KVANTNA TEORIJA POLJA II
Prvi deo
Funkcionalni formalizam u teoriji polja

Voja Radovanović

Beograd, 2013.

Contents

Literatura:

1. M. Peskin and D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison Wesley, 1995
2. D. Bailin and A. Love, Introduction to Gauge Field Theory, Bristol, 1986
3. M. Srednicki, Quantum Field Theory, CUP, 2007
4. V. Radovanović, Problem Book in Quantum Field Theory, Springer, Berlin, 2008
5. L. Ryder, Quantum Field Theory, CUP, 1985
6. P. Ramond, Field Theory: Modern Primer, Addison-Wesley, Reedwood City, Ca, 1989.

Chapter 1

Path integrals in quantum mechanics

Na kursu kvantne mehanike sistemi se kvantuju tzv. kanonskim kvantovanjem. Klasične veličine, po principu korespondencije postaju operatori u Hilbertovom prostoru. U ovoj glavi predstavićemo funkcionalno kvantovanju kvantno mehaničkih sistema. Ovakav način kvantovanja potiče od Fajnmana.

1.1 Generišući funkcional

Neka je $L = L(q, \dot{q}, t)$ lagranžijan a $H = H(q, p, t)$ hamiltonijan klasičnog sistema sa jednim stepenom slobode. U kvantnoj teoriji q i p postaju operatori koordinate $\hat{Q}$ odnosno impulsa $\hat{P}$. Oni zadovoljavaju komutacionu relaciju

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar. \tag{1.1.1}$$

Svojstvene jednačine ovih operatora su

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle, \tag{1.1.2}$$

gde su $|q\rangle$ odnosno $|p\rangle$ svojstveni vektori operatora koordinate odnosno impulsa. Oni zadovoljavaju relacije kompletnosti:

$$\int dq|q\rangle\langle q| = 1, \quad \int dp|p\rangle\langle p| = 1 \ , \tag{1.1.3}$$

i normirani su prema

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \tag{1.1.4}$$

Evoluciju sistema odredjuje Šredingerova jednačina

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \ , \tag{1.1.5}$$

gde je $\hat{H}$ hamiltonijan. Ukoliko je u trenutku t_0 vektor stanja $|\psi(t_0)\rangle$ onda je u trenutku t stanje sistema dato sa

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \ , \tag{1.1.6}$$

gde je

$$U(t,t_0) = Te^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\hat{H}(t')} \tag{1.1.7}$$

tzv. evolucioni operator (propagator). U daljem ćemo pretpostaviti da hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. da je sistem konzervativan. Tada se evolucioni operator svodi na

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} \ . \tag{1.1.8}$$

U Hajzenbergovoj slici operator koordinate je

$$\hat{Q}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{Q}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \ , \tag{1.1.9}$$

Šredingerovim stanjima $|q\rangle$ odgovaraju stanja

$$|q,t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle \tag{1.1.10}$$

u Hajzenbergovoj slici. Ona su svojstveni vektori operatora koordinate u Hajzenbergovoj slici $\hat{Q}_H(t)$:

$$\hat{Q}_H(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle \ . \tag{1.1.11}$$

Hajzenbergova stanja $|q,t\rangle_H$ zadovoljavaju relacije kompletnosti:

$$\int dq|q,t\rangle\langle q,t| = \int dq e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = 1 \ , \tag{1.1.12}$$

i ortonormiranosti:

$$\langle q,t|q',t\rangle = \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q'\rangle = \langle q|q'\rangle = \delta(q-q'). \tag{1.1.13}$$

Amplituda verovatnoće da čestica iz položja q_i u trenutku t_i predje u položaj q_f u trenutku t_f je

$$\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|q_i\rangle \tag{1.1.14}$$

što je evolucioni operator. Možemo ga prepisati i u Hajzenbergovoj slici

$$\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t_i)}|q_i\rangle = \langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle \ . \tag{1.1.15}$$

Talasna funkcija u trenutku t je

$$\begin{aligned}\psi(q,t) &= \langle q|\psi(t)\rangle_S = \langle q,t|\psi\rangle_H \\ &= \int dq'\langle q|U(t,t_0)|q'\rangle\langle q'|\psi(t_0)\rangle \\ &= \int dq'\langle q,t|q',t_0\rangle\langle q',t_0|\psi\rangle_H \\ &= \int dq'\langle q,t|q',t_0\rangle\psi(q',t_0) \ . \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Podintegralni izraz je proizvod evolucionog operatora i talasne funkcije u početnom trenutku.

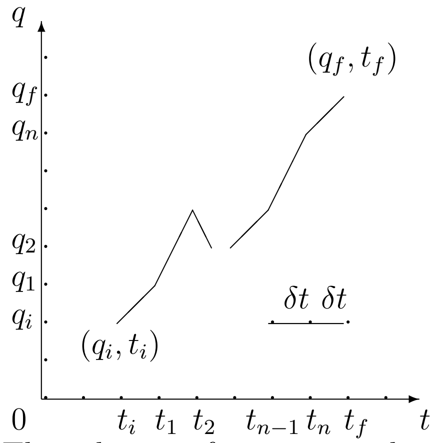

Figure 1.1: The splitting of time interval and the corresponding path

Podelimo interval $t_f - t_i$ na $n+1$ intervala takvih da je

$$t_f - t_i = (n+1)\triangle t, \quad t_{k+1} - t_k = \triangle t, \quad t_i = t_0 \quad t_f = t_{n+1}. \tag{1.1.17}$$

Uvedimo n relacija kompletnosti $1 = \int dq_k |q_k, t_k\rangle\langle q_k, t_k|$ u izraz za amplitudu prelaza

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n\rangle\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1}\rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i\rangle. \tag{1.1.18}$$

Treba da nadjemo

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j\rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_{j+1}-tj)} | q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\triangle t} | q_j\rangle \\
&= \langle q_{j+1} | q_j\rangle - \frac{i}{\hbar}\triangle t \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j\rangle + O((\triangle t)^2) \\
&= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i}{\hbar}\triangle t \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j\rangle + O((\triangle t)^2)\ .
\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Neka Hamiltonijan ima jednostavan oblik

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q}). \tag{1.1.20}$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1} | \hat{P}^2 | q_j\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | \hat{P}^2 | p_j\rangle\langle p_j | q_j\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j^2 | p_j\rangle\langle p_j | q_j\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j p_j^2 \langle q_{j+1} | p_j\rangle\langle p_j | q_j\rangle.
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Kako je

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \tag{1.1.22}$$

to dobijamo

$$\langle q_{j+1}|\hat{P}^2|q_j\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp_j p_j^2 e^{\frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)}. \tag{1.1.23}$$

Matrični element potencijala je

$$\langle q_{j+1}|\hat{V}(\hat{q})|q_j\rangle = V\big(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\big)\delta(q_{j+1}-q_j) = V(\bar{q}_j)\int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)}\ , \tag{1.1.24}$$

gde je $\bar{q}_j = (q_{j+1}+q_j)/2$. Izabrali smo da umesto q_j ili q_{j+1} u argumentu klasičnog potencijala pišemo njihovu srednju vrednost što odgovara simetričnom uredjenju operatora. Dakle

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\triangle t}|q_j\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)}\Big(1-\frac{i}{\hbar}\triangle t\big(\frac{p_j^2}{2m}+V(\bar{q}_j)\big)+O((\triangle t)^2)\Big)\\
&= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)} e^{-\frac{i}{\hbar}\triangle t\left(\frac{p_j^2}{2m}+V(\bar{q}_j)\right)}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\triangle t\left(p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\triangle t}-\frac{p_j^2}{2m}-V(\bar{q}_j)\right)}.
\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

Kako je klasični Hamiltonijan

$$H(p_j,\bar{q}_j) = \frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j). \tag{1.1.26}$$

to (1.1.25) postaje

$$\langle q_{j+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\triangle t}|q_j\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left(p_j(q_{j+1}-q_j)-H(p_j,\bar{q}_j)\triangle t\right)}. \tag{1.1.27}$$

Klasični hamiltonijan ne mora biti oblika

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

već može biti komplikovanija funkcija koordinate i impulsa, npr.

$$H = \sum_{m,n} c_{mn} q^m p^n\ , \tag{1.1.28}$$

gde su c_{mn} koeficijenti. Kvantno mehanički analogon gornjeg hamiltonijana nije jednoznačno odredjen. Moramo definisati uredjenje operatora $\hat{P}$ i $\hat{Q}$ jer npr. $\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} \neq \hat{P}\hat{Q}\hat{Q}$. Mi ćemo koristiti Weyl-ovo (simetrično) uredjenje definisano sa

$$\hat{H}(\hat{P},\hat{Q}) = \int \frac{dx}{2\pi}\frac{dk}{2\pi} e^{ix\hat{P}+ik\hat{Q}} \int dp dq e^{-ixp-ikq} H(p,q)\ . \tag{1.1.29}$$

U ovom slučaju rezultat (1.1.27) ostaje nepromenjen. Ovo uredjenje se naziva simetričnim jer postoji sledeća koresondencija

$$\begin{aligned} qp &\rightarrow \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{P}+\hat{P}\hat{Q}) \\ q^2p &\rightarrow \frac{1}{4}(\hat{Q}^2\hat{P}+2\hat{Q}\hat{P}\hat{Q}+\hat{P}\hat{Q}^2)\ . \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

Iz (1.1.18) i (1.1.27) sledi da je ampiltuda prelaza

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \int \prod_{i=1}^{n} dq_i \int \prod_{j=0}^{n} dp_j \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\triangle t\left(p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\triangle t}-H(p_j,\bar{q}_j)\right)}. \tag{1.1.31}$$

Ako uzmemo limes $n\rightarrow\infty$ i $\triangle t\rightarrow 0$ ali tako da je njihov proizvod $n\triangle t$ konačan $(2n+1)-$struki integral postaće integral po trajektorijama (path integral ili funkcionalni integral). Mera integracije je proizvod

$$DqDp$$

gde je

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} dq_i = Dq, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{j=0}^{n} dp_j}{(2\pi\hbar)^{n+1}} = Dp. \tag{1.1.32}$$

U ovom limesu imamo još i

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{q_{j+1}-q_j}{\triangle t} = \dot{q}, \quad \lim_{\triangle t\to 0}\sum_{j=0}^{n}\triangle t = \int_{t_i}^{t_f} dt. \tag{1.1.33}$$

pa je

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \int Dq\int Dp\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt(p\dot{q}-H(p,q))}\ , \tag{1.1.34}$$

uz granični uslov

$$q(t_i)=q_i, \quad q(t_f)=q_f. \tag{1.1.35}$$

Rezultat (1.1.34) je fazni integral po trajektorijama. U slučaju kad je Hamiltonijan dat sa

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m}+\hat{V}(\hat{Q})$$

možemo integraliti po impulsima u (1.1.34). Podjimo od izraza

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle = \int dq_1\dots dq_n\int\frac{dp_0\dots dp_n}{(2\pi\hbar)^{n+1}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n}\triangle t\left(p_j\frac{q_{j+1}-q_j}{\triangle t}-\frac{p_j^2}{2m}-V(\bar{q}_j)\right)}\ . \tag{1.1.36}$$

i primenimo Gausov integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2+\beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \tag{1.1.37}$$

koji je definisan za Re $\alpha > 0$. U našem slučaju parametar α je imaginaran pa ćemo $\triangle t$ zameniti sa

$$(1 - i\delta)\triangle t \ , \tag{1.1.38}$$

gde je δ mali pozitivan broj. Tako dobijamo da su integracije po impulsima Gausove

