I = |\varphi_\alpha\rangle . \quad (5.3.10)$$

Stanja kompletne teorije u interakcionoj slici u dalekoj prošlosti poklapaju se sa odgovarajućim svojstvenim stanjima slobodnog hamiltonijana. Dakle, u procesu rasejanja polazimo od svojstvenih stanja slobodnog hamiltonijana koja evoluiraju i za  $t = 0$  postaju svojstvena in-stanja celog hamiltonijana. In-stanja iako su sastavljena od interagujućih čestica opisana su istim kvantnim brojevima kao i slobodna stanja. Slično važi i za out stanja. Iz

$$|\psi_\beta, out\rangle = \Omega_- |\varphi_\beta\rangle = U(0, \infty) |\varphi_\beta\rangle \quad (5.3.11)$$

sledi

$$|\varphi_\beta\rangle = U(\infty, 0) |\psi_\beta, out\rangle .$$

Iz ovog izraza je

$$\begin{aligned} |\varphi_\beta\rangle &= |\psi_\beta(\infty)\rangle_I \\ |\psi_\beta, out\rangle &= |\psi_\beta(0)\rangle_I . \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

U procesu rasejanja određujemo verovatnoću da in stanje čiji su kvantni brojevi  $\alpha$  predje u out stanje čije smo kvantne brojeve obeležili sa  $\beta$ . Amplitudu prelaza obeležavamo sa  $S_{\beta\alpha}$  i data je sa  $\langle\psi_\beta, out|\psi_\alpha, in\rangle$ . Dalje je

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle\psi_\beta, out|\psi_\alpha, in\rangle = \langle\varphi_\beta|\Omega_-^{-1}\Omega_+|\varphi_\alpha\rangle = \langle\varphi_\beta|U(\infty, 0)U(0, -\infty)|\varphi_\alpha\rangle \\ &= \langle\varphi_\beta|U(\infty, -\infty)|\varphi_\alpha\rangle . \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$S$  matrica je evolucionni operator u interakcionj slici

$$S = U(\infty, -\infty) = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{int}(\varphi_I)} . \quad (5.3.14)$$

$S_{\beta\alpha}$  je matrični element  $S$  matrice, tj.

$$S_{\beta\alpha} = \langle\varphi_\beta|S|\varphi_\alpha\rangle .$$

Interakciona slika je pogodna, jer u njoj polja zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja.

$S$  matrica je unitarna i invarijantna na Lorencove transformacije.

## 5.4 Vikova teorema

Neka je  $\phi(x)$  slobodno skalarno polje. Razložimo ga na pozitivno i negativno frekventni deo

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) . \quad (5.4.15)$$

Normalno uredjenje proizvoda dva operatora je

$$\begin{aligned} : \phi(x)\phi(y) : &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \\ &= \phi(x)\phi(y) - [\phi^+(x), \phi^-(y)] . \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Već smo u drugoj glavi rekli da je

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle ,$$

pa je

$$\phi(x)\phi(y) = : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle . \quad (5.4.17)$$

Primenom (5.4.17) imamo

$$\begin{aligned} T\phi(x)\phi(y) &= \phi(x)\phi(y)\theta(x^0 - y^0) + \phi(y)\phi(x)\theta(y^0 - x^0) \\ &= : \phi(x)\phi(y) : \theta(x^0 - y^0) + : \phi(y)\phi(x) : \theta(y^0 - x^0) + \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \\ &= : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Kontraktija polja se definiše kao razlika vremenskog i normalnog uredjenja, tj.

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = T\phi(x)\phi(y) - : \phi(x)\phi(y) :$$

Odmah je jasno da je

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} = \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle .$$

Gornji rezultati se lako generališu na proizvod više skalarnih polja

$$T\phi(x_1)\dots\phi(x_n) = : \phi(x_1)\dots\phi(x_n) : + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)} + \text{sve kontrakcije} . \quad (5.4.19)$$

Rezultat (5.4.19) je Vikova teorema. Primenom Vikove teoreme odredimo vremensko uredjenje četiri skalarna polja:

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &\quad + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &\quad + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &\quad + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &\quad + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} \\ &\quad + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)} : . \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Ako od prethodnog izraza uzmemo vakuumsku očekivanu vrednost dobijamo

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle &= \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_2)\phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_4)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle . \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Izraz

$$G^{(4)}(x_1, \dots, x_4) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle$$

sa naziva 4–tačkasta Grinova funkcija<sup>2</sup> i izrazili smo je preko Fajnmanovog propagatora, odnosno 2–tačkaste Grinove funkcije. Sasvim generalno,  $n$ –tačkasta Grinova funkcija (ili korelaciona funkcija) je definisana sa

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle .$$

Sada ćemo formulirati Vikovu teoremu za fermione. Neka su  $F_1$  i  $F_2$  slobodna fermionska polja, npr. Dirakova polja  $\psi, \bar{\psi}$ . Normalno uredjenje dva fermionska polja je

$$\begin{aligned} : F_1(x)F_2(y) : &= F_1^+(x)F_2^+(y) - F_2^-(y)F_1^+(x) + F_1^-(x)F_2^+(y) + F_1^-(x)F_2^-(y) \\ &= F_1(x)F_2(y) - \{F_1^+(x), F_2^-(y)\} . \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Lako se vidi da je

$$\{F_1^+(x), F_2^-(y)\} = \langle 0|F_1(x)F_2(y)|0\rangle .$$

Ova relacija se proverava neposrednim računom. Npr.

$$\{\psi_a^+(x), \bar{\psi}_b^-(y)\} = \langle 0|\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle .$$

Dakle

$$F_1(x)F_2(y) = : F_1(x)F_2(y) : + \langle 0|F_1(x)F_2(y)|0\rangle . \quad (5.4.23)$$

Primenom ove relacije dva puta dobijamo

$$TF_1(x)F_2(y) = : F_1(x)F_2(y) : + \langle 0|TF_1(x)F_2(y)|0\rangle . \quad (5.4.24)$$

Kontraktcija se definiše kao razlika vremenskog i normalnog uredjenja dva polja

$$\begin{aligned} \overline{F_1(x)F_2(y)} &= TF_1(x)F_2(y) - : F_1(x)F_2(y) : \\ &= \langle 0|TF_1(x)F_2(y)|0\rangle . \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Konkretno je

$$\begin{aligned} \overline{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)} &= \langle 0|T\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)|0\rangle = iS_{Fab}(x-y) \\ \overline{\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y)} &= -\overline{\psi_b(y)\bar{\psi}_a(x)} = -iS_{Fba}(y-x) \\ \overline{\psi_a(x)\psi_b(y)} &= 0 \\ \overline{\bar{\psi}_a(x)\bar{\psi}_b(y)} &= 0 . \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

---

<sup>2</sup>4-point Green function

Vikova teorema za fermione je ista kao kod bozona, s tim što se vodi računa da fermionska polja antikomutiraju. Sledeći primer ilustruje Vikovu teoremu za fermione:

$$\begin{aligned}
T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4) &= : \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)} + \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)} \\
&\quad - \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_c(x_3)\bar{\psi}_b(x_2)\psi_d(x_4)} - \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_c(x_3)\bar{\psi}_b(x_2)\psi_d(x_4)} \\
&\quad + \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)} + \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)} \\
&\quad - \overbrace{\psi_a(x_1)\bar{\psi}_c(x_3)\bar{\psi}_b(x_2)\psi_d(x_4)} : . \tag{5.4.27}
\end{aligned}$$

Uzimanjem vakuumske očekivane vrednosti ovog izraza dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)|0\rangle &= \langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_b(x_2)|0\rangle \langle 0|T\bar{\psi}_c(x_3)\psi_d(x_4)|0\rangle \\
&\quad - \langle 0|T\psi_a(x_1)\bar{\psi}_c(x_3)|0\rangle \langle 0|T\bar{\psi}_b(x_2)\psi_d(x_4)|0\rangle . \tag{5.4.28}
\end{aligned}$$

Kontrakcija za elektromagnetno polje definiše se analogno

$$\begin{aligned}
\overline{A^\mu(x)A^\nu(y)} &= TA^\mu(x)A^\nu(y) - : A^\mu(x)A^\nu(y) : \\
&= \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle . \tag{5.4.29}
\end{aligned}$$



# Glava 6

## Kvantna elektrodinamika

### 6.1 $S$ matrica u QED

Elektromagnetna interakcija izmedju fotona i Dirakovog elektrona opisana je gustinom lagranžijana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\not{A}\psi . \quad (6.1.1)$$

Gornjem lagranžijanu ćemo dodati član koji fiksira kalibracionu simetriju o čemu smo govorili u glavi posvećenoj kvantizaciji elektromagnetnog polja. Gustina lagranžijana je onda data sa