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_j e^{-\frac{i\triangle t(1-i\delta)}{2m\hbar}p_j^2 + \frac{i}{\hbar}p_j(q_{j+1}-q_j)} = \sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{i\triangle t}} e^{-\frac{m(q_{j+1}-q_j)^2}{2i\hbar\triangle t}} \ . \tag{1.1.39}$$

Amplituda prelaza je onda

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \frac{dq_1 \dots dq_n}{(2\pi\hbar)^{n+1}} \Big(\frac{2m\pi\hbar}{i\triangle t}\Big)^{\frac{n+1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n} \triangle t\left(\frac{m}{2}\frac{(q_{j+1}-q_j)^2}{\triangle t^2} - V(\bar{q}_j)\right)} \\ &= \Big(\frac{m}{2\pi\hbar i\triangle t}\Big)^{\frac{n+1}{2}} \int dq_1 \dots dq_n e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n} \triangle t\left(\frac{m}{2}\frac{(q_{j+1}-q_j)^2}{(\triangle t)^2} - V(\bar{q}_j)\right)} . \end{aligned} \tag{1.1.40}$$

U limesu $n \to \infty$ i $\triangle t \to 0$ ali tako da je njihov proizvod konačan uz oznaku

$$N = \Big(\frac{m}{2\pi\hbar i\triangle t}\Big)^{\frac{n+1}{2}} \to \infty. \tag{1.1.41}$$

dobijamo

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right)} . \tag{1.1.42}$$

U eksponentu podintegralne funkcije figuriše klasično dejstvo

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \ L(q, \dot{q}) \ .$$

Konfiguracioni path integral je

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{1.1.43}$$

Path integral je suma preko svih mogućih trajektorija (uz odgovatajući granični uslov) otežinjena sa faznim faktorom $e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}$. U klasičnoj mehanici čestica se kreće po jednoj, tzv. klasičnoj trajektoriji, dok u kvantnoj mehanici su moguće sve trajektorije. U limesu $\hbar \ll S$ najveći doprinos amplitudi prelaza daje klasična trajektorija. To je klasičan limes.

Recimo na kraju da funkcionalni formalizam potiče od Fajnmana.

1.2 Vacuum-Vacuum transition amplitude

Uvešćemo pomoćnu veličinu $J(t)$ koja se naziva izvorom. Pretpostavićemo da je ona oblika kao na slici, tj. da je izvor nenulti u oblasti $t_- < t < t_+$. Amplituda prelaza u prisustvu izvora je

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J = \int Dq \int Dp \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q} - H(p,q) + Jq)} . \tag{1.2.44}$$

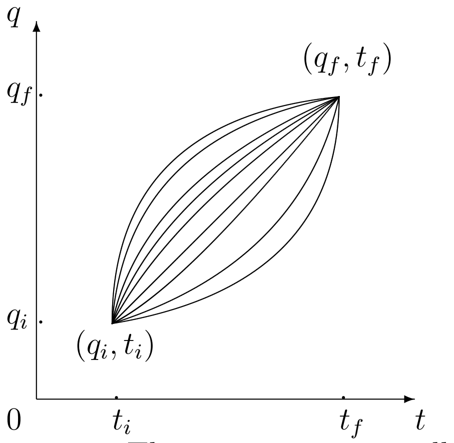

Figure 1.2: The integration over all possible paths

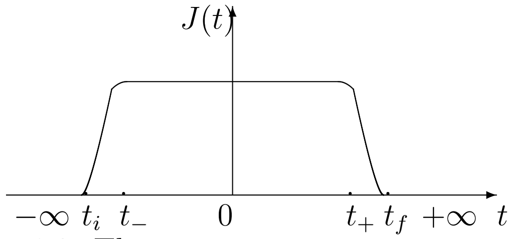

Figure 1.3: The source current: $t_i < t_- < t_+ < t_f$ $\lim_{t\to\pm\infty} J(t) = 0$

Vidimo da je hamiltonijan H 'prešao' u $H - Jq$. Zadnji član je kapling izvora sa koordinatom. Primenom $1 = \int dq_- |q_-, t_-\rangle\langle q_-, t_-|$ i $1 = \int dq_+ |q_+, t_+\rangle\langle q_+, t_+|$ dobijamo

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle_J = \int dq_- dq_+ \langle q_f, t_f|q_+, t_+\rangle\langle q_+, t_+|q_-, t_-\rangle_J \langle q_-, t_-|q_i, t_i\rangle \tag{1.2.45}$$

Svojsvtvena jednačina Hamiltonijana je

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{1.2.46}$$

dok su

$$\psi_n(q) = \langle q|n\rangle \tag{1.2.47}$$

svojstvena stanja u koordinatnoj reprezentaciji. Ubacivanjem kompletnog skupa energetskih stanja imamo

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f|q_+, t_+\rangle &= \sum_n \langle q_f, t_f|n\rangle\langle n|q_+, t_+\rangle = \sum_n \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_f}|n\rangle\langle n|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_+}|q_+\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_f - t_+)}\psi_n(q_f)\psi_n^*(q_+) \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

i slično

$$\langle q_-, t_-|q_i, t_i\rangle = \sum_n \psi_n(q_-) e^{\frac{i}{\hbar}E_n(t_i - t_-)}\psi_n^*(q_i). \tag{1.2.49}$$

Želimo da inicijalno i finalno stanje budu osnovna stanja u $t_i \to -\infty$ odnosno $t_f \to \infty$. Izrazi (1.2.48) i (1.2.49) u ovim limesima nisu dobro definisani. Opet nam nedostaje mali imaginarni deo u eksonentima u ovim izrazima. Možemo Hamiltonijan zameniti sa $H' = H(1-i\delta)$ ili uzeti limes

$$\begin{cases} t_i \to -\infty(1-i\delta) = -\infty e^{-i\delta}, \\ t_f \to \infty(1-i\delta) = \infty e^{-i\delta}. \end{cases} \tag{1.2.50}$$

U zadnjoj formuli $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Gornji limesi odgovaraju smeni $t \to te^{-i\delta}$ što je integracija po liniji zarotiranoj za ugao δ kao na slici. U ovim limesima najsporije opada doprinos osnovnog

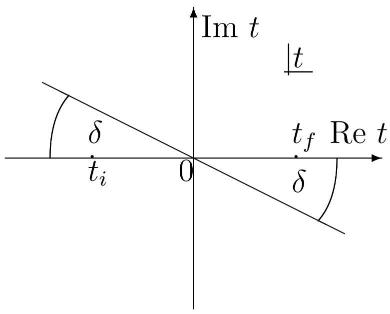

Figure 1.4: The rotation of time axis by an angle δ in the complex plane

stanja pa dobijamo

$$\langle q_f, t_f | q_+, t_+ \rangle \to \lim_{t_f \to \infty e^{-i\delta}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t_f} \psi_0(q_f) \psi_0^*(q_+, t_+), \tag{1.2.51}$$

$$\langle q_-, t_- | q_i, t_i \rangle \to \lim_{t_i \to -\infty e^{-i\delta}} e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t_i} \psi_0^*(q_i) \psi_0(q_-, t_-). \tag{1.2.52}$$

Veličina

$$\lim_{\substack{t_f \to \infty e^{-i\delta} \\ t_i \to -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J}{\psi_0(q_f, t_f) \psi_0^*(q_i, t_i)} = \int dq_+ dq_- \psi_0^*(q_+, t_+) \langle q_+, t_+ | q_-, t_- \rangle_J \psi_0(q_-, t_-) \tag{1.2.53}$$

je amplituda verovatnoće da sistem u osnovnom stanju u trenutku t_- ostane u osnovnom stanju u trenutku t_+. Ako uzmem da perturbacija deluje sve vreme $t_- \to -\infty$, $t_+ \to \infty$ dobijamo amplitudu verovatnoće da sistem ostane u osnovnom stanju u prisustvu izvora

$$Z[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J = \lim_{\substack{t_t \to \infty e^{-i\delta} \\ t_i \to -\infty e^{-i\delta}}} \frac{\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_J}{\psi_0^*(q_f, t_f) \psi_0(q_i, t_i)}. \tag{1.2.54}$$

Dakle

$$Z[J] = N \int Dq \int Dp \; e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p,q) + Jq)}. \tag{1.2.55}$$

Normalizacija je odredjena zahtevom $Z[0] = 1$ pa je

$$N^{-1} = \int Dq \int Dp \; e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (p\dot{q} - H(p,q))}. \tag{1.2.56}$$

Dakle

$$Z[J] = \frac{\int Dq \int Dp \; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(p\dot{q}-H(p,q)+Jq)}}{\int Dq \int Dp \; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(p\dot{q}-H(p,q))}}. \tag{1.2.57}$$

Gornja amplituda ne zavisi od izbora graničnih uslova

$$\lim_{t_i \to -\infty} q(t) = q_i, \quad \lim_{t_f \to \infty} q(t) = q_f. \tag{1.2.58}$$

Ako je $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ onda je

$$Z[J] = N' \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(L(q,\dot{q})+Jq)}. \tag{1.2.59}$$

Generalno govoreći funkcionalni (path) integral nije dobro definisan. Veličina

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q))$$

je realna pa je podintegralna funkcija u path integralu oscilatorna.

Da bi dobili dobro definisan integral možemo uvesti euklidsko vreme[1] $\tau = it$. Prelazak na euklidsko vreme se naziva Vikovom rotacijom. Analitičko produženje na imaginarno vreme zasnovano na činjenici da u oblasti integracije sa slike 1.5 nema singulariteta pa je za $T \to \infty$

$$\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t f(t) + \int_{-iT}^{iT} \mathrm{d}(iy) f(iy) = 0 \tag{1.2.60}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t f(t) &= -\int_{-iT}^{iT} \mathrm{d}(iy) f(iy) \\ &= -i \int_{-T}^{T} \mathrm{d}(\tau) f(-i\tau) \, , \end{aligned} \tag{1.2.61}$$

gde smo uveli smenu $y = -\tau$.

Dakle, potrebno je da napravimo zamenu $t = -i\tau$ u dejstvu i da integralimo od $-\infty$ do ∞ po euklidskom vremenu τ. Lako se dobija

$$\dot{q}^2 = -\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 , iS = -\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau \Big[\frac{1}{2}m\Big(\frac{dq}{d\tau}\Big)^2 + V(q)\Big] = -S_E \tag{1.2.62}$$

pa je euklidski path integral

$$Z_E[J] = N_E \int Dq e^{\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau(L(q,i\frac{dq}{d\tau})+Jq)} \; . \tag{1.2.63}$$

[1] U ovom slučaju $\delta = \frac{\pi}{2}$.

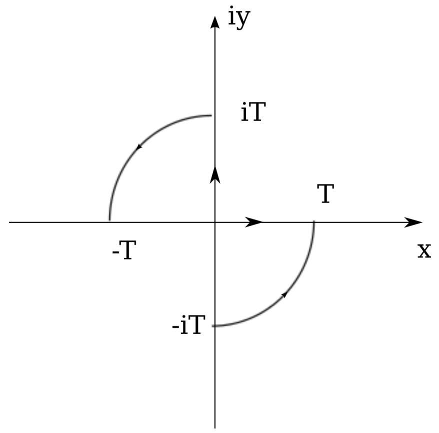

Figure 1.5:

Drugi, ekvivalentni pristup je da pomnožimo Hamiltonijan sa $1 - i\delta$ pa je

$$Z[J] = \int DpDqe^{i\int_{-\infty}^{\infty} dt(p\dot{q}-(1-i\delta)H+Jq)} \ .$$

Neka je

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \ .$$

Množenje Hamiltonijana sa $1 - i\delta$ je ekvivalentno sa smenom

$$\omega^2 \to \omega^2(1 - i\delta) = \omega^2 - i\delta$$

u faznom funkcionalnom integralu. Mogli smo i da dodamo član $-i\delta q^2/2$, $(\delta \to 0)$ u Hamiltonijan. Analogno dodavanjem $i\delta q^2/2$ u Lagranžijan daje konvergenciju konfiguracionog funkcionalnog integrala

$$Z[J] = N \int Dq \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(L(q,\dot{q})+Jq+\frac{i}{2}\delta q^2)}. \qquad (1.2.64)$$

Sve bi ovo dovelo do konvergentnog integrala. Path intregral se onda definiše na ovaj način.