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 , \quad (6.1.2)$$

gde je  $\lambda$  parametar. Amplitude prelaza u QED ne zavise od izbora parametra  $\lambda$ . Najčešće se uzima da je  $\lambda = 1$ , što ćemo mi koristiti u nastavku ove glave. Generalisani impulsi su isti kao u slobodnoj teoriji:  $\pi_\psi = i\psi^\dagger$ ,  $\pi_{\bar{\psi}} = 0$ ,  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$ . Hamiltonijan interakcije je onda dat sa

$$H_{\text{int}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{int}} = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}} = -e \int d^3x \bar{\psi}\not{A}\psi . \quad (6.1.3)$$

Dirakovo i elektromagnetno polje u izrazu za hamiltonijan su u Hajzenbergovoj slici. Hamiltonijan interakcije u interakcionoj slici je

$$(H_{\text{int}})_I = (-e)U(t, t_0) \int d^3x \bar{\psi}\not{A}\psi U^{-1}(t, t_0) ,$$

gde je  $U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$ . Umetanjem  $UU^{-1}$  izmedju polja  $\bar{\psi}$  i  $A^\mu$ , odnosno  $A^\mu$  i  $\psi$  dobijamo

$$(H_{\text{int}})_I = -e \int d^3x \bar{\psi}_I \not{A}_I \psi_I . \quad (6.1.4)$$

$S$ - matrica u interakcionoj slici je

$$S = T e^{ie \int d^4x \bar{\psi}_I \not{A}_I \psi_I} . \quad (6.1.5)$$

Polja u izrazu za  $S$  matricu su u interakcionoj slici, i ona kao što smo ranije pokazali zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja. Zbog toga, pri računjanju  $S$  matrice možemo da primenjujemo Vikovu teoremu. Amplituda prelaza iz stanja  $|\psi_\alpha, in\rangle$  u stanje  $|\psi_\beta, out\rangle$  je

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle \psi_\beta, out | \psi_\alpha, in \rangle = \langle \varphi_\beta | S | \varphi_\alpha, \rangle \\ &= {}_I \langle \psi_\beta(\infty) | S | \psi_\alpha(\infty) \rangle_I . \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

U daljem izlaganju ćemo izostaviti oznaku  $I$  na poljima.

U ovoj glavi ćemo koristiti tzv. box-normalizaciju. U ovoj normalizaciji polja zadovoljavaju periodične uslove, tj. ona su periodična po prostornim koordinatama sa periodima  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  duž  $x$ ,  $y$  odnosno  $z$  ose. Npr. skalarno polje zadovoljava uslove

$$\begin{aligned} \phi(x + L_1, y, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y + L_2, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y, z + L_3) &= \phi(x, y, z) . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Analogne relacije važe za druga polja. Periodični granični uslovi diskretizuju impuls, tj. impuls postaje

$$\mathbf{k} = 2\pi \left( \frac{n_1}{L_1} \frac{n_2}{L_2} \frac{n_3}{L_3} \right) , \quad (6.1.8)$$

gde su  $n_1, n_2$  i  $n_3$  celi brojevi. Integral po impulsima moramo zameniti sumom

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} . \quad (6.1.9)$$

Takodje integral

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6.1.10)$$

prelazi u

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \int_0^{L_1} dx e^{i\frac{2\pi}{L_1}(n_1-n_1')x} \dots = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} . \quad (6.1.11)$$

Poredeći ova dva integrala vidimo da delta funkcija po impulsima prelazi, ukoliko diskretizujemo impulse, u Kronekerovu deltu:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rightarrow (2\pi)^3 V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} . \quad (6.1.12)$$

Ova prelazak je dimenziono ispravan, jer je dimenzija delta funkcije  $L^3$ . Komutacione relacije, u kontinualnoj normalizaciji imaju oblik (2.1.14). Da bismo zadržali analogni oblik komutacionih relacija, tj.

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p})] = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \quad (6.1.13)$$

moramo pri prelazu sa kontinualne na box normalizaciju anihilacione i kreacione operatore zameniti prema

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &\rightarrow (2\pi)^3 V a(\mathbf{k}) \\ a^\dagger(\mathbf{k}) &\rightarrow (2\pi)^3 V a^\dagger(\mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Prelazak sa kontinualnog na diskretni impuls u izrazima za razvoj polja po ravnim talasima efektivno se svodi na zamenu

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} . \quad (6.1.15)$$

Razvoj polja po ravnim talasima u interakcionoj slici je

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left( u_r(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + v_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right) , \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left( \bar{u}_r(\mathbf{p}) c_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \bar{v}_r(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right) , \\ A^\mu(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{p}|}} \left( a_\lambda(\mathbf{p}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right) . \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

## 6.2 Prvi red teorije perturbacije

$S$  matrica u prvom redu teorije perturbacije u QED je

$$S^{(1)} = ie \int d^4x T \bar{\psi} A \psi . \quad (6.2.17)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\psi}_a(x) \gamma_{ab}^\mu \psi_b(x)} &= -i S_{Fba}(0) \gamma_{ab}^\mu = -i \text{tr}(S_F(0) \gamma^\mu) \\ &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}((\not{p} + m) \gamma^\mu)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = 0 . \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Dakle kontrakcija izmedju polja  $\bar{\psi}(x)$  i  $\psi(x)$  u istoj tački je jednaka nuli, pa je

$$T \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) =: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : . \quad (6.2.19)$$

Polja u  $\bar{\psi} A \psi$  se jedino mogu kontrahovati sa stanjima. Razmatrajmo proces

$$e^-(\mathbf{p}_1, r_1) + e^+(\mathbf{p}_2, r_2) \rightarrow \gamma(\mathbf{k}, \lambda) . \quad (6.2.20)$$

$S$  matricni element za ovaj proces u prvom redu teorije perturbacije je

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= ie \langle \gamma(\mathbf{k}, \lambda) | \int d^4x : \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : | e^-(\mathbf{p}_1, r_1) e^+(\mathbf{p}_2, r_2) \rangle \\ &= ie \int d^4x \langle 0 | a_\lambda(\mathbf{k}) : \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) d_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

Dirakovo polje  $\psi(x)$  sadrži operatore anihilacije elektrona  $c$  i kreacije pozitrona  $d^\dagger$ . Nenulti doprinos u izrazu (6.2.21) daje samo deo proporcionalan sa anihilacionim elektronskim operatorima,

tj. pozitivno frekventni deo operatora  $\psi(x)$ . Analogno zaključujemo da negativno frekventni delovi fotonskog polja i polja  $\bar{\psi}$  su relevantni za ovaj matrični element. Dakle

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= ie \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}'} \sum_{s_1, s_2, \lambda'} \sqrt{\frac{m}{VE_{q_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{q_2}}} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}'|}} \int d^4x e^{-i(q_2+q_1-k')\cdot x} \\
&\times \langle 0 | a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') d_{s_1}(\mathbf{q}_1) c_{s_2}(\mathbf{q}_2) c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) d_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\
&\times \bar{v}_{s_1}(\mathbf{q}_1) \gamma_\mu u_{s_2}(\mathbf{q}_2) \epsilon_{\lambda'}^{\mu*}(\mathbf{k}') .
\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

Primenom komutacionih, odnosno antikomutacionih relacija imamo

$$\langle 0 | a_\lambda(\mathbf{k}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') d_{s_1}(\mathbf{q}_1) c_{s_2}(\mathbf{q}_2) c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) d_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{s_2 r_1} \delta_{s_1 r_2} \delta_{\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1} \delta_{\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} . \tag{6.2.23}$$

Integracijom po  $x$  i primenom (6.2.23) dobijamo

$$S_{\alpha\beta} = ie (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k) \sqrt{\frac{m}{VE_{p_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p_2}}} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \bar{v}_{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu u_{r_1}(\mathbf{p}_1) \epsilon_\lambda^{\mu*}(\mathbf{k}) . \tag{6.2.24}$$

Delta funkcija u izrazu za amplitudu prelaza nameće uslov  $p_1 + p_2 = k$ , što je zakon održanja četvoimpulsa. Kvadriranjem  $p_1 = k - p_2$  dobijamo  $2k \cdot p_2 = 0$ . Kako je  $k^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$  i  $p_2^\mu = (E_{p_2}, \mathbf{p}_2)$  dobijamo

$$\cos \theta = \frac{E_{p_2}}{|\mathbf{p}_2|} > 1 ,$$

gde je  $\theta$  ugao između  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{p}_2$ . Medjutim ovaj izraz je nemoguć. Dakle  $S$  matrični element u prvom redu teorije perturbacije je jednak nuli kao posledica zakona održanja energije i impulsa. Na osnovu prethodnog računa jasno je da se Dirakova polja  $\psi(x)$ , odnosno  $\bar{\psi}(x)$  'kontrakuju' sa stanjima  $|e^-(\mathbf{p}_1, r_2)\rangle$ , odnosno  $|e^+(\mathbf{p}_2, r_2)\rangle$ . Formalno možemo da definišemo kontrakcije polja sa stanjima. Počnimo od kontrakcije polja  $\psi(x)$  sa elektronskim ket-stanjem. Samo pozitivno frekventni deo operatora  $\psi(x)$  je relevantan za definiciju ove kontrakcije, tj.