Generalizacija na sisteme sa više stepeni slobode je pravolinijska. Generišući funkcional za sisteme sa n stepeni slobode je Dakle

$$Z[J] = \frac{\int Dq \int Dp \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(p_i\dot{q}_i - H(p,q)+J_i q_i)}}{\int Dq \int Dp \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dt(p_i\dot{q}_i - H(p,q))}}. \qquad (1.2.65)$$

gde su q_i i p_i generalisane koordinate odnosno generalisani impulsi. Takodje je

$$Dq = \prod_i Dq_i, \quad Dp = \prod_i Dp_i \ . \qquad (1.2.66)$$

1.3 Green functions

Nadjimo

$$\langle q_f, t_f|\hat{Q}_H(t_b)\hat{Q}_H(t_a)|q_i, t_i\rangle$$

za $t_b > t_a$. Deleći interval $t_f - t_i$ kao u prvoj sekciji primenjujući relacije kompletnosti imamo

$$\begin{aligned}\langle q_f, t_f|\hat{Q}_H(t_b)\hat{Q}_H(t_a)|q_i, t_i\rangle &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f|q_n, t_n\rangle\langle q_n, t_n|\dots|q_{b+1}, t_{b+1}\rangle \\ &\times \langle q_{b+1}, t_{b+1}|\hat{Q}_H(t_b)|q_b, t_b\rangle\langle q_b, t_b| \\ &\dots|q_{a+1}, t_{a+1}\rangle\langle q_{a+1}, t_{a+1}|\hat{Q}_H(t_a)|q_a, t_a\rangle\dots\langle q_1, t_1|q_i, t_i\rangle \\ &= \int dq_1 \dots dq_n q_b q_a \langle q_f, t_f|q_n, t_n\rangle \dots \langle q_1, t_1|q_i, t_i\rangle \\ &= \int Dq \int Dp\, q(t_b)q(t_a)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q}-H(p,q))}. \end{aligned} \tag{1.3.67}$$

Vremensko uredjenje dva operatora je definisano sa

$$T(\hat{Q}_H(t_b)\hat{Q}_H(t_a)) = \begin{cases} \hat{Q}_H(t_b)\hat{Q}_H(t_a), & t_b > t_a \\ \hat{Q}_H(t_a)\hat{Q}_H(t_b), & t_a > t_b \end{cases}. \tag{1.3.68}$$

Onda je

$$\begin{aligned}&\langle q_f, t_f|T(\hat{Q}_H(t_1)\dots\hat{Q}_H(t_n))|q_i, t_i\rangle \\ &= \int Dq \int Dp\, q(t_1)\dots q(t_n)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q}-H(p,q))}. \end{aligned} \tag{1.3.69}$$

Vakumska očekivana vredenost vremenskog urednja operatora koordinate se dobija uzimanjem limesa $t_i \to -\infty e^{-i\delta}$ and $t_f \to \infty e^{-i\delta}$. Ovi limesi izdvajaju osnovna stanja u dalekoj prošlosti odnosno budućnosti pa je

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|T(\hat{Q}_H(t_1)\dots\hat{Q}_H(t_n))|\Omega\rangle \\ &= \lim_{\substack{t_f\to\infty e^{-i\delta} \\ t_i\to-\infty e^{-i\delta}}} \frac{\int Dq \int Dp\, q(t_1)\dots q(t_n)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q}-H(p,q))}}{\int Dq \int Dp\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{q}-H(p,q))}} \\ &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)} \frac{\int Dq \int Dp\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt(p\dot{q}-H(p,q)+Jq)}}{\int Dq \int Dp\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt(p\dot{q}-H(p,q))}}\Big|_{J=0} \\ &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0} \end{aligned} \tag{1.3.70}$$

Ova vakuumska očekivana vrednost je n tačkasta Grinova funkcija (korelator)

$$G^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \langle\Omega|T(\hat{Q}_H(t_1)\dots\hat{Q}_H(t_n))|\Omega\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0}. \tag{1.3.71}$$

Chapter 2

Funkcionalni izvod i integral

Funkcija više promenljivih $g = g(x_1, \ldots, x_n)$ je preslikavanje iz R^n u R. Funkcional $F[f(x)]$ preslikava funkcije u brojeve $F : f(x) \to R$. Diferencijal funkcije $g = g(x_1, \ldots, x_n)$ je

$$dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \tag{2.0.1}$$

Želimo da definišemo funkcionalni izvod. Ako diskretne nezavisno promenljive $x_1, \ldots, x_n$ prelaze u kontinualnu promenljivu x, a $\sum \to \int$ to (2.0.1) prelazi u

$$\delta F[f(x)] = \int \mathrm{d}y \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) \ ,$$

Izraz

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$$

je funkcionalni izvod. Dosta formalnije funkcionalni izvod se definiše prema

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \epsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon} \ . \tag{2.0.2}$$

Funkcionalni integral je generalizacija Gausovog integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y e^{-\frac{a}{2}y^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \ , \quad \mathrm{Re}a > 0 \ , \tag{2.0.3}$$

Gausov jednodimenzioni integral se lako generališe na višedimenzioni. Ako uzmemo da je $Y = (y_1 \ldots y_n)^T$, $\rho = (\rho_1 \ldots \rho_n)^T$ i A je $n \times n$ simetrična matrica onda

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n e^{-\frac{1}{2}Y^TAY + \rho^TY} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\rho^TA^{-1}\rho} \ . \tag{2.0.4}$$

U sledećem koraku gornji izraz generalizujemo na funkcionalni integral

$$\int D\varphi e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \varphi(x)A(x,y)\varphi(y) + \int \mathrm{d}x\rho(x)\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\rho(x)A^{-1}(x,y)\rho(y)} \ , \tag{2.0.5}$$

gde je sada A beskonačno dimenziona matrica.

Uvodeći kompleksne promenljive

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \ , \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

uz

$$\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \equiv 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.0.7}$$

Gausov integral je

$$\int \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}e^{-\bar{z}az} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}ye^{-a(x^2+y^2)} = \frac{2\pi}{a} \ . \tag{2.0.8}$$

Neka je $Z = (z_1 \dots z_n)^T$ i $\bar{Z} = (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_n)^T$ i neka je A hermitska matrica onda

$$(2\pi)^{-n/2}\int \mathrm{d}z_1\mathrm{d}\bar{z}_1 \dots \int \mathrm{d}z_n\mathrm{d}\bar{z}_n e^{-\bar{Z}^T AZ} = \frac{1}{\det A} \ . \tag{2.0.9}$$

Generalizacijom dobijamo sledeći funkcionalni integral

$$\int D\phi D\phi^* e^{-\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\phi^*(x)A(x,y)\phi(y)} = \frac{1}{\det A} \tag{2.0.10}$$

odnosno

$$\int D\phi D\phi^* e^{-\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\phi^*(x)A(x,y)\phi(y)+\int \mathrm{d}x(J\phi^*+J^*\phi)} = \frac{1}{\det A}e^{\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ^*(x)A^{-1}(x,y)J(y)} \ . \tag{2.0.11}$$

Chapter 3

Funkcionalni integral u kvantnoj teoriji polja: skalarno polje

Skalarno polje

$$\phi(x) \equiv \phi_{\mathbf{x}}(t) \tag{3.0.1}$$

je sistem sa beskonačno puno stepeni slobode. Veza izmedju operatora skalarnog polja u Šredingerovoj, $\hat{\phi}(0,\mathbf{x})$ i u Hajzenbergovoj slici, $\hat{\phi}(t,\mathbf{x})$ je standardna

$$\hat{\phi}(t,\mathbf{x}) = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(0,\mathbf{x})e^{-i\hat{H}t} \; . \tag{3.0.2}$$

Po analogiji sa relacijom (1.1.11) imamo

$$\hat{\phi}(t,\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x}),t\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x}),t\rangle \; . \tag{3.0.3}$$

Amplituda za prelazak iz početne konfiguracije $\phi'(\mathbf{x})$ u trenutku t_i u finalnu konfiguraciju $\phi''(\mathbf{x})$ u trenutku t_f je

$$\langle\phi''(\mathbf{x}),t_f|\phi'(\mathbf{x}),t_i\rangle = \int_{\substack{\phi(t_f,\mathbf{x})=\phi''(\mathbf{x})\\ \phi(t_i,\mathbf{x})=\phi'(\mathbf{x})}} D\phi D\pi e^{i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x(\pi\dot{\phi}-\mathcal{H}(\pi,\phi))} \; , \tag{3.0.4}$$

gde je π generalisani impuls, a $\mathcal{H}(\pi,\phi)$ gustina hamiltonijana.

U limesu $t_i \to -\infty e^{-i\delta}$, $t_f \to \infty e^{-i\delta}$ dobijamo vakuum-vakuum amplitudu prelaza

$$Z[J] = \langle\Omega|\Omega\rangle_J = N\int D\phi D\pi e^{i\int \mathrm{d}^4x(\pi\dot{\phi}-\mathcal{H}(\pi,\phi)+J\phi)} \; , \tag{3.0.5}$$

gde smo uveli i interakciju polja sa spoljnim izvorom J. Ako je podintegralna funkcija kvadratna po impulsima onda se po impulsima lako integrali pa dobijamo

$$Z[J] = \langle\Omega|\Omega\rangle_J = N\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}+J\phi)} \; . \tag{3.0.6}$$

Totalni Hamiltonijan je zbir 'pravog' Hamiltonijana $H = H_0 + H_{\mathrm{int}}$ i člana $J\varphi$:

$$H_T = H_0 + H_{\mathrm{int}} - \int \mathrm{d}^4x J\hat{\varphi} \; .$$

Osnovno stanje totalnog Hamiltonijana je $|\Omega\rangle_J$, a pravog Hamiltonijana ($J = 0$) je $|\Omega\rangle$. Amplituda prelaza iz vakuuma u vakuum u prisustvu izvora je

$$\langle\Omega|\Omega\rangle_J = \langle\Omega|Te^{i\int \mathrm{d}^4xJ\hat{\phi}}|\Omega\rangle \tag{3.0.7}$$

gde je $\hat{\phi}$ operator polja 'prave' teorije u Hajzenbergovoj slici. On je na osnovu (9.0.6) operator skalarnog polja u interakcionoj slici totalnog Hamiltonijana

$$\phi(x) = e^{iH(t-t_0)}\phi_S(0,\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \ , \tag{3.0.8}$$

jer je sada H_0 zapravo $H = H_0 + H_{\rm int}$.