$$\begin{aligned}
\overline{\psi(x) | e^-(\mathbf{q}, s) \rangle} &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u_r(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} c_s^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} | 0 \rangle \\
&= \sqrt{\frac{m}{VE_q}} u_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} | 0 \rangle .
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

Analogno se definišu i ostale kontrakcije polja sa stanjima u *QED*:

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(x)|e^+(\mathbf{p}, r)\rangle &= \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}|0\rangle, \\
\psi(x)|e^+(\mathbf{p}, r)\rangle &= 0, \\
\overline{\psi}(x)|e^-(\mathbf{p}, r)\rangle &= 0, \\
\langle e^-(\mathbf{p}, r)|\psi(x) &= \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\bar{u}_r(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\langle 0|, \\
\langle e^+(\mathbf{p}, r)|\psi(x) &= \sqrt{\frac{m}{VE_p}}v_r(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\langle 0|, \\
\langle e^-(\mathbf{p}, r)|\psi(x) &= 0, \\
\langle e^+(\mathbf{p}, r)|\psi(x) &= 0, \\
\overline{A}^\mu(x)|\gamma(\mathbf{k}, \lambda)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}}\epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x}|0\rangle, \\
\langle\gamma(\mathbf{k}, \lambda)|A^\mu(x)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}}\epsilon_\lambda^{*\mu}(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}\langle 0|. \tag{6.2.26}
\end{aligned}$$

Napomenimo da uvođenje kontrakcija polja sa stanjima znatno pojednostavljuje izračunavanje amplituda prelaza. Međutim, mi možemo svaki put i direktno proveriti ovaj rezultat.

## 6.3 Drugi red teorije perturbacije

Matrica rasejanja u drugom redu teorije perturbacije u *QED* je

$$S^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y T(\bar{\psi}A\psi)_x(\bar{\psi}A\psi)_y. \tag{6.3.27}$$

Primenom Vikove teoreme<sup>1</sup> dobijamo

$$S^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y : (\bar{\psi}A\psi)_x(\bar{\psi}A\psi)_y : + : \text{sve kontrakcije} : . \tag{6.3.28}$$

U daljem ćemo analizirati nekoliko procesa, na osnovu kojih ćemo izvesti Fanjnmanova pravila.

### 6.3.1 Molerovo rasejanje

Molerovo rasejanje je proces je elastično rasejanje dva elektrona, tj. početno i finalno stanje u procesu su dva elektrona:

$$e^-(p_1, r_1) + e^-(p_2, r_2) \rightarrow e^-(p'_1, r'_1) + e^-(p'_2, r'_2). \tag{6.3.29}$$

<sup>1</sup>Naglasimo još jednom da su sva polja u interakcionoj slici.

Matrični element za ovaj proces je

$$S_{\beta\alpha} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle e^-(\mathbf{p}'_1, r'_1) e^-(\mathbf{p}'_2, r'_2) | T(\bar{\psi} A \psi)_x (\bar{\psi} A \psi)_y | e^-(\mathbf{p}_1, r_1) e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \rangle . \quad (6.3.30)$$

Inicijalno i finalno stanje sadrže po dva elektrona, što znači da se četiri Dirakova polja moraju kontrahovati sa ovim stanjima, a fotonska polja se kontrahuju međusobno i tako dobijamo fotonski propagator, tj.

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2} \sum_{s_1, s_2, s'_1, s'_2} e^{ik'_1 \cdot x - ik'_2 \cdot x + ik_1 \cdot y - ik_2 \cdot y} \\ &\times \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) \sqrt{\frac{m}{VE_{k_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k_2}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k'_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k'_2}}} \\ &\times \bar{u}_{s'_1}(\mathbf{k}'_1) \gamma^\mu u_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) \bar{u}_{s_1}(\mathbf{k}_1) \gamma^\nu u_{s_2}(\mathbf{k}_2) \\ &\times \langle 0 | c_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) c_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) : c_{s'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) c_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) c_{s_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) c_{s_2}(\mathbf{k}_2) : c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

Zamenom fotonskog propagatora u Fajmanovoj kalibraciji<sup>2</sup>

$$\overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} , \quad (6.3.32)$$

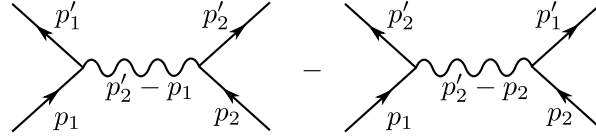
i nakon integracije po  $x$  i  $y$  dobijamo

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \frac{(ie)^2}{2} (2\pi)^4 \int d^4q \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2} \sum_{s_1, s_2, s'_1, s'_2} \delta^{(4)}(k'_1 - k'_2 - q) \delta^{(4)}(k_1 - k_2 + q) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \\ &\sqrt{\frac{m}{VE_{k_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k_2}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k'_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{k'_2}}} \bar{u}_{s'_1}(\mathbf{k}'_1) \gamma^\mu u_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) \bar{u}_{s_1}(\mathbf{k}_1) \gamma^\nu u_{s_2}(\mathbf{k}_2) \\ &\times \langle 0 | c_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) c_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) : c_{s'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) c_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) c_{s_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) c_{s_2}(\mathbf{k}_2) : c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

Vakuumska očekivana vrednost u izrazu (6.3.33) se računa primenom antikomutacionih relacija:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | c_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) c_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) : c_{s'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) c_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) c_{s_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) c_{s_2}(\mathbf{k}_2) : c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | c_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) c_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) c_{s'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) c_{s_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) c_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) c_{s_2}(\mathbf{k}_2) c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | c_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) [\delta_{\mathbf{k}'_1, \mathbf{p}'_2} \delta_{s'_1, r'_2} - c_{s'_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) c_{r'_2}(\mathbf{p}'_2)] \\ &\times c_{s_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) c_{s'_2}(\mathbf{k}'_2) [\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1} \delta_{r_1, s_2} - c_{r_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) c_{s_2}(\mathbf{k}_2)] c_{r_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle \\ &= -[\delta_{\mathbf{k}'_1, \mathbf{p}'_2} \delta_{s'_1, r'_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{p}'_1} \delta_{s_1, r'_1} - \delta_{\mathbf{k}'_1, \mathbf{p}'_1} \delta_{s'_1, r'_1} \delta_{\mathbf{p}'_2, \mathbf{k}_1} \delta_{s_1, r'_2}] \\ &\times [\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{p}_1} \delta_{r_1, s_2} \delta_{\mathbf{k}'_2, \mathbf{p}_2} \delta_{r_2, s'_2} - \delta_{\mathbf{k}'_2, \mathbf{p}_1} \delta_{s'_2, r_1} \delta_{\mathbf{p}_2, \mathbf{k}_2} \delta_{s_2, r_2}] . \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

<sup>2</sup>S-matrični elementi ne zavise od vrednosti  $\lambda$ .



Slika 6.1: Fajnmanovi dijagrami za Molerovo rasejane.

Zamenom (6.3.34) u (6.3.33) dobijamo

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{m}{VE_{p_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p_2}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'_2}}} \\
& (ie)^2 \left( \frac{-i}{(p'_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\mu u_{r_1}(\mathbf{p}_1) \bar{u}_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\mathbf{p}_2) \right. \\
& \left. - \frac{-i}{(p'_2 - p_2)^2 + i\epsilon} \bar{u}_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\mu u_{r_2}(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) \gamma_\mu u_{r_1}(\mathbf{p}_1) \right). \quad (6.3.35)
\end{aligned}$$

Amplituda prelaza je antisimetrična pri zameni bilo finalnih bilo inicijalnih čestica. To je posledica činjenice da su ova stanja sastavljena od dva fermiona. Dobijeni izraz za  $S$  matični element ima oblik

$$S_{\beta\alpha} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{m}{VE_{p_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p_2}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'_1}}} \sqrt{\frac{m}{VE_{p'_2}}} i\mathcal{M}, \quad (6.3.36)$$

gde je

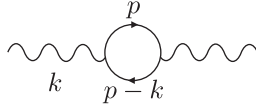
$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} &= (ie)^2 \left( \frac{-i}{(p'_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \bar{u}_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\mu u_{r_1}(\mathbf{p}_1) \bar{u}_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) \gamma_\mu u_{r_2}(\mathbf{p}_2) \right. \\
& \left. - \frac{-i}{(p'_2 - p_2)^2 + i\epsilon} \bar{u}_{r'_2}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\mu u_{r_2}(\mathbf{p}_2) \bar{u}_{r'_1}(\mathbf{p}'_1) \gamma_\mu u_{r_1}(\mathbf{p}_1) \right) \quad (6.3.37)
\end{aligned}$$

Fajnmanova amplituda. Odgovarajući Fajnmanovi dijagrami su prikazani na slici 6.1. Oba dijagrama sadrže dva verteksa, jer se radi o drugom redu teorije perturbacije. Spoljašnje linije ovog dijagrama su elektronske, a unutrašnja linija je fotonski propagator.

### 6.3.2 Polarizacija vakuma

U ovom paragrafu analiziraćemo proces  $\gamma \rightarrow \gamma$  u drugom redu teorije perturbacije. Inicijalno stanje je foton impulsa  $\mathbf{k}$  i polarizacije  $\lambda$ , tj.  $|\gamma(\mathbf{k}, \lambda)\rangle$ . Finalni foton ima impuls  $\mathbf{k}'$  i polarizaciju  $\lambda'$ , tj. finalno stanje je  $|\gamma(\mathbf{k}', \lambda')\rangle$ . Postoje dva ekvivalentna načina da se izvrše kontrakcije za ovaj proces. Amplituda prelaza je

$$S_{\beta\alpha} = 2 \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle \gamma(\mathbf{k}', \lambda') | : (\bar{\psi}_a A_\mu \gamma_{ab}^\mu \psi_b)_{x_1} (\bar{\psi}_c A_\nu \gamma_{cd}^\nu \psi_d)_{x_2} : | \gamma(\mathbf{k}, \lambda) \rangle. \quad (6.3.38)$$



Slika 6.2: Polarizacija vakuuma.

Zamenom eksplicitnog oblika za kontrakciju dolazimo do

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= (ie)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \epsilon_{\lambda'\mu}^{*\mu}(\mathbf{k}') \epsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{k}) e^{ik' \cdot x_1 - ik \cdot x_2} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}'|}} \\
&\quad \times iS_{Fbc}(x_1 - x_2) (-i)S_{Fda}(x_2 - x_1) \gamma_{\mu ab} \gamma_{\nu cd} \\
&= -(ie)^2 \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}'|}} \epsilon_{\lambda'\mu}^{*\mu}(\mathbf{k}') \epsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{k}) \int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{ik' \cdot x_1 - ik \cdot x_2} \\
&\quad \times \text{tr}(iS_F(x_1 - x_2) \gamma_{\nu} iS_F(x_2 - x_1) \gamma_{\mu}) .
\end{aligned} \tag{6.3.39}$$

Sledeći korak je prelazak u impulsni prostor. Zamenom izraza za propagator (3.9.83) i integracijom po koordinatama  $x_1$  i  $x_2$  dobijamo

$$S_{\beta\alpha} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - k') \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}'|}} (i\mathcal{M}) , \tag{6.3.40}$$

gde je Fajnmanova amplituda data sa

$$i\mathcal{M} = \epsilon_{\lambda'\mu}^{*\mu}(\mathbf{k}') \epsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{k}) (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-\text{tr}[(\not{p} + m) \gamma_{\nu} (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_{\mu}]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)} . \tag{6.3.41}$$

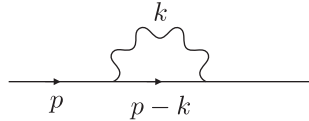
Izraz za Fajnmanovu amplitudu sadrži nekoliko faktora. Spoljašnje fotonske linije su polarizacioni vektori inicijalnog  $\epsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{k})$ , odnosno finalnog fotona  $\epsilon_{\lambda'\mu}^{*\mu}(\mathbf{k}')$ . U Fajnmanovoj amplitudi (6.3.41) integrali se po neodređenom impulsu  $p$  u fermionskoj petlji. Pored toga amplituda sadrži trag i znak minus. To je opšte pravilo za fermionsku petlju u Fajnmanovom dijagramu. Integral po četvoimpulsu u izrazu za amplitudu je beskonačan zbog ponašanja podintegralne funkcije na visokim impulsima. Ovo dovodi u pitanje perturbativni račun, jer dijagrami višeg reda postaju divergentni. Međutim, na sreću, postoji način kako da se ove divergencije uklone i spase perturbativni prilaz QED. Dijagram je prikazan na slici 6.2. Deo ovog dijagrama bez spoljašnjih linija naziva se polarizacijom vakuuma.

### 6.3.3 Sopstvena energija elektrona

Razmatrajmo proces  $e^{-}(\mathbf{p}, r) \rightarrow e^{-}(\mathbf{p}', r')$  u drugom redu teorije perturbacije. Amplituda prelaza je

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha} &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x \int d^4y \left( \langle e^{-}(\mathbf{p}, r) | : (\overbrace{\psi_a \gamma_{ab}^{\mu} A_{\mu} \psi_b}_x \overbrace{\psi_c \gamma_{cd}^{\nu} A_{\nu} \psi_d}_y) : | e^{-}(\mathbf{p}', r') \rangle \right) \\
&\quad + \langle e^{-}(\mathbf{p}, r) | : (\overbrace{\psi_a \gamma_{ab}^{\mu} A_{\mu} \psi_b}_x \overbrace{\psi_c \gamma_{cd}^{\nu} A_{\nu} \psi_d}_y) : | e^{-}(\mathbf{p}', r') \rangle \rangle .
\end{aligned} \tag{6.3.42}$$





Slika 6.3: Sopstvena energija elektrona.

Ova dva člana su jednaka pa je amplituda prelaza data sa

$$S_{\beta\alpha} = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sqrt{\frac{m}{VE'}} (ie)^2 \int d^4x d^4y \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu iS_F(x-y) \gamma^\nu u(\mathbf{p}, r) iD_{\mu\nu}(x-y) e^{ip' \cdot x - ip \cdot y} . \quad (6.3.43)$$

Prelazak na impulsni prostor je pravolinijski. Potrebno je da propagatore izrazimo kao integrale četvoimpulsa. Tako dobijamo

$$S_{\beta\alpha} = \sqrt{\frac{m}{VE}} \sqrt{\frac{m}{VE'}} (ie)^2 \int d^4x d^4y \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} e^{ip' \cdot x - ip \cdot y - iq \cdot (x-y) - ik \cdot (x-y)} \\ \times \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu u(\mathbf{p}, r)}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)} . \quad (6.3.44)$$

Integracija po koordinatama  $x$  i  $y$  daje

$$S_{\beta\alpha} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \sqrt{\frac{m}{VE}} \sqrt{\frac{m}{VE'}} (i\mathcal{M}) , \quad (6.3.45)$$

gde je

$$i\mathcal{M} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu u(\mathbf{p}, r)}{((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)} . \quad (6.3.46)$$

Fajnmanov dijagram je prikazan na slici 6.3. Na ovom dijagramu imamo dve spoljašnje linije koje odgovaraju ulaznom i finalnom elektronu, kao i dve unutrašnje linije koje odgovaraju virtuelnom fotonu i elektronu. Po neodređenom impulsu  $k$  se integrali u petlji. Ovaj dijagram ali bez spoljnjih linija naziva se sopstvenom energijom elektrona. Ovaj dijagram je logaritamski divergant.

## 6.4 Fajnmanova pravila u QED

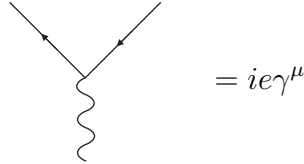
Na osnovu nekoliko procesa koje smo razmatrali u prethodna dva poglavlja možemo da zaključimo da amplituda prelaza u Kvantnoj elektrodinamici ima oblik

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \prod_i \frac{1}{\sqrt{2VE_i}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2VE'_f}} \prod_l \sqrt{2m_l} i\mathcal{M} . \quad (6.4.47)$$

Sa  $i$  smo obeležili upadne, a sa  $f$  finalne čestice u procesu. Ukupni impuls upadnih, odnosno finalnih čestica u procesu je  $P_i$ , odnosno  $P_f$ . Ova dva impulsa su jednaka, zbog zakona održanja energije i impulsa. Delta funkcija u izrazu (6.4.47) je posledica zakona održanja četvoimpulsa.