Funkcional $Z[J]$ je vakuum-vakuum amplituda prelaza u prisustvu izvora

$$\begin{aligned} Z[J] &=_J \langle\Omega|\Omega\rangle_J = \langle\Omega|Te^{i\int \mathrm{d}^4xJ\hat{\phi}}|\Omega\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int \mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\langle\Omega|T\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)|\Omega\rangle J(x_1)\dots J(x_n). \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

U gornjem izrazu operatori i stanja su u Hajzenbergovoj slici, dok je $n-$ tačkasta Grinova funkcija (korelator)

$$G^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = \langle\Omega|T(\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n))|\Omega\rangle \ . \tag{3.0.10}$$

Funkcional $Z[J]$ možemo razviti u funkcionalni red

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n\frac{\delta^{(n)}Z[J]}{\delta J(x_n)\dots\delta J(x_1)}\Big|_{J=0}J(x_1)\dots J(x_n) \ . \tag{3.0.11}$$

Poredjenjem (3.0.11) i (3.0.9) sledi

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{i^n}\frac{\delta^{(n)}Z[J]}{\delta J(x_n)\dots\delta J(x_1)}\Big|_{J=0} \\ &= \frac{\int D\phi\phi(x_1)\dots\phi(x_n)e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}}}{\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}}} \ . \end{aligned} \tag{3.0.12}$$

Dakle

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}G^{(n)}(x_1,\dots,x_n)J(x_1)\dots J(x_n) \ . \tag{3.0.13}$$

Naglasimo još jednom da je

$$\langle\Omega|T\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)|\Omega\rangle = \frac{\int D\phi\phi(x_1)\dots\phi(x_n)e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}}}{\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}}} \ . \tag{3.0.14}$$

U operatorskom formalizmu za n-tačkastu Grinovu funkciju dobija se (Gell-Mann-Low jednačina)

$$\langle\Omega|T\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\hat{\phi}_I(x_1)\dots\hat{\phi}_I(x_n)e^{-i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{H}_I}|0\rangle}{\langle 0|Te^{-i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{H}_I}|0\rangle} \ , \tag{3.0.15}$$

gde su operatori ϕ_I u interakcionoj slici, $\mathcal{H}_I$ je gustina Hamiltonijana interakcije u interakcionoj slici a $|0\rangle$ vakuum slobodne teorije.

Ako gustina Lagranžijana ima oblik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)\ , \tag{3.0.16}$$

genereralisani impuls je $\pi = \dot{\phi}$ pa je

$$Z[J] = N\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi)} \tag{3.0.17}$$

Ovaj integral nije dobro definisan jer je podintegralna funkcija oscilatorna. Postoje dva načina da se on učini konvergentnim i na taj način definiše. Prvi je prelazak na euklidski prostor Vikovom rotacijom. Euklidske koordinate obeležavaćemo sa crtom:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= (\bar{x}^0, \bar{\mathbf{x}}) = (ix^0, \mathbf{x}) \\
\bar{p} &= (\bar{p}^0, \bar{\mathbf{p}}) = (-ip^0, \mathbf{p}) \\
(\partial_\mu\phi)^2 &= (\partial_0\phi)^2 - (\partial_i\phi)^2 = -(\bar{\partial}_0\phi)^2 - (\bar{\partial}_i\phi)^2 = -(\bar{\partial}_\mu\phi)^2 \\
\mathrm{d}^4x &= -i\mathrm{d}^4\bar{x} \\
p^2 &= -\bar{p}^2 \\
x^2 &= -\bar{x}^2 \\
p_\mu x^\mu &= p^0x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \bar{p}^0\bar{x}^0 - \bar{\mathbf{p}}\cdot\bar{\mathbf{x}} \\
\bar{p}\cdot\bar{x} &= \bar{p}^0\bar{x}^0 + \bar{\mathbf{p}}\cdot\bar{\mathbf{x}} = p^0x^0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \\
iS &= i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L} = -S_E
\end{aligned} \tag{3.0.18}$$

Vikova rotacija u koordinatnom i u impulsnom prostoru vrše se na suprotne strane. Euklidski generišući funkcional je

$$\begin{aligned}
Z_E[J] &= N_E\int D\phi e^{\frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}^4\bar{x}(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi)} \\
&= N_E\int D\phi e^{-\frac{1}{\hbar}(S_E - \int \mathrm{d}^4\bar{x}J\phi)}\ .
\end{aligned} \tag{3.0.19}$$

U integralu se po euklidskom vremenu $\bar{x}^0$ integrali od $-\infty$ do ∞. Bez gubitka opštosti zbog stabilnosti teorije možemo uzeti $V(\phi) \geq 0$ pa je $S_E > 0$. Euklidske Grinove funkcije su

$$G_E^{(n)}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \frac{\delta^{(n)}Z_E[J]}{\delta J(\bar{x}_n)\ldots\delta J(\bar{x}_1)}\Big|_{J=0}\ . \tag{3.0.20}$$

Drugi način da se funkcionalni integral definiše je da se gustini Lagranžijana doda imaginaran član $+i\epsilon\phi^2/2$. Generišući funkcional je onda

$$Z[J] = N\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - i\epsilon)\phi^2 - V(\phi) + J\phi)}\ . \tag{3.0.21}$$

Ovaj integral više nije oscilatoran i dobro je definisan.

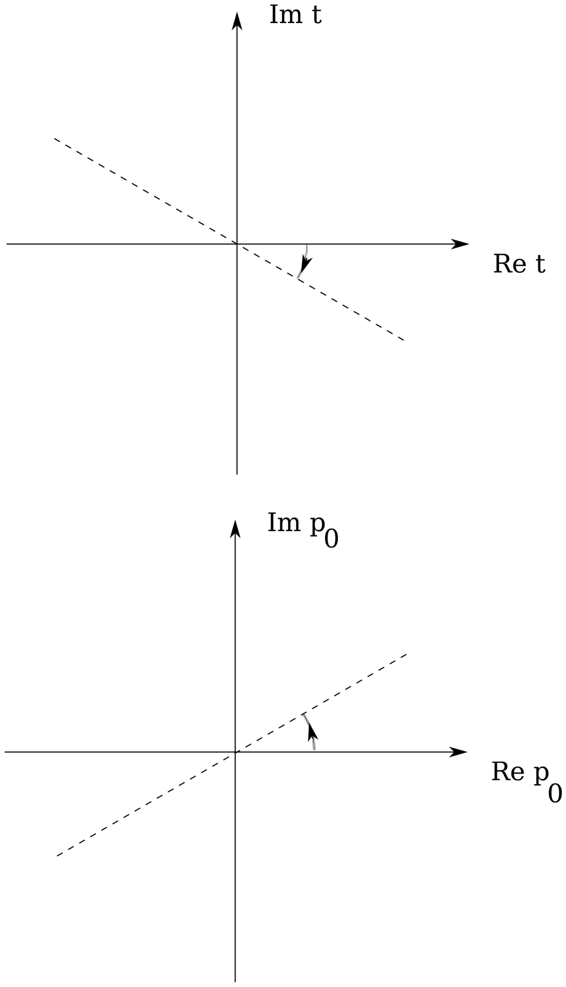

Figure 3.1:

3.1 Slobodno skalarno polje

Generišući funkcional slobodnog skalarnog polja je

$$Z_0[J] = N \int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2-i\epsilon)\phi^2 + J\phi)} \ . \tag{3.1.22}$$

Uvedimo

$$S_J = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\phi(x)\Big(-\Box - (m^2 - i\epsilon)\Big)\phi(x) + \int \mathrm{d}^4xJ(x)\phi(x) \ . \tag{3.1.23}$$

Klasično polje ϕ_c je rešenje klasične jednačine kretanja (u prisustvu izvora)

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_c = J \ . \tag{3.1.24}$$

Lako se vidi da je

$$\phi_c(x) = -\int \mathrm{d}^4y\Delta_F(x-y)J(y) \ , \tag{3.1.25}$$

gde je

$$(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) \tag{3.1.26}$$

Smenom

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \eta(x) \tag{3.1.27}$$

funkcional Z_0 postaje

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= N\int D\eta e^{i\int \mathrm{d}^4x(\varphi_c+\eta)\Big(-\frac{1}{2}\Box - \frac{1}{2}(m^2-i\epsilon)\Big)(\phi_c+\eta)} e^{i\int \mathrm{d}^4x(\phi_c+\eta)J} \\ &= Ne^{i\int \mathrm{d}^4x\frac{1}{2}\phi_cJ}\int D\eta e^{\frac{i}{2}\int d^4x\eta\Big(-\Box-(m^2-i\epsilon)\Big)\eta} \\ &= N\frac{1}{\sqrt{\det(-\Box-(m^2-i\epsilon))}}e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} \ . \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Do istog rezultata možemo doći primenom (2.0.5): $\rho = iJ$ i

$$A(x,y) = i(\Box_x + m^2 - i\epsilon)\delta^{(4)}(x-y) \ . \tag{3.1.29}$$

Inverzni operator $A^{-1}(x,y)$ operatora $A(x,y)$ definisan je preko

$$\int \mathrm{d}^4zA(x,z)A^{-1}(z,y) = \delta^{(4)}(x-y) \ . \tag{3.1.30}$$

Prećićemo u impulsni prostor

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\phi(x)A(x,y)\phi(y) &= \int\frac{\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\tilde{\phi}(p)e^{-ip\cdot x}A(x,y)\tilde{\phi}(q)e^{-iq\cdot y} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\tilde{\phi}(p)\Big(\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4ye^{-ip\cdot x}A(x,y)e^{-iq\cdot y}\Big)\tilde{\phi}(q) \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^8}\tilde{\phi}(p)\tilde{A}(-p,-q)\tilde{\phi}(q) \ . \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

U našem slučaju

$$\begin{aligned}\tilde{A}(-p,-q) &= \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y e^{-ip\cdot x}A(x,y)e^{-iq\cdot y} \\ &= i(2\pi)^4(-p^2+m^2-i\epsilon)\delta^{(4)}(p+q)\ . \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

Operator A u impulsnom prostoru nije diferencijalan operator. Inverzni operator A^{-1} u impulsnom prostoru je

$$\widetilde{A^{-1}}(p,q) = i(2\pi)^4\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\delta^{(4)}(p+q)\ , \tag{3.1.33}$$

jer iz (3.1.30) sledi

$$\int \mathrm{d}^4q\tilde{A}(p,q)\widetilde{A^{-1}}(-q,k) = (2\pi)^8\delta^{(4)}(p+k)\ . \tag{3.1.34}$$

Inverzni operator se u koordinatnom prostoru lako dobija Furijeovom transformacijom

$$\begin{aligned}A^{-1}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4q\widetilde{A^{-1}}(p,q)e^{-ip\cdot x-iq\cdot y} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)} \\ &= -i\frac{1}{\Box_x+m^2-i\epsilon}\delta^{(4)}(x-y) \\ &= i\Delta_F(x-y)\ . \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Onda se lako ponovo dobija (3.1.28).