Sledeći faktori u izrazu za amplitudu prelaza su normalizacioni faktori. Normalizacija koju smo koristili za bozone i fermione se razlikuju za član  $\sqrt{2m_l}$  gde je  $m_l$  masa odgovarajućeg fermiona. Indeks  $l$  dakle prebrojava fermione (elektron, mion, taon, kvarkove). Poslednji činilac,  $i\mathcal{M}$  u izrazu (6.4.47) je Fajnmanova amplituda. Ona se dobija na osnovu sledećih pravila:

- o Vertex:



$$= ie\gamma^\mu$$

- o Fotonski i Dirakov propagator:

$$iD_{F\mu\nu} = \mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon},$$

$$iS_F(p) = \text{---} \text{straight line} \text{---} = \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}.$$

- o Spoljašnje linije:

a) leptoni (npr. elektron):  $\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = u(p, s)$  inicijalni  
 $\text{---} \xleftarrow{p} \text{---} = \bar{u}(p, s)$  finalni

b) antileptoni (npr. pozitron):  $\text{---} \xleftarrow{p} \text{---} = v(p, s)$  finalni  
 $\text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \bar{v}(p, s)$  inicijalni

c) fotoni:  $\text{---} \text{wavy line} \text{---} \mu = \varepsilon_\mu(k, \lambda)$  inicijalni  
 $\mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda)$  finalni

- o Spinorski faktori se pišu sa leva na desno duž fermionske linije. Ovaj red pisanja fermionskih faktora je važan jer su faktori matrice.
- o Za svaku petlju (loop) sa impulsom  $k$ , integralinomo po tom impulsu,  $\int d^4k/(2\pi)^4$ . Ovo pravilo odgovara kvantno mehaničkom sabiranju amplituda.
- o Za svaku fermionsku petlju pored integracije po imulsu dodajemo trag i znak minus.
- o Dva dijagrama kod koji se razlikuju po zameni dva fermiona moraju se razlikovati za znak minus.

Napomenimo na kraju da u svakom verteksu važi zakon održanja četvoroimpulsa. Pri tome četvoroimuls antičestica je suprotno usmeren od odgovarajuće strelice na fermionskoj liniji. Ovo važi za spoljašnje linije dijagrama.

Generalno,  $S$  matrica je oblika  $S = 1 + iT$ , gde je  $T$  tzv. transfer matrica.

## 6.5 Presek za rasejanje

Razmatrajmo proces u kome se sudaraju dve čestice čiji su impulsi  $\mathbf{p}_1$  i  $\mathbf{p}_2$ , a mase  $m_1$  odnosno  $m_2$ . Neka u procesu nastaje nekoliko čestica impulsa  $\mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N$  i energija  $E'_1, \dots, E'_N$ . Njihove mase su takodje poznate. Ukupan impuls čestica pre rasejanja je  $P_i = P_1 + P_2$ , a posle  $P_f = P'_1 + \dots + P'_N$ .

Amplituda prelaza je data sa (6.4.47), pri čemu ćemo ignorisati jediničnu matricu u ovom izrazu. Pri izračunavanju verovatnoće prelaza potreban je da nadjemo kvadrat delta funkcije. Sa  $T$  ćemo obeležiti vreme reakcije, a sa  $V$  zapreminu prostora. Kvadrat delta funkcije je

$$\begin{aligned} [\delta^{(4)}(P_f - P_i)]^2 &= \delta^{(4)}(P_f - P_i)\delta^{(4)}(0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(P_f - P_i) \int_V d^3x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \\ &= \frac{TV}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(P_f - P_i) . \end{aligned} \quad (6.5.48)$$

Verovatnoća prelaza u jedinici vremena jednaka je kvadratu amplitude prelaza u jedinici vremena, tj.

$$\omega = \frac{|S_{fi} - \delta_{fi}|^2}{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - P_f) V \prod_i \frac{1}{2VE_i} \prod_f \frac{1}{2VE'_f} \prod_l 2m_l |i\mathcal{M}|^2 . \quad (6.5.49)$$

Izraz (6.5.49) je verovatnoća prelaza u jedinici vremena u tačno definisano stanje. Medjutim, detektori ne mere tačno određene impulse čestica. Finalno stanje je grupa fizičkih stanja čiji su impulsi u intervalu  $(\mathbf{p}'_f, \mathbf{p}'_f + d^3p'_f)$ . Broj ovih stanja je

$$\prod_f \frac{V d^3p'_f}{(2\pi)^3} . \quad (6.5.50)$$

Vidimo da je to integral po faznom prostoru finalnih čestica.

Presek za rasejanje predstavlja količnik broja rasejanih čestica u jedinici vremena i broja upadnih čestica po jedinici vremena i po jedinici površine normalnoj na pravac kretanja upadnih čestica. Presek za rasejanje se takodje obračunava po broju centara rasejanja i po jediničnom fluksu upadnih čestica. Broj centara rasejanja u zapremini  $V$  je jedan u skladu sa našom normalizacijom. Neka se u laboratorijskom sistemu prva čestica kreće brzinom  $\mathbf{v}_1$ , a druga čestica miruje. Prva čestica je projektil, a druga meta. Broj čestica projektila koji za vreme  $dt$  prodje kroz površ  $d\mathbf{S}$  je  $nv_1 dt dS_\perp$ . Sa  $n$  smo obeležili koncentraciju projektila,  $n = 1/V$ . U sistemu u kome su brzine čestica projektila, odnosno mete  $\mathbf{v}_1$ , odnosno  $\mathbf{v}_2$ , gusina fluksa se definiše analogno. Upadni broj čestica projektila koji prilaze meti jednak je  $n|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| dt dS_\perp$ , gde je  $dS_\perp$  element površine ortogonalan na relativni vektor brzine  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Fluks upadnih čestica dat je sa

$$\frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{V} = \frac{v_{rel}}{V} . \quad (6.5.51)$$

U sistemu centra impulsa implulsi čestica zadovoljavaju  $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ , pa je relativna brzina data sa

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} . \quad (6.5.52)$$

U laboratorijskom sistemu relativna brzina je

$$v_{rel} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} . \quad (6.5.53)$$

Konačno, presek za rasejanje je dat sa

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{1}{v_{rel}} \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3} . \quad (6.5.54)$$

U slučaju dve upadne čestice, a kombinovanjem prethodno dobijenih izraza, dolazimo do

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - \dots - p'_n) \frac{|i\mathcal{M}|^2}{4v_{rel} E_1 E_2} \prod_l 2m_l \prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} . \quad (6.5.55)$$

Napomenimo da su delta funkcija, Fajmanova amplituda kao i element zapremine u impulsnom prostoru

$$\prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}$$

Lorenc invarijantne veličine. Izraz  $E_1 E_2 v_{rel} = E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  koji je prisutan u izrazu za efikasni presek, u opštem slučaju nije skalar. On je invarijantan na bustove duž ose relativnog vektora brzine, tj. ponaša se kao površina pri Lorencovim transformacijama. Specijalno, ako su vektori brzina čestica kolinearni onda je ova veličina skalar. Tada važi

$$E_1 E_2 v_{rel} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} . \quad (6.5.56)$$

Presek za rasejanje, se u literaturi definiše i na Lorencov kovarijantan način uzimanjem relativističkog izraza za relativnu brzinu (vidi zadatak 3 u trećoj glavi knjige [12])

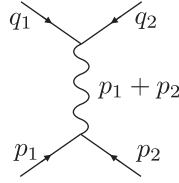
$$v_{rel}^2 = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2/c^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2}\right)} . \quad (6.5.57)$$

Lako se vidi da je u ovom slučaju izraz  $E_1 E_2 v_{rel}$  može prepisati u Lorenc invarijantnom obliku (6.5.56). Kovarijantni fluks je definisan u [15], za razliku od [9] gde je presek definisan kao u prvom delu našeg izlaganja.

Za procese pri kojima se jedna čestica raspada na nekoliko čestica definiše se širina raspada. Širina raspada je data sa

$$d\Gamma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \prod_f \frac{V d^3 p'_f}{(2\pi)^3} . \quad (6.5.58)$$

Srednje vreme života čestice je inverzna širina raspada te čestice.

Slika 6.4: Fajnmanov dijagram za rasejanje  $\mu^-(p_1) + \mu^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2)$ 

## 6.6 Rasejanje $\mu^-(p_1) + \mu^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2)$

U ovom poglavlju ćemo analizirati rasejanje mion antimion u elektron pozitronski par. Matrični element za ovaj proces odredićemo direktno, primenom Fajnmanovih pravila.

Fajnmanova amplituda za ovo rasejanje je

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\epsilon} \bar{v}(\mathbf{p}_2, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, r) \bar{u}(\mathbf{q}_1, r') \gamma_\mu v(\mathbf{q}_2, s') .$$

Ako su mioni nepolarizovani i ako u eksperimentu ne merimo polarizaciju finalnih čestica moramo usrednjiti po polarizacijama ulaznih čestica i sumirati po polarizacijama finalnih. Tako dolazimo do

$$\begin{aligned} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4} \frac{1}{(p_1 + p_2)^4} \sum_{r,s=1}^2 \sum_{r',s'=1}^2 \bar{v}_a(\mathbf{p}_2, s) \gamma_{ab}^\mu u_b(\mathbf{p}_1, r) \\ &\times \bar{u}_c(\mathbf{q}_1, r') (\gamma_\mu)_{cd} v_d(\mathbf{q}_2, s') \bar{u}_e(\mathbf{p}_1, r) \gamma_{ef}^\nu v_f(\mathbf{p}_2, s) \\ &\times \bar{v}_g(\mathbf{q}_2, s') (\gamma_\nu)_{gh} u_h(\mathbf{q}_1, r') \\ &= \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} \sum_s \left( v_f(\mathbf{p}_2, s) \bar{v}_a(\mathbf{p}_2, s) \right) \gamma_{ab}^\mu \\ &\times \sum_r \left( u_b(\mathbf{p}_1, r) \bar{u}_e(\mathbf{p}_1, r) \right) (\gamma^\nu)_{ef} \\ &\times \sum_{r'} \left( u_h(\mathbf{q}_1, r') \bar{u}_c(\mathbf{q}_1, r') \right) (\gamma_\mu)_{cd} \\ &\times \sum_{s'} \left( v_d(\mathbf{q}_2, s') \bar{v}_g(\mathbf{q}_2, s') \right) (\gamma_\nu)_{gh} . \end{aligned}$$

Gornji izraz ćemo prepisati preko proizvoda dva traga:

$$\begin{aligned} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} \frac{1}{16m_e^2 m_\mu^2} \text{tr}[(\not{q}_1 + m_e) \gamma_\mu (\not{q}_2 - m_e) \gamma_\nu] \\ &\times \text{tr}[(\not{p}_2 - m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_\mu) \gamma^\nu] . \end{aligned}$$

Primenom (3.1.7) dobijamo

$$\begin{aligned} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} \frac{1}{m_e^2 m_\mu^2} [q_{1\mu} q_{2\nu} + q_{2\mu} q_{1\nu} - (q_1 \cdot q_2) g_{\mu\nu} - m_e^2 g_{\mu\nu}] \\ &\times [p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} - m_\mu^2 g^{\mu\nu}] . \end{aligned}$$

Sredjivanjem gornjeg izraza dobijamo

$$\begin{aligned} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4 m_e^2 m_\mu^2} [2(p_2 \cdot q_1)(p_1 \cdot q_2) + 2(p_2 \cdot q_2)(p_1 \cdot q_1) \\ &+ 2m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_\mu^2(q_1 \cdot q_2) + 4m_e^2 m_\mu^2] . \end{aligned} \quad (6.6.59)$$

Impulsi čestica u sistemu centra impulsa su

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, p) , \\ p_2 &= (E, 0, 0, -p) , \\ q_1 &= (E', q \sin \theta, 0, q \cos \theta) , \\ q_2 &= (E', -q \sin \theta, 0, -q \cos \theta) , \end{aligned}$$

gde su  $p$  i  $q$  intenziteti odgovarajućih troimpulsa. Konačno, iz (6.6.59) dolazimo do

$$\begin{aligned} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{e^4}{32E^4 m_e^2 m_\mu^2} \left[ 2((EE')^2 + m_e^2 m_\mu^2)(1 + \cos^2 \theta) \right. \\ &+ \left. 2(E^2 m_e^2 + E'^2 m_\mu^2)(1 - \cos^2 \theta) - m_e^4 - m_\mu^4 \right] . \end{aligned} \quad (6.6.60)$$

U ultrarelativističkom limesu ( $p \approx E$ ) izraz (6.6.60) postaje

$$\langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{16m_e^2 m_\mu^2} (1 + \cos^2 \theta) . \quad (6.6.61)$$

Izraz za diferencijalni presek, na osnovu (6.5.55), je

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \frac{|i\mathcal{M}|^2}{4(E_1 + E_2)} 16m_e^2 m_\mu^2 \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6 4E_1' E_2'} . \quad (6.6.62)$$

Integracija po  $\mathbf{q}_2$  daje

$$d\sigma = \delta^{(4)}(E_1 + E_2 - 2E_1') \frac{m_e^2 m_\mu^2 |i\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_1|(E_1 + E_2)} \frac{|\mathbf{q}_1|^2 d|\mathbf{q}_1| d\Omega_1'}{(2\pi)^2 E_1' E_2'} \Big|_{\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1} . \quad (6.6.63)$$

Primenom  $\mathbf{q}_1^2 d|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_1| E_1' dE_1'$  sa integracije po intenzitetu impulsa prve čestice prelazimo na integraciju po njenoj energiji

$$d\sigma = \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2') \frac{m_e^2 m_\mu^2 |i\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{p}_1|(E_1 + E_2)} \frac{|\mathbf{q}_1| dE_1' d\Omega_1'}{(2\pi)^2 E_2'} \Big|_{\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1} . \quad (6.6.64)$$

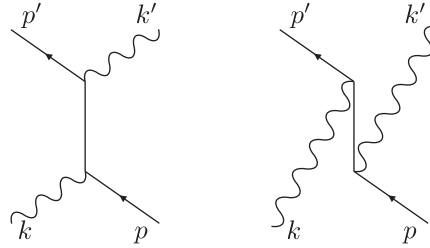
Konačno integracijom po energiji  $E_1'$  dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1'} \Big|_{CM} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_e^2 m_\mu^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\mathbf{q}_1|}{|\mathbf{p}_1|} |i\mathcal{M}|^2 . \quad (6.6.65)$$

Primenom ovog izraza dobijamo diferencijalni presek za proces  $\mu^- \mu^+ \rightarrow e^- e^+$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1'} = \frac{e^4}{256\pi^2 E^2} (1 + \cos^2 \theta) .$$

Integracijom po polarnim uglovima nalazimo ukupni presek za rasejanje.



Slika 6.5: Fajnmanovi dijagrami za Komptonovo rasejanje u najnižem redu.

## 6.7 Komptonovo rasejanje

Komptonovo rasejanje je proces  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ . Neka je impuls, odnosno polarizacija elektrona pre rasejanja  $\mathbf{p}$ , odnosno  $s$ , a posle rasejanja  $\mathbf{p}'$ , odnosno  $s'$ . Impuls i polarizacija fotona pre rasejanja su  $\mathbf{k}$  i  $\lambda$ . Ove veličine za finalni foton su  $\mathbf{k}'$  i  $\lambda'$ . U najnižem redu teorije perturbacije postoje dva dijagrama za Komptonovo rasejanje. Oni su prikazani na slici 6.5. Fajnmanova amplituda za ovaj proces je data sa

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') (ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) u(\mathbf{p}, s) + \\
 &+ \bar{u}(\mathbf{p}', s') (ie\gamma^\nu) \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') u(\mathbf{p}, s) \\
 &= -ie^2 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right] u(\mathbf{p}, s) . \tag{6.7.66}
 \end{aligned}$$

Vidimo da Fajnmanova amplituda ima sledeći oblik

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) ,$$

jer u procesu imamo dva spoljašnja fotona. Sasvim generalno, spoljašnje čestice za razliku od virtuelnih (propagatora) u procesima su 'on shell', tj. na masenoj površi. Konkretno, za Komptonovo rasejanje to znači da impulsi čestica zadovoljavaju:  $p^2 = p'^2 = m^2$ ,  $k^2 = k'^2 = 0$ . Zbog toga, možemo da koristimo

$$\begin{aligned}
 (p+k)^2 - m^2 &= 2p \cdot k \\
 (p-k')^2 - m^2 &= -2p \cdot k' . \tag{6.7.67}
 \end{aligned}$$

Primenom (3.1.1) imamo

$$(\not{p} + m) \gamma^\nu u(p) = (2p^\nu - \gamma^\nu \not{p} + m\gamma^\nu) u(p) = 2p^\nu u(p) ,$$

gde smo prokomutirali  $\not{p}$   $\gamma$  matrice i primenili Dirakovu jednačinu. Koristeći ovaj 'trik' izraz (6.7.66) postaje

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left( \frac{2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu}{2p \cdot k} - \frac{2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu}{2p \cdot k'} \right) u(\mathbf{p}, s) . \tag{6.7.68}$$

$S$ – matrični element za Komptonovo rasejanje je

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \sqrt{\frac{m}{VE}} \sqrt{\frac{m}{VE'}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega}} \sqrt{\frac{1}{2V\omega'}} i\mathcal{M}. \quad (6.7.69)$$