Uradimo isti račun u euklidkom prostoru. Generišući euklidski funkcional je

$$\begin{aligned}&Z_{0E}[J] = N_E\int D\phi e^{-\int \mathrm{d}^4\bar{x}(\frac{1}{2}\bar{\partial}_\mu\varphi\bar{\partial}_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2-J\phi)} \\ &= N_E\int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4\bar{x}\mathrm{d}^4\bar{y}\phi(\bar{x})(-\Box_x+m^2)\delta^{(4)}(\bar{x}-\bar{y})\phi(\bar{y})+\int \mathrm{d}^4\bar{x}J\phi}\ . \end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Sada je

$$A(\bar{x},\bar{y}) = (-\Box_x+m^2)\delta^{(4)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Inverzni operator se nalazi analogno Minkovskijevom slučaju

$$A^{-1}(\bar{x},\bar{y}) = \int\frac{\mathrm{d}^4\bar{p}}{(2\pi)^4}\frac{e^{-i\bar{p}\cdot(\bar{y}-\bar{x})}}{\bar{p}^2+m^2} = \Delta_E(\bar{y}-\bar{x})\ ; \tag{3.1.37}$$

i on je dobro definisan jer podintegralna funkcija nema polova na realnoj osi $\bar{p}^0$. Takodje

$$(-\Box_x^E+m^2)\Delta_E(\bar{y}-\bar{x}) = \delta^{(4)}(\bar{y}-\bar{x})\ . \tag{3.1.38}$$

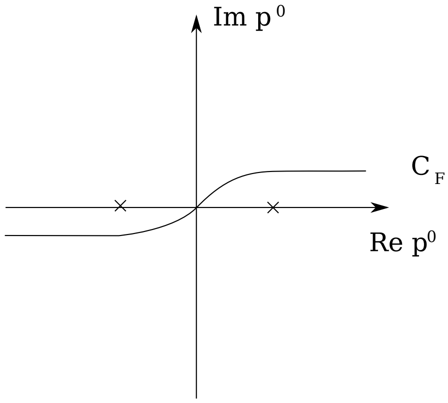

Figure 3.2:

Euklidski propagator možemo analitički produžiti.

$$
\begin{aligned}
\Delta_E &\rightarrow -i\int_{-i\infty}^{+i\infty}\mathrm{d}p^0\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-i[p^0(y^0-x^0)+\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})]}}{-p^2+m^2}\\
&= i\int_{-i\infty}^{+i\infty}\mathrm{d}p^0\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(y-x)}}{p^2-m^2}\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(y-x)}\\
&= i\Delta_F(y-x)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.1.39}
$$

gde smu u drugom koraku napravili smenu $\mathbf{p}\rightarrow-\mathbf{p}$ a zatim smo konturu integracije rotirali kao na slici 3.2. Dakle

$$
Z_{0E}=e^{\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4\bar{x}\mathrm{d}^4\bar{y}J(\bar{x})\Delta_E(\bar{x}-\bar{y})J(\bar{y})}\ . \tag{3.1.40}
$$

U prethodnim lekcijama smo generišući funkcional uveli na primeru jednog skalarnog polja. Generalizacija na slučaj više skalarnih polja je prirodna. Ako sa $\phi_a(x),\ a=1,\dots n$ obeležimo skup polja a sa $J^a(x)$ skup izvora onda je generišući funkcional

$$
Z[J]=N\int D\phi e^{iS(\phi)+\int\mathrm{d}^4xJ^a\phi_a}\ . \tag{3.1.41}
$$

gde je

$$
D\phi=\prod_a D\phi_a\ .
$$

Ako imamo n slobodnih skalarnih polja

$$
S=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}y\phi_a(x)K_{ab}(x,y)\phi_b(y) \tag{3.1.42}
$$

onda je

$$
Z[J]=e^{-\frac{i}{2}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}yJ^a(x)K^{-1}_{ab}(x,y)J^b(y)}\ . \tag{3.1.43}
$$

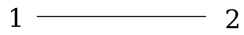

Figure 3.3: Dvotačkasta Grinova funkcija

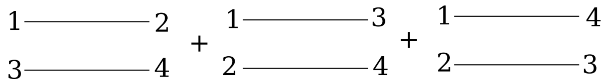

Figure 3.4: Četrvorotačkasta Grinova funkcija

3.2 Grinove funkcije za slobodno skalarno polje

Dvo-tačkasta Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\Big|_{J=0} \\ &= i\Delta_F(x_1-x_2) \\ &= \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Tro-tačkasta Grinova funkcija je

$$G^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = 0 \ , \tag{3.2.45}$$

dok je četvorotačkasta

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -(\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) \\ &+ \Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)) \\ &= \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)|0\rangle\langle 0|T\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_3)|0\rangle\langle 0|T\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\hat{\varphi}(x_4)|0\rangle\langle 0|T\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_2)|0\rangle \\ &= \langle 0|T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Dobili smo Vikovu teoremu. Grinova $n-$tačkasta funkcije u impulsnom prostoru $\tilde{G}^{(n)}(p_1,\dots p_n)$ se definišu prema

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+\dots+p_n)\tilde{G}^{(n)}(p_1,\dots p_n) \\ &= \int \mathrm{d}^4x_1\dots\mathrm{d}^4x_n e^{i(p_1\cdot x_1+\dots+p_n\cdot x_n)}G^{(n)}(x_1,\dots x_n) \ . \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

$\delta-$ funkcija u prethodnom izrazu odražava homogenost prostor-vremena. Lako se nalazi

$$\tilde{G}^{(2)}(p,-p) = \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} \ . \tag{3.2.48}$$

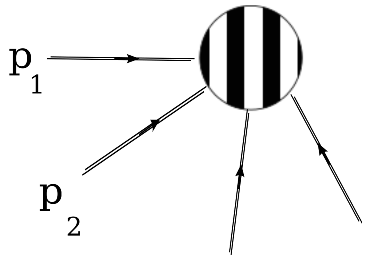

Figure 3.5: Četvorotačkasta Grinova funkcija

3.3 Interakciona teorija skalarnog polja-ϕ^4 teorija

Vakuum-vakuum amplituda prelaza u prisustvu izvora $Z[J] =_J \langle\Omega|\Omega\rangle_J$ je

$$Z[J] = N \int D\phi e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{\text{int}}+J\phi)} \ . \tag{3.3.49}$$

Kako je

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i\int \mathrm{d}y J\phi} = i\phi(x) e^{i\int \mathrm{d}y J\phi} \tag{3.3.50}$$

to je

$$Z[J] = N e^{i\int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} \int D\phi e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}_0+J\phi)} \tag{3.3.51}$$

odnosno

$$Z[J] = \frac{e^{i\int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J]}{e^{i\int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J]\Big|_{J=0}} \ . \tag{3.3.52}$$

Ova formula nam omogućava da nadjemo generišući funkcional preko funkcionala za slobodnu teoriju polja.
Gustina Lagranžijana interakcije ϕ^4 teorije je

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ . \tag{3.3.53}$$

Odredimo generišući funkcional $Z[J]$ primenom (3.3.52). Smatraćemo da je konstanta interakcije, λ mala i naćićemo Z perturbativno. Brojilac je

$$\begin{aligned} \text{Brojilac} &= e^{-i\frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4} e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2} \\ &= \left(1 - i\frac{\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^4 + \dots\right) e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2} \ , \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

gde smo koristili skraćenice $J_1 = J(x_1)$, $\Delta_{12} = \Delta(x_1 - x_2)$ i $J_2 = J(x_2)$.

Funkcionalni izvodi:

- $$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
$$= -\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2) e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
- $$\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^2 e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
$$= \Big[(\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2))^2 + i\Delta(0)\Big] e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
- $$\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^3 e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
$$= \Big[-(\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2))^3$$
$$-3i\Delta(0)\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2)\Big] e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
- $$\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\Big)^4 e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}$$
$$= \Big[-3(\Delta(0))^2 + (\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2))^4$$
$$+6i\Delta(0)(\int \mathrm{d}^4x_2 \Delta(x-x_2)J(x_2))^2\Big] e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}\ . \tag{3.3.55}$$

Prema tome

$$\begin{aligned}\text{Brojilac} &= \Big[1 - \frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x[3(i\Delta(0))^2 + 6i\Delta(0)(\int \mathrm{d}^4x_2 i\Delta(x-x_2)iJ(x_2))^2 \\ &+ (\int \mathrm{d}^4x_2 i\Delta(x-x_2)iJ(x_2))^4]\Big] e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2}\ . \end{aligned} \tag{3.3.56}$$

Prvi član proporcionalan sa konstantom interakcije je tzv. vakuumski dijagram, dok preostali imaju izvore na krajevima. Imenilac je

$$\text{Imenilac} = 1 - \frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x 3(i\Delta(0))^2\ . \tag{3.3.57}$$

Normalizacija uklanja vakuumski dijagram. Ovo važi generalno.
Generišući funkcional je onda

$$\begin{aligned} Z[J] &= \Big[1 - \frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\Big(6i\Delta_F(0)(\int \mathrm{d}y_2 i\Delta(x-y_2)iJ(y_2))^2 \\ &+ (\int \mathrm{d}y_2 i\Delta(x-y_2)iJ(y_2))^4\Big)\Big] e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4x_2 J_1\Delta_{12}J_2} \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

Fajnmanova pravila ϕ^4 teorije u koordinatnom prostoru su:

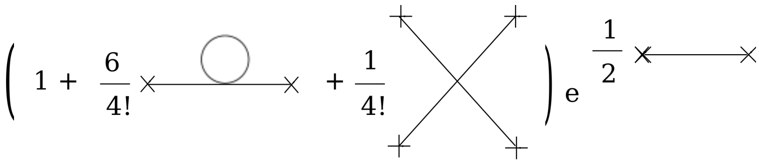

Figure 3.6: Generišući funkcional $Z[J]$

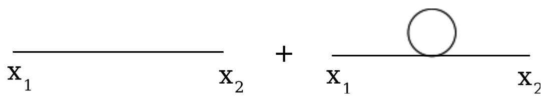

Figure 3.7: Dvotačkasta Grinova funkcija

Generišući funkcional je grafički predstavljen na slici 3.6.
Diferenciranjem $Z[J]$ dobijamo Grinove funkcije

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)}\Big|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2) \\
&- \frac{\lambda}{2} \Delta_F(0) \int \mathrm{d}^4 x \Delta_F(x - x_1) \Delta_F(x - x_2) + O(\lambda^2)
\end{aligned}
$$

$4-$tačkasta Grinova funkcija je definisana sa

$$
G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)}\Big|_{J=0} . \tag{3.3.59}
$$

Ova funkcija je prikazana na slici 3.8.

Dvo-tačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru je

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}^{(2)}(p, -p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&- \frac{i\lambda}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \Big(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \Big)^2 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} .
\end{aligned} \tag{3.3.60}
$$

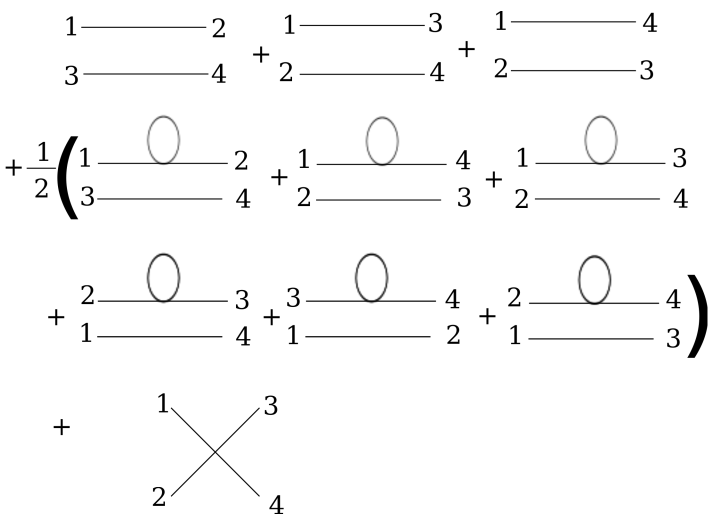

Figure 3.8: Četvorotačkasta Grinova funkcija

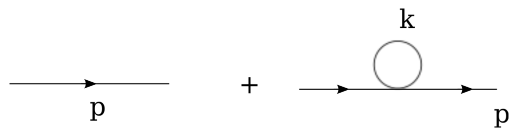

Figure 3.9: Dvotačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru

Dvo-tačkasta Grinova funkcija u impulsnom prostoru prikazana je na slici 3.9. Fajnmanaova pravila u impulsnom prostoru data su na slici
Faktor simetrije dijagrama označava broj ekvivalentnih načina da se izvrši data kontrakcija. Ti faktori nam se pojavljuju pri diferenciranju generišućeg funkcionala po struji.

Odredimo faktor simetrije za dijagrame sa slike 3.10.

Prvi dijagram se dobija iz člana prvog reda

$$-\frac{i\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^4x\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(x)|0\rangle \ . \tag{3.3.61}$$

Faktor simetrije je

$$S^{-1} = \frac{1}{4!}4\cdot 3 = \frac{1}{2} \ . \tag{3.3.62}$$

Figure 3.10: Faktor simetrije

Drugi dijagram se dobija iz

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{-i\lambda}{4!}\Big)^2\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(x)\phi^4(y)|0\rangle \ . \tag{3.3.63}$$

Faktor simetrije je

$$S^{-1}=\Big(\frac{1}{4!}\Big)^2 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2=\frac{1}{6} \ . \tag{3.3.64}$$

3.4 Povezane Grinove funkcije

Dijagrami u prva tri reda na slici 3.8 su nepovezani dok je poslednji dijagram povezan. Slično dijagrami na slici 3.7 su povezani. Nepovezni dijagrami su sastavljeni od povezanih. Povezani dijagrami su relevantni za odredjivanje amplituda prelaza u procesima.

Generišući funkcional za povezane Grinove funkcije $W[J]$ je definisan sa

$$Z[J]=e^{iW[J]} \ . \tag{3.4.65}$$

Povezane Grinove funkcije $G_c^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ računaju prema

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{1}{i^n}\frac{\delta^{(n)}iW[J]}{\delta J(x_n)\dots\delta J(x_1)}\Big|_{J=0} \\ &= \langle\Omega|T\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n)|\Omega\rangle_c \ . \end{aligned} \tag{3.4.66}$$

Za slobodno skalarno polje generišući funkcional povezanih Grinovih funkcija je

$$iW_0[J]=-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) \tag{3.4.67}$$

pa je

$$G_c^{(2)}(x_1,x_2)=i\Delta_F(x_1-x_2) \tag{3.4.68}$$

dok su ostale povezane Grinove funkcije jednake nuli.

Chapter 4

Efektivno dejstvo i verteksne funkcije

Klasično (ili srednje) polje definišemo prema

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \ . \tag{4.0.1}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \frac{1}{i}\frac{\delta \ln Z[J]}{\delta J(x)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \\
&= \frac{\int D\phi \phi e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}+J\phi)}}{\int D\phi e^{i\int \mathrm{d}^4x(\mathcal{L}+J\phi)}} \\
&= \frac{\langle\Omega|\hat{\phi}(x)|\Omega\rangle_J}{\langle\Omega|\Omega\rangle_J} \ .
\end{aligned} \tag{4.0.2}$$

Dakle klasično polje je vakuumska očekivana vrednost operatora polja $\hat{\phi}$ u prisustvu izvora i ono je istovremeno i polje i funkcional

$$\varphi_c = \varphi_c(x, J(x)] \ . \tag{4.0.3}$$

Ova relacija se može invertovati tj. možemo struju da izrazimo preko klasičnog polja $J = J(\varphi_c)$. Efektivno dejstvo je Ležandrova transformacija funkcionala povezanih Grinovih funkcija

$$\Gamma[\varphi_c] = W[J] - \int \mathrm{d}^4x J(x)\varphi_c(x) \ , \tag{4.0.4}$$

gde je J izraženo preko klasičnog polja. Drugim rečima $\delta\Gamma[\varphi_c]/\delta J = 0$, tj. efektivno dejstvo zavisi od klasičnog polja. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(y)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi_c(y)} - \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)}\varphi_c(x) - J(y) \\
&= \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi_c(y)} - \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(y)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - J(y) \\
&= -J(y) \ .
\end{aligned} \tag{4.0.5}$$

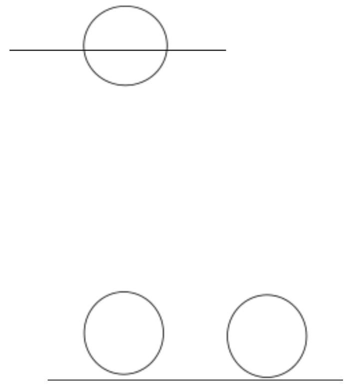

Figure 4.1: Prvi dijagram jeste 1PI, dok drugi to nije

Nadjimo efektivno dejstvo za slobodnu teoriju skalarnog polja. Klasično polje je

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x)} = -\int \mathrm{d}^4 y \Delta_F(x-y) J(y) \tag{4.0.6}$$

i ono zadovoljava klasičnu jednačinu kretanja

$$(\Box_x + m^2)\varphi_c(x) = J(x) \ . \tag{4.0.7}$$

Efektivno dejstvo je

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_c] &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y J(x)\Delta_F(x-y)J(y) - \int \mathrm{d}^4 x J\varphi_c \\ &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x \varphi_c(\Box_x + m^2)\varphi_c \\ &= S \ . \end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Efektivno dejstvo za slobodnu teoriju poklapa se sa klasičnim dejstvom. U interakcionoj teorije efektivno dejstvo

$$\Gamma = S + \text{kvantne popravke}$$

je generalizacija klasičnog dejstva; zato se još naziva i kvantno dejstvo. Jednočestični ireducibilni (1PI) dijagrami su povezani dijagrami koji se presecanjem jedne unutrašnje linije ne mogu podeliti na dva dijagrama. Efektivno dejstvo je generišući funkcional za jednočestične ireducibilne dijagrame (1PI)

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_n \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}^4 x_1 \dots \mathrm{d}^4 x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots x_n)\varphi_c(x_1)\dots\varphi_c(x_n) \ . \tag{4.0.9}$$

1PI dijagrami sa n spoljašnjih linija su

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_c(x_1)\dots\delta\varphi_c(x_n)}\Big|_{\varphi=0} \ . \tag{4.0.10}$$

Furijeovom transformacijom dobijamo 1PI dijagrame u impulsnom prostoru

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+\dots+p_n)\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1,\dots p_n) \\ = & \int \mathrm{d}^4x_1\dots\mathrm{d}^4x_n e^{i(p_1\cdot x_1+\dots+p_n\cdot x_n)}\Gamma^{(n)}(x_1,\dots x_n)\ . \end{aligned} \tag{4.0.11}$$

Dijagrami bez petlji nisu (1PI) dok jednočestični ireducibilni dijagrami za $n > 2$ se nazivaju verteksnim dijagramima.

Za slobodnu teoriju skalarnog polja je

$$\Gamma^{(2)}(x_1,x_2) = -(\Box + m^2 + i\epsilon)\delta^{(4)}(x_1-x_2) \tag{4.0.12}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p,-p) = p^2 - m^2 + i\epsilon\ . \tag{4.0.13}$$

4.1 Background field method

Neka je ϕ_a skup polja a J^a odgovarajući izvori. Vakuum-vakuum amplituda prelaza u prisustvu izvora je

$$Z[J] = e^{iW[J]} = N\int D\phi_a e^{iS(\phi)+i\int \mathrm{d}^4x J^a\phi_a}\ . \tag{4.1.14}$$

Koristeći definiciju efektivnog dejstva imamo

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} &= e^{\frac{i}{\hbar}(W[J]-\int \mathrm{d}x J^a\varphi_a)} \\ &= N\int D\phi_a e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi]+\int \mathrm{d}x J^a(\phi_a-\varphi_a))} \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Klasična polje obeležeḷi smo sa φ_a. Klasično dejstvo ćemo razviti oko klasične konfiguracije:

$$S(\phi) = S(\varphi) + \int \mathrm{d}x \frac{\delta S}{\delta\phi_a}\Big|_\varphi (\phi_a-\varphi_a) \tag{4.1.16}$$

$$+ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_a(x)\phi_b(y)}\Big|_\varphi (\phi_a(x)-\varphi_a(x))(\phi_b(y)-\varphi_b(y)) + \dots \tag{4.1.17}$$

Jednačina (ovo je kvantna jednačina kretanja)

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_a(x)} = -J^a(x) \tag{4.1.18}$$

se u najnižem redu svodi na

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_a(x)} = -J^a(x)\ . \tag{4.1.19}$$

Zamenom (4.1.19) i (4.1.16) u (4.1.15) imamo

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]}\int D\tilde{\varphi}_a e^{\frac{i}{2\hbar}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\tilde{\varphi}_a(x)S_{ab}(x,y)\tilde{\varphi}_b(y)} \tag{4.1.20}$$

gde je

$$S_{ab}(x,y) = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi_a(x)\phi_b(y)}\Big|_{\varphi} \ . \tag{4.1.21}$$

Polazna polja ϕ_a smo dekomponovali na klasična polja φ_a (background field) i kvantna polja $\tilde{\varphi}_a$ tj.

$$\phi_a = \varphi_a + \tilde{\varphi}_a \ . \tag{4.1.22}$$

U funkcionalnom integralu integralimo po kvantnim poljima. Jakobijan transformacije je 1. Uvodeći smenu

$$\varphi'_a = \sqrt{\hbar}\tilde{\varphi}_a \tag{4.1.23}$$

dobijamo

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{i\hbar}{2}\mathrm{trln} S_{ab} + \dots \ . \tag{4.1.24}$$

Prvi član je klasično dejstvo; naredni član je one-loop kvantna korekcija efektivnog dejstva. Ona je reda $\hbar$. Sledeći član bi bio reda $\hbar^2$ i bio bi two-loops. Razvoj po petljama je razvoj po stepenima $\hbar$.

Plankova konstanta $\hbar$ meri kvantnu prirodu dijagrama. Sada ćemo vratiti Plankovu konstantu u račun. Gustina Lagranžijana ima oblik

$$\mathcal{L} = \phi_i \Delta_{ij}^{-1}\phi_j + \mathcal{L}_{int} \ . \tag{4.1.25}$$

Jasno je da se verteksi množe sa $1/\hbar$ a propagatori sa $\hbar$. Broj petlji dijagrama (broj nezavisnih impulsa po kojima integralimo) je

$$L = I - V + 1 \ ,$$

gde je I broj unutrašnjih linija a V broj verteksa. Ukupni $\hbar$ faktor $1PI$ dijagrama je $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$. Razvoj po stepenima $\hbar$ je razvoj po petljama. $\hbar$ faktor dijagrama povezanih Grinovih funkcija G_c je $\hbar^{E+I-V} = \hbar^E \hbar^{L-1}$, gde je E broj spoljnih linija dijagrama. Za dijagram sa slike 4.2 je $E = 4, I = 4$ i $V = 3$.

4.2 Veza izmedju povezanih i $1PI$ Grinovih funkcija

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \delta^{(4)}(x_1 - x_2) &= \frac{\delta\varphi_c(x_1)}{\delta\varphi_c(x_2)} \\ &= \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta\varphi_c(x_1)}{\delta J(x)}\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi_c(x_2)} \\ &= -\int \mathrm{d}^4x \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi(x_2)} \ . \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Iz ovog izraza vidimo da je

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} = -\Big(\frac{\delta^2\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi(x_2)}\Big)^{-1} \ . \tag{4.2.27}$$

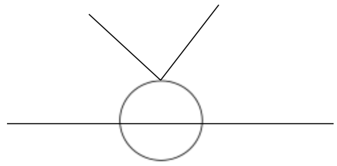

Figure 4.2:

Ako uzmemo da je $J = 0$ i ukoliko nema spontanog narušenja simetrije onda je $\varphi_c = 0$ pa dobijamo

$$-\int \mathrm{d}^4 x i G_c^{(2)}(x_1, x)\Gamma^{(2)}(x, x_2) = \delta^{(4)}(x_1 - x_2) \ . \tag{4.2.28}$$

Dakle,

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = i(G_c^{(2)}(x_1, x_2))^{-1} = \tag{4.2.29}$$

Diferenciranjem (4.2.26) po $J(x_3)$ dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta J(x_3)} \int \mathrm{d}^4 x \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi(x_2')} \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_1)\delta J(x)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)\delta\varphi(x_2')} \\ &+ \int \mathrm{d}^4 x_1' \int \mathrm{d}^4 x_3' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_1')} \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_3')\delta\varphi_c(x_1')\delta\varphi_c(x_2')} \frac{\delta\varphi_c(x_3')}{\delta J(x_3)} \ . \end{aligned}$$

Množenjem poslednje relacije sa

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2')\delta J(x_2)} \tag{4.2.30}$$

i integracijom po x_2' dobijamo

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_2)\delta J(x_1)} \\ &= \int \mathrm{d}^4 x_1' \mathrm{d}^4 x_2' \mathrm{d}^4 x_3' \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_1')} \\ &\times \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2)\delta J(x_2')} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_3)\delta J(x_3')} \frac{\delta^3 \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1')\delta\varphi_c(x_2')\delta\varphi_c(x_3')} \ . \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

U limesu $J \to 0$ i $\varphi_c \to 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= i \int \mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\mathrm{d}^4x_3' G_c^{(2)}(x_1, x_1')G_c^{(2)}(x_2, x_2') \\ &\times G_c^{(2)}(x_3, x_3')\Gamma^{(3)}(x_1', x_2', x_3') \ . \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Grafički

Dodavanjem jednog propagatora na svaku spoljnju nogu verteksne funkcije dobijamo povezanu 3−tačkastu Grinovu funkciju. Slično se dobija i inverzna relacija

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= -i \int \mathrm{d}^4x_1'\mathrm{d}^4x_2'\mathrm{d}^4x_3' (G_c^{(2)}(x_1, x_1'))^{-1}(G_c^{(2)}(x_2, x_2'))^{-1} \\ &\times (G_c^{(2)}(x_3, x_3'))^{-1}G_c^{(3)}(x_1', x_2', x_3') \ . \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

Grafički

Amputiranjem (uklanjanjem spoljnjih propagatora tj. množenjem sa inverznim propagatorima) povezane 3-tačkaste Grinove funkcije dobija se 3-tačkasta verteksna funkcija.