Presek za rasejanje ćemo izračunati u slučaju kada polarizacija čestica u procesu nije definisana, tj. kada su čestice nepolarizovane. Drugim rečima potrebno je usrednjiti po stanjima polarizacija upadnog elektrona i fotona i sumirati po stanjima polarizacija finalnih čestica. Srednja vrednost kvadrata Fajnmanove amplitude je

$$\frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \sum_{s, s'} \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_{\nu}(\mathbf{k}, \lambda) \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}', \lambda') \varepsilon_{\beta}(\mathbf{k}, \lambda)^* i\mathcal{M}^{\mu\nu} (i\mathcal{M}^{\alpha\beta})^*. \quad (6.7.70)$$

Prvo ćemo usrednjiti odnosno sumirati po polarizacijama fotona. Kao što znamo foton ima dve fizičke transverzalne polarizacije. Iz relacija kompletnosti polarizacionih vektora sledi

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{k}, \lambda') \varepsilon_{\nu}(\mathbf{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu}k^{\nu} - (k \cdot n)(k^{\mu}n^{\nu} + k^{\nu}n^{\mu})}{(k \cdot n)^2}. \quad (6.7.71)$$

Sa druge strane znamo da potencijali polja nisu jednoznačni, određeni su do na kalibracione transformacije

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \partial^{\mu} \Lambda(x), \quad (6.7.72)$$

gde je  $\Lambda(x)$  proizvoljna diferencijabilna funkcija. Ako u ovom izrazu uzmemo da je potencijal ravan talas  $A^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x}$ , a kalibraciona funkcija  $\Lambda(x) = \tilde{\Lambda}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}$ , dobijamo zakon transformacije polarizacionih vektora pri kalibracionom transformacijama

$$\varepsilon^{\mu}(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow \varepsilon^{\mu}(\mathbf{k}, \lambda) - ik^{\mu} \tilde{\Lambda}(k). \quad (6.7.73)$$

Vidimo da se polarizacioni vektori menjaju za član proporcionalan talasnom vektoru. Ta promena je nefizička pa doprinos ovog člana  $S$ –matrici mora biti jednak nuli. Ovaj zaključak ima direktne posledice na Fajnmanove amplitude koje sadrže spoljašnje fotone. Tada Fajnmanova amplituda ima oblik

$$i\mathcal{M} = \varepsilon^{\alpha}(\mathbf{k}_1) \varepsilon^{\beta}(\mathbf{k}_2) \dots i\mathcal{M}_{\alpha\beta\dots}, \quad (6.7.74)$$

gde su  $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{k}_i)$  polarizacioni vektori eksternih fotona. Kao posledica kalibracione simetrije moraju važiti identiteti

$$k_1^{\alpha} M_{\alpha\beta\dots} = k_2^{\beta} M_{\alpha\beta\dots} = \dots = 0. \quad (6.7.75)$$

Izraz (6.7.75) je tzv. Vordov identitet. Dakle, ako bilo koji polarizacioni vektor eksternih fotona,  $\varepsilon^{\mu}(\mathbf{k})$  u Fajnmanovoj amplitudi zamenimo sa odgovarajućim impulsom  $k^{\mu}$  dobijeni izraz je jednak nuli. To znači da članovi proporcionalni impulsu fotona u (6.7.71) ne daju doprinos  $S$ –matrici. Dakle pri usrednjavanju po stanjima polarizacija fotona možemo da koristimo sledeću preskripciju

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\mu}^*(\mathbf{k}, \lambda') \varepsilon_{\nu}(\mathbf{k}, \lambda) \rightarrow -g^{\mu\nu}. \quad (6.7.76)$$



Kvadrat Fajnmanove ampiltude prelaza usrednjen po polarizacijama inicijalnog fotona i elektrona i sumiran po stanjima polarizacije finalnog elektrona i fotona je

$$\begin{aligned}
\langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \sum_{s, s'} |i\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^2}{16m^2} \text{tr} \left[ (\not{p}' + m) \left( \frac{2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu}{2p \cdot k} - \frac{2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu}{2p \cdot k'} \right) \right. \\
&\quad \left. (\not{p} + m) \left( \frac{2p_\nu^\mu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma^\mu}{2p \cdot k} - \frac{2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu}{2p \cdot k'} \right) \right]. \tag{6.7.77}
\end{aligned}$$

Množenjem članova pod tragom dobijamo

$$\langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{64m^2} \left( \frac{T_1}{(p \cdot k)^2} + \frac{T_2}{(p \cdot k')^2} - \frac{T_3}{(p \cdot k)(p \cdot k')} - \frac{T_4}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right), \tag{6.7.78}$$

gde je

$$\begin{aligned}
T_1 &= \text{tr} \left( (\not{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu)(\not{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) \right), \\
T_2 &= \text{tr} \left( (\not{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu)(\not{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu) \right), \\
T_3 &= \text{tr} \left( (\not{p}' + m)(2p^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu)(\not{p} + m)(2p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \not{k}' \gamma_\nu) \right), \\
T_4 &= \text{tr} \left( (\not{p}' + m)(2p^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu)(\not{p} + m)(2p_\nu \gamma_\mu + \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu) \right). \tag{6.7.79}
\end{aligned}$$

Tragovi se računaju pravolinijski. Direktni račun daje

$$T_1 = 32((p \cdot k)(p' \cdot k) - m^2 p' \cdot k - m^2 p \cdot p' + 2m^2 p \cdot k + 2m^4). \tag{6.7.80}$$

Primenom

$$p' \cdot (k + p) = p' \cdot (k' + p') = m^2 + k' \cdot p' = m^2 + k \cdot p$$

dobijamo

$$T_1 = 32((p \cdot k)(p' \cdot k) + m^2 p \cdot k + m^4). \tag{6.7.81}$$

Trag  $T_2$  se dobija iz traga  $T_1$  smenom  $k \rightarrow -k'$ . Tako dobijamo

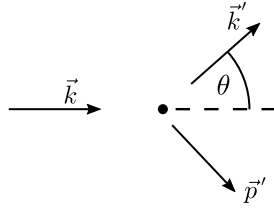
$$T_2 = 32((p \cdot k')(p' \cdot k') - m^2 p \cdot k' + m^4), \tag{6.7.82}$$

što primenom  $p' \cdot k' = p \cdot k$  pa je

$$T_2 = 32((p \cdot k)(p \cdot k') - m^2 p \cdot k' + m^4). \tag{6.7.83}$$

Treći trag je

$$T_3 = 16(2m^4 + m^2 p \cdot k - m^2 p \cdot k'). \tag{6.7.84}$$



Slika 6.6: Komptonovo rasejanje: četveroimpulsi

Poslednji trag,  $T_4$  je jednak trećem tragu. Kombinujući izraze za tragove nalazimo

$$\langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{2m^2} \left[ \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \quad (6.7.85)$$

Presek za rasejanje ćemo odrediti u laboratorijskom sistemu. Uzmimo da se upadni foton kreće duž  $z$ -ose i sudara sa elektronom koji miruje (slika 6.6). Ugao između pravca rasejanog fotona i  $z$ -ose je  $\theta$ . Četveroimpulsi čestica u procesu su

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega, 0, 0, \omega) \\ p^\mu &= (m, 0, 0, 0) \\ k'^\mu &= (\omega', \omega' \sin \theta \cos \varphi, \omega' \sin \theta \sin \varphi, \omega' \cos \theta) \\ p'^\mu &= (E', \mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (6.7.86)$$

Zakon održanja četveroimpulsa,  $k + p = k' + p'$  daje  $p' = k + p - k'$  čijim kvadriranjem i sredjivanjem dobijamo

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} - \frac{1}{m}(1 - \cos \theta). \quad (6.7.87)$$

Diferencijalni presek je

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|S_{fi}|}{T} \frac{1}{J_{in}} \frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \frac{m}{\omega} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'}. \end{aligned} \quad (6.7.88)$$

Integracija po impulsu finalnog elektrona  $\mathbf{p}'$  daje

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E' + \omega' - E - \omega) \frac{m\omega'}{4E'\omega} \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle \Big|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\omega' d\Omega'. \quad (6.7.89)$$

Da bismo integracija po  $\omega'$  moramo uzeti u obzir da je  $E' = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 - 2m\omega\omega' \cos \theta} + m^2$ , tj. da  $E'$  zavisi od  $\omega'$ . Konačno, nakon integracije po  $\omega'$  dolazimo do diferencijalnog preseka u laboratorijskom sistemu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \langle |i\mathcal{M}|^2 \rangle. \quad (6.7.90)$$

Primenom izraza (6.7.87) i (6.7.85) dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{2(4\pi)^2 m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta\right), \quad (6.7.91)$$

što predstavlja diferencijalni presek za Komptonov efekat u laboratorijskom sistemu. Formula (6.7.91) je poznata kao Klajn-Nišina formula. Ako je energija upadnog fotona mnogo manja od mase mirovanja elektrona tada je  $\omega' \approx \omega$ . U tom slučaju formula (6.7.91) postaje

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{2(4\pi)^2 m^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (6.7.92)$$

Formula (6.7.92) je Tomsonova formula za rasejanje izvedena u klasičnoj elektrodinamici.