Slično se dobija

Chapter 5

Švinger-Dajsonove jednačine

Klasične jednačine kretanja dobijamo iz stacionarnosti dejstva pri infinitezimalnim transformacijama

$$\phi_a(x) \to \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \ . \tag{5.0.1}$$

U kvantnoj teoriji ćemo ispitati kako ove transformacije menjaju generišući funkcional

$$Z[J] = N \int D\phi e^{iS(\phi)+\int \mathrm{d}^4 x J^a \phi_a} \ . \tag{5.0.2}$$

gde je

$$D\phi = \prod_a D\phi_a \ .$$

Smena (5.0.1) ne menja meru integracije

$$D\phi' = D\phi \tag{5.0.3}$$

pa je

$$\begin{aligned} \int D\phi' e^{iS[\phi']+i\int \mathrm{d}^4 x J^a \phi'_a} &= \int D\phi e^{i(S[\phi]+\int \mathrm{d}^4 x \frac{\delta S}{\delta \phi_a}\delta\phi_a + \dots)+i\int \mathrm{d}^4 x J^a(\phi_a+\delta\phi_a)} \\ &= \int D\phi \Big[1 + i\int \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\delta S}{\delta\phi_a} + J_a\Big)\delta\phi_a\Big] e^{iS[\phi]+i\int \mathrm{d}^4 x J^a\phi_a} \end{aligned} \tag{5.0.4}$$

odakle je

$$\int D\phi \int \mathrm{d}^4 x \Big(\frac{\delta S}{\delta\phi_a} + J_a\Big)\delta\phi_a e^{iS[\phi]+i\int \mathrm{d}^4 x J^a\phi_a} = 0 \ . \tag{5.0.5}$$

Kako su varijacije $\delta\phi_a$ proizvoljne to je

$$\int D\phi \Big(\frac{\delta S}{\delta\phi_a} + J_a\Big) e^{iS[\phi]+i\int \mathrm{d}^4 x J^a\phi_a} = 0 \ . \tag{5.0.6}$$

Iz (5.0.6) vidimo da klasične jednačine kretanja važe kao vakumske očekivane vrednosti. (5.0.6) možemo prepisati u obliku

$$\Big(\frac{\delta S}{\delta\phi_a}\Big|_{\phi_a = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_a}} + J_a\Big) Z[J] = 0 \tag{5.0.7}$$

(5.0.5), (5.0.6) i (5.0.7) su Švinger-Dajsonove jednačine. Diferenciranjem (5.0.5) po $J_{a_1}(x_1)$ i uzimanjem $J = 0$ dobijamo

$$\int D\phi \frac{\delta S}{\delta \phi_a} i\phi_{a_1}(x_1) e^{iS} = -\int D\phi \delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) e^{iS} \tag{5.0.8}$$

tj.

$$\langle T \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \rangle_* = i\delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) \ , \tag{5.0.9}$$

gde $*$ znači da svi prostorno vremenski izvodi su van vremenskog uredjenja. Za slobodno skalarno polje

$$S = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4 x \phi (\Box + m^2) \phi \tag{5.0.10}$$

dobijamo

$$(\Box_x + m^2) \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle = -i\delta^{(4)}(x - x_1) \ . \tag{5.0.11}$$

Ukoliko je prisutna interakcija

$$S = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4 x \phi (\Box + m^2) \phi - \int \mathrm{d}^4 x V(\phi) \tag{5.0.12}$$

onda dobijamo

$$(\Box_x + m^2) \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle = -\langle \Omega | T V'(\hat{\phi}(x)) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle - i\delta^{(4)}(x - x_1) \tag{5.0.13}$$

odnosno

$$(\Box_x + m^2) \langle \Omega | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle = \langle \Omega | T (\Box_x + m^2) \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x_1) | \Omega \rangle - i\delta^{(4)}(x - x_1) \tag{5.0.14}$$

Vremensko uredjenje definisano funkcionalnim formalizmom

$$\langle T \mathcal{F}(\phi) \rangle = \frac{\int D\phi \mathcal{F}(\phi) e^{iS}}{\int D\phi e^{iS}} \tag{5.0.15}$$

je kovarijantno i ne poklapa se uvek sa vremenskim uredjenjem definisanim operatorskim formalizmom. Daljim diferenciranjem dolazimo do

$$\begin{aligned} & \langle T \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) \rangle \\ = \ & i \sum_{j=1}^{n} \langle \Omega | T \phi_{a_1}(x_1) \dots \delta_{aa_j} \delta^{(4)}(x - x_j) \dots \phi_{a_n}(x_n) | \Omega \rangle \ . \end{aligned} \tag{5.0.16}$$

Ovaj izraz je takodje poznat kao Švinger-Dajsonova jednačina. Članovi sa delta funkcijama su tzv. kontaktni članovi. Vidimo da klasične jednačine važe sa kvantnim poljima unutar korelacionih funkcija ali samo u kada se koordinata x ne poklapa sa koordinatama $x_1, \dots, x_n$.

Iste rezultate dobijamo polazeći od (5.0.7). Diferenciranjem ove jednačine po J_{a_1} i uzimanjum $J = 0$ dobijamo (5.0.9). Diferenciranjem po J_{a_1} i J_{a_1} i uzimanjum $J = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} \langle T \frac{\delta S}{\delta \phi_a} \phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) \rangle \ &= \ i \langle \Omega | \phi_{a_2}(x_2) | \Omega \rangle \delta_{aa_1} \delta^{(4)}(x - x_1) \\ &+ \ i \langle \Omega | \phi_{a_1}(x_1) | \Omega \rangle \delta_{aa_2} \delta^{(4)}(x - x_2) \ , \end{aligned} \tag{5.0.17}$$

što je specijalnio slučaj (5.0.16).

Chapter 6

Vordovi identiteti

U ovoj lekciji govorićemo o kvantnoj generalizaciji Neter teoreme koju smo pokazali na KTP1. Koordinate i polja se pri infinitezimalnim kontinualnim transformacijama menjaju prema

$$\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_a(x) &\to \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \ . \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

Varijacija forme polja je

$$\delta_0\phi_a(x) = \phi'_a(x) - \phi_a(x) \tag{6.0.2}$$

i važi

$$\delta_0\phi_a(x) = \delta\phi_a(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_a(x) \ . \tag{6.0.3}$$

Promena dejstva pri ovim transformacijama je

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}^4x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \\ &= \int \mathrm{d}^4x (\delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \Big[\partial_\mu j^\mu + \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Big)\delta_0\phi_a\Big] \ , \end{aligned} \tag{6.0.4}$$

gde je Neterina struja

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a + \mathcal{L}\delta x^\mu \ . \tag{6.0.5}$$

Ukoliko je teorija klasično invarijantna na transformacije (6.0.1), tj. $\delta S = 0$ tada dobijamo da je

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{6.0.6}$$

ukoliko važe jednačine kretanja. Iz Neterine struje se odredjuju naelektrisanja koja su konstante kretanja. Ako parametre transformacije obeležimo sa ϵ_s onda je

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon_s \lambda^\mu_s \\ \delta_0\phi_a &= \epsilon_s \Omega_{as}(\phi, \partial\phi) \ . \end{aligned} \tag{6.0.7}$$

Npr. pri Lorencovim transformacijama

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &= \omega^{\mu\nu} x_\nu \\ \delta_0 \phi &= -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(x_\nu \partial_\mu - x_\nu \partial_\nu)\phi \ .\end{aligned} \tag{6.0.8}$$

Pretpostavimo još da parametri transformacije ϵ_s nisu konstante već zavise od x. Tada je promena dejstva

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 x \Big[\partial_\mu j^\mu_s + (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)})\Omega_{as}\Big]\epsilon_s + \int \mathrm{d}^4 x j^\mu_s \partial_\mu \epsilon_s \ , \tag{6.0.9}$$

gde je

$$j^\mu_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\Omega_{as} + \mathcal{L}\lambda^\mu_s \ . \tag{6.0.10}$$

Po pretpostavci klasično dejstvo je invarijantno pa je

$$\delta S = -\int \mathrm{d}^4 x \epsilon_s \partial_\mu j^\mu_s \ . \tag{6.0.11}$$

Invarijantnost kvantne teorije, tj. generišućeg funkcionala $Z[J]$ znači da su i klasično dejstvo ali i mera integracije invarijntni

$$D\phi' = D\phi \ . \tag{6.0.12}$$

Ako mera integracije nije invarijantna klasična simetrija je kvantno narušena. Za takve simetrije koje važe klasično a kvantno su narušene kažemo da su anomalne.

Kvantna simetrija daje

$$\int D\phi \Big[\delta S + \int \mathrm{d}^4 x J_a \delta_0 \phi_a\Big] e^{iS[\phi] + i\int \mathrm{d}^4 x J^a \phi_a} = 0 \tag{6.0.13}$$

odnosno

$$\int D\phi \Big[-\int \mathrm{d}^4 x \epsilon_s \partial_\mu j^\mu_s + \int \mathrm{d}^4 x J_a \delta_0 \phi_a\Big] e^{iS[\phi] + i\int \mathrm{d}^4 x J^a \phi_a} = 0 \ . \tag{6.0.14}$$

Diferenciranjem dva puta po J^a, uzimanjem da $J = 0$ i da su ϵ_s konstantne dobijamo

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle \Omega | T j^\mu(x) \phi_{a_1}(x_1)\phi_{a_2}(x_2)|\Omega\rangle \\ &= -i\delta(x - x_1)\delta_{aa_1}\langle \Omega | T \delta_0 \phi_a(x_1)\phi_{a_2}(x_2))|\Omega\rangle \\ &-i\delta(x - x_2)\delta_{aa_2}\langle \Omega | T \phi_{a_1}(x_1)\delta_0 \phi_a(x_2))|\Omega\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.0.15}$$

Simetrija nameće uslove na korelacione funkcije.