## 6.8 Rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu

U ovom poglavlju razmatraćemo rasejanje elektrona na jezgru koje miruje u koordinatnom početku. Potencijal elektrostatičkog polja jezgra je Kulonov potencijal:

$$A^0 = \frac{Ze}{|\mathbf{r}|}, \quad \mathbf{A} = 0,$$

gde je  $Ze$  naelektrisanje jezgra. Smatraćemo da je elektromagnetno polje klasično, tj. opisano klasičnom funkcijom. Sa druge strane smatraćemo da je elektronsko polje kvantno. Početno stanje je  $|e^-, \mathbf{p}_i, s_i\rangle$ , a finalno  $|e^-, \mathbf{p}_f, s_f\rangle$ . Amplituda prelaza u najnižem redu teorije perturbacije je

$$S_{fi} = (ie) \int d^4x \langle e^-(\mathbf{p}_f, s_f) | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) | e^-(\mathbf{p}_i, s_i) \rangle A_\mu(x). \quad (6.8.93)$$

Iz (6.8.93) dobijamo

$$S_{fi} = \frac{ie^2 Zm}{V \sqrt{E_i E_f}} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i) 2\pi \delta(E_f - E_i) \int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}, \quad (6.8.94)$$

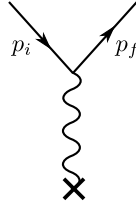
gde su  $E_i$  i  $E_f$  energije ulaznog i izlaznog elektrona. Intergal u izrazu (6.8.94) se nalazi lako. Rezultat je

$$I = \int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} = \frac{4\pi}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^2}, \quad (6.8.95)$$

što nakon zamene u (6.8.94) daje

$$S_{fi} = \frac{8i\pi^2 e^2 Zm}{V \sqrt{E_i E_f} |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^2} \bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i) \delta(E_f - E_i). \quad (6.8.96)$$

Ovaj izraz sadrži samo delta funkciju koja odgovara zakonu održanja energije; ulazni i izlazni elektroni imaju jednake energije. Medjutim, impulsi elektrona pre i nakon rasejanja nisu jednaki. Elektromagnetno polje ne zavisi od vremena, već od prostornih koordinata. Ovakav potencijal



Slika 6.7: Fajnmanovi dijagrami za rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu u najnižem redu.

narušava homogenost prostora, ali ne i vremena. Iz tog tazloga energije elektrona pre i posle sudara su iste, a impulsi nisu. Fajnmanov dijagram za rasejanje elektrona na Kulonovom potencijalu prikazan je na slici 6.7. Diferencijalni presek je

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|S_{fi}|^2 V E_i V d^3 p_f}{T |\mathbf{p}_i| (2\pi)^3} \\ &= \frac{4m^2 e^4 Z^2}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} |\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i)|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} d\Omega . \end{aligned} \quad (6.8.97)$$

U prethodnim primerima rasejanja usrednjavali smo po stanjima polarizacija čestica u procesu. Sada ćemo odrediti presek za rasejanje elektrona ako ulazni i finalni elektron imaju definisane helicitete. Heliciteti elektrona su  $\lambda_i/2$ , odnosno  $\lambda_f/2$ , gde je  $\lambda_i = \lambda_f = \pm 1$ . Primenom

$$u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \frac{\not{p} + m}{2m} \quad (6.8.98)$$

dobijamo

$$|\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i)|^2 = \frac{1}{16m^2} \text{tr}[(1 + \gamma_5 \not{s}_f)(\not{p}_f + m) \gamma^0 (1 + \gamma_5 \not{s}_i)(\not{p}_i + m) \gamma^0] . \quad (6.8.99)$$

Polarizacija  $s^\mu$  u sistemu u kome se elektron kreće sa impulsom  $\mathbf{p}$  dobija se Lorencovim bustom polarizacije  $\tilde{s}^\mu$  iz sistema mirovanja. Ako u sistemu mirovanja za polarizacione vektore izaberemo  $\tilde{\mathbf{s}} = \lambda \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  dobićemo helicitetni bazis. Rezultat je

$$s^\mu = \lambda \left( \frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right) . \quad (6.8.100)$$

Uzmimo da se upadni elektron kreće duž  $z$ -ose, tj.  $p_i^\mu = (E_i, 0, 0, p_i)$ . Četvoroimpuls rasejanog elektrona je

$$p_f^\mu = (E_f, p_f \sin \theta \cos \varphi, p_f \sin \theta \sin \varphi, p_f \cos \theta) .$$

Polarizacioni vektori su

$$\begin{aligned} s_i^\mu &= \lambda_i \left( \frac{|\mathbf{p}_i|}{m}, \frac{E_i}{m} \frac{\mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_i|} \right) \\ s_f^\mu &= \lambda_f \left( \frac{|\mathbf{p}_f|}{m}, \frac{E_f}{m} \frac{\mathbf{p}_f}{|\mathbf{p}_f|} \right) . \end{aligned} \quad (6.8.101)$$

Nenulti tragovi u izrazu (6.8.99) su

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\not{\mathbf{p}}_f \gamma^0 \not{\mathbf{p}}_i \gamma^0) &= 4(E_i E_f + |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos \theta) , \\
\text{tr}(\not{\boldsymbol{\epsilon}}_f \not{\mathbf{p}}_f \gamma^0 \not{\boldsymbol{\epsilon}}_i \not{\mathbf{p}}_i \gamma^0) &= -4m^2 \cos \theta , \\
\text{tr}(\not{\boldsymbol{\epsilon}}_f \gamma^0 \not{\boldsymbol{\epsilon}}_i \gamma^0) &= \frac{4}{m^2} (|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| + E_i E_f \cos \theta) , \\
\text{tr}(\gamma^0 \gamma^0) &= 4 .
\end{aligned} \tag{6.8.102}$$

Zamenom (6.8.102) u (6.8.99) dobijamo

$$|\bar{u}(\mathbf{p}_f, s_f) \gamma^0(\mathbf{p}_i, s_i)|^2 = \frac{1}{4m^2} \left( E_i E_f + m^2 + |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f| \cos \theta + \lambda_i \lambda_f (E_i E_f \cos \theta + m^2 \cos \theta + |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_f|) \right) . \tag{6.8.103}$$

Diferencijalni presek za rasejanje elektrona je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\lambda_i, \lambda_f} = \frac{Z^2 e^4}{8|\mathbf{p}_i|^4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left( E_i^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + m^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \lambda_i \lambda_f \left( E_i^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - m^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \right) . \tag{6.8.104}$$

Ako pri rasejanju ne dolazi do promene heliciteta elektrona presek za rasejanje je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{noflip} = \frac{Z^2 e^4}{4|\mathbf{p}_i|^4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} E_i^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) , \tag{6.8.105}$$

a ako dolazi do promene heliciteta diferencijalni presek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{flip} = \frac{Z^2 e^4}{4|\mathbf{p}_i|^4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} m^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) . \tag{6.8.106}$$

Ukoliko se u eksperimentu ne meri polarizacija elektrona, onda ćemo sumirati po helicitetima ulaznog elektrona, i usrednjiti po helicitetnim stanjima finalnog elektrona, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{nepol} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i = \pm} \sum_{\lambda_f = \pm} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\lambda_i, \lambda_f} \\
&= \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{noflip} + \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{flip} .
\end{aligned} \tag{6.8.107}$$

Konačno za nepolarizovani presek dobijamo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{nepol} = \frac{Z^2 e^4}{4|\mathbf{p}_i|^4 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left( E_i^2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + m^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) . \tag{6.8.108}$$

Gornji rezultat je tzv. Motova formula. U nerelativističkom limesu ona prelazi u Raderfordovu formulu za rasejanje



# Literatura

- [1] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964
- [2] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965
- [3] N. N. Bogoljubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley-Interscience, New York, 1980
- [4] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996
- [5] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993
- [6] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980
- [7] F. Mandl and G. Show, *Quantum Field Theory*, New York, 1999
- [8] T. Ohlsson, *Relativistic Quantum Physics*, Cambridge University Press, 2011
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995
- [10] L. Rayder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [11] V. Radovanović, *Problem Book in Quantum Field Theory*, Springer, Berlin, New York, 2008
- [12] V. Radovanović, *Specijalna teorija relativnosti (2015)*, skripta, Fizički fakultet.
- [13] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2009
- [14] D. Tong, *Quantum Field Theory*, Lecture Notes, DAMTP, Cambridge
- [15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, New York, 1996