Chapter 7

Funkcionalni integral za fermionsko polje

7.1 Grasmanovi brojevi

Za razliku od običnih brojeva Grasmanovi brojevi medjusobno antikomutiraju

$$\theta\chi = -\chi\theta \ , \tag{7.1.1}$$

dok komutiraju sa običnim brojevima. U matematičkom smislu oni formiraju algebru. Algebra $\mathcal{A}$ je vektorski prostor u kome je definisana bilinearna operacija množenja elemenata algebre $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Ovo množenje je asocijativno i pored toga distributivno prema sabiranju u vektorskom prostoru. Neka su $\theta_i, \ i = 1, \ldots, n$ antikomutirajući generatori Grasmanove algebre.

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \ . \tag{7.1.2}$$

Njihovim medjusobnim množenjem dobijamo druge članove algebre, npr. član $\theta_1\theta_2\theta_3$. Element $\theta_2\theta_1\theta_3$ nije nezavisan od prethodnog jer je

$$\theta_2\theta_1\theta_3 = -\theta_1\theta_2\theta_3 \ .$$

Proizvoljan element algebre je suma proizvoda generatora

$$g = a_1 + b_i\theta_i + \frac{1}{2}c_{ij}\theta_i\theta_j + \cdots + \frac{1}{n!}d_{i_1\ldots i_n}\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_n} \ , \tag{7.1.3}$$

gde su koeficijenti kompleksni brojevi. Koeficijenti su antisimetrični, npr. $c_{ij} = -c_{ji}$. Neki sabirci su parni (komutirajući) a neki neparni (antikomutirajući). Npr. $\theta_1\theta_2$ je paran jer komutira sa Grasmanovim brojevima

$$(\theta_1\theta_2)\theta_i = \theta_i(\theta_1\theta_2) \ . \tag{7.1.4}$$

Podela elemenata algbre na komutirajuće i antikomutirajuće naziva se gradiranjem algebre.

Standardni izbor baze vektorskog prostora je da uredimo indekse sa leva na desno:

$$1, \theta_i, \ldots, \theta_i\theta_j\ldots\theta_k \ (i < j < \cdots < k), \ldots \ . \tag{7.1.5}$$

Za Grasmanovu algebru sa n generatora dimenzija vektorskog prostora je 2^n. Ako je $n = 1$ tada je

$$g(\theta) = a + b\theta \ , \tag{7.1.6}$$

dok za $n = 2$ je

$$g(\theta_1, \theta_2) = a + \theta_1 b + \theta_2 c + d\theta_1\theta_2 \ . \tag{7.1.7}$$

Ako želimo da

$$g = a + \theta_i\beta_i + \frac{1}{2}c_{ij}\theta_i\theta_j + \cdots + \frac{1}{n!}d_{i_1\ldots i_n}\theta_{i_1}\ldots\theta_{i_n} \ , \tag{7.1.8}$$

bude komutirajuća observabla onda je a takodje komutirajuća a β_i su antikomutirajuće itd. Jasno je da je tada Grasmanova algebra utopljena u neku veću Grasmanovu algebru.

Diferenciranje po grasmanovim promenljivima može biti levo i desno. Levi izvod je definisano prema

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}\theta_j} = \delta_{ij} \tag{7.1.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_1}(\theta_1\theta_2) = \theta_2 \tag{7.1.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta_2}(\theta_1\theta_2) = -\theta_1 \ . \tag{7.1.11}$$

Diferencijal funkcije možemo da napišemo preko levih izvoda

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}\theta_i \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\theta_i}$$

ali možemo da ga napišemo i preko desnih izvoda

$$\mathrm{d}g = g\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\theta_i}\mathrm{d}\theta_i \ .$$

Nekoliko primera za desni izvod su

$$(\theta_1\theta_2)\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\theta_1} = -\theta_2 \tag{7.1.12}$$

$$(\theta_1)\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\theta_1} = 1 \tag{7.1.13}$$

$$(\theta_1\theta_2)\frac{\overleftarrow{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\theta_2} = \theta_1 \tag{7.1.14}$$

Diferenciranje zadovoljava super-Lajbnicovo pravilo.

Kako je

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 0$$

to se integracija mora pažljivo definisati. Za $n = 1$ definišemo

$$\int \mathrm{d}\theta 1 = 0 \tag{7.1.15}$$

$$\int \mathrm{d}\theta\theta = 1 \tag{7.1.16}$$

pa je

$$\int g(\theta) = \int \mathrm{d}\theta\theta\beta = \beta \ . \tag{7.1.17}$$

Integral je translaciono invarijantan tj.

$$\int \mathrm{d}\theta g(\theta+\theta_0) = \int \mathrm{d}\theta(a+(\theta+\theta_0)\beta) = \int \mathrm{d}\theta g(\theta) \ . \tag{7.1.18}$$

Translacionu invarijantnost obezbedjuje integral (7.1.15), dok je (7.1.16) normalizacija. Generalno, u algebri sa n generatora važi

$$\int \mathrm{d}\theta_i = 0 \tag{7.1.19}$$

$$\int \mathrm{d}\theta_i\theta_i = 1 \ . \tag{7.1.20}$$

U poslednjem izrazu ne sumiramo po i. Očigledno je

$$\int \mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_3\theta_3\theta_1\theta_2 = 1 \ . \tag{7.1.21}$$

Koeficijent $d_{i_1\dots\iota_n}$ u izrazu (7.1.3) je kompletno antisimetričan pa je

$$d_{i_1\dots\iota_n} = d\epsilon_{i_1\dots\iota_n} \ . \tag{7.1.22}$$

Onda je

$$\int \mathrm{d}\theta_n\dots\mathrm{d}\theta_1 g = \int \mathrm{d}\theta_n\dots\mathrm{d}\theta_1\theta_1\dots\theta_n d = d \ . \tag{7.1.23}$$

Razmotrimo šta se dešava ako napravimo linearnu smenu promenljivih

$$\theta_i = K_{ij}\theta'_j \ , \tag{7.1.24}$$

gde je K nesingularna matrica komutirajućih brojeva. Tada je

$$\begin{aligned} g &= a+\dots+\frac{1}{n!}K_{i_1j_1}\dots K_{i_nj_n}\theta'_{j_1}\dots\theta'_{j_n}\epsilon_{i_1\dots i_n}d \\ &= a+\dots+\frac{1}{n!}\det K\theta'_{j_1}\dots\theta'_{j_n}\epsilon_{j_1\dots j_n}d \ . \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

Ako uzmemo

$$\mathrm{d}\theta_n\dots\mathrm{d}\theta_1 = J\mathrm{d}\theta'_n\dots\mathrm{d}\theta'_1 \ ,$$

gde J treba da odredimo. Prema tome

$$\begin{aligned} d &= \int \mathrm{d}\theta_n\dots\mathrm{d}\theta_1 g(\theta) = \int \mathrm{d}\theta'_n\dots\mathrm{d}\theta'_1 Jg(\theta') \\ &= Jd\det K \end{aligned} \tag{7.1.26}$$

odakle je

$$J = \frac{1}{\det K} = \frac{1}{\left|\frac{\partial\theta}{\partial\theta'}\right|} \ . \tag{7.1.27}$$

Dakle, kod Grasmanovog integrala mera integracije se transformiše prema

$$\mathrm{d}\theta_n \ldots \mathrm{d}\theta_1 = \left|\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\right| \mathrm{d}\theta'_n \ldots \mathrm{d}\theta'_1 \ . \tag{7.1.28}$$

To je suprotno od običnog višestrukog integrala

$$\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1 = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \mathrm{d}x'_n \ldots \mathrm{d}x'_1 \ .$$

Gausov integral Grasmanovih promenljivih (M je antisimetrična matrica) je

$$I_n(M) = \int \mathrm{d}\theta_n \ldots \mathrm{d}\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta} = (-1)^{n/2}\sqrt{\det M} \ , \tag{7.1.29}$$

za $n = 2k$ dok je za $n = 2k+1$ gornji integral jednak nuli. Pošto je M antisimetrična matrica onda je iM hermitska pa je možemo dijagonalizovati

$$M_d = U(iM)U^\dagger \ .$$

Matrica U je unitarna, a M_d dijagonalna. Neka je λ svojstvena vrednost matrice iM

$$\det(iM - \lambda I) = 0 \ .$$

Transponovanjem gornje jednačine dobijamo $\det(iM + \lambda I) = 0$. Dakle i $-\lambda$ je svojstvena vrednost od iM pa je

$$M_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{7.1.30}$$

Ako je

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{7.1.31}$$

onda je

$$R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1.32}$$

pa ako uvedemo blok dijagonalnu matricu

$$R = \begin{pmatrix} R_2 & & \\ & R_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{7.1.33}$$

imamo

$$M' = -iRM_dR^\dagger = RUM(RU)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} . \tag{7.1.34}$$

Matrica RU je ortogonalna. Napravimo smenu $\theta' = RU\theta$

$$\frac{1}{2}\theta^T M\theta = \frac{1}{2}\theta'^T M'\theta' = \lambda_1\theta_1'\theta_2' + \lambda_3\theta_3'\theta_4' + \ldots \lambda_{n-1}\theta_{n-1}'\theta_n' \tag{7.1.35}$$

pa je

$$\begin{aligned} I_n(M) &= \int \mathrm{d}\theta_n' \ldots \mathrm{d}\theta_1' e^{-(\lambda_1\theta_1'\theta_2' + \lambda_3\theta_3'\theta_4' + \cdots + \lambda_{n-1}\theta_{n-1}'\theta_n')} \\ &= \int \mathrm{d}\theta_n' \ldots \mathrm{d}\theta_1' e^{-\lambda_1\theta_1'\theta_2'} \ldots e^{-\lambda_{n-1}\theta_{n-1}'\theta_n'} \\ &= (-)^{n/2}(\lambda_1\lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}) \int \mathrm{d}\theta_n' \ldots \mathrm{d}\theta_1'\theta_1' \ldots \theta_n' \\ &= (-)^{n/2}(\lambda_1\lambda_3 \ldots \lambda_{n-1}) \\ &= (-)^{n/2}\sqrt{\det M} . \end{aligned} \tag{7.1.36}$$

Generalizacija integrala (7.1.29) je

$$I_n(M, \chi) = \int \mathrm{d}\theta_n \ldots \mathrm{d}\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M\theta + \chi^T\theta} = (-)^{n/2}\sqrt{\det M} e^{-\frac{1}{2}\chi^T M^{-1}\chi} . \tag{7.1.37}$$

Ako su θ' i θ'' realni Grasmanovi brojevi onda su

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\theta' + i\theta''}{\sqrt{2}} \\ \bar\eta &= \frac{\theta' - i\theta''}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{7.1.38}$$

kompleksni Grasmanovi brojevi. Lako se vidi da je

$$\mathrm{d}\theta''\mathrm{d}\theta' = i\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\bar\eta \tag{7.1.39}$$

pa je

$$\int \mathrm{d}\bar\eta\mathrm{d}\eta\eta\bar\eta = \int i\mathrm{d}\theta''\mathrm{d}\theta'(-i\theta'\theta'') = 1 . \tag{7.1.40}$$

Gausov integral sa kompleksnim Grasmanovim promenljivim je

$$\int \mathrm{d}\bar\eta_n\mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\bar\eta_1\mathrm{d}\eta_1 e^{-\bar\eta M\eta} = \det M . \tag{7.1.41}$$

Pokažimo poslednju formulu

$$
\begin{aligned}
& \int \mathrm{d}\bar{\eta}_n \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\bar{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_1 e^{-\bar{\eta} M \eta} \\
= & \int \mathrm{d}\bar{\eta}_n \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\bar{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_1 \frac{(-1)^n}{n!} \bar{\eta}_{i_1} \eta_{j_1} \bar{\eta}_{i_2} \eta_{j_2} \ldots \bar{\eta}_{i_n} \eta_{j_n} m_{i_1 j_1} \ldots m_{i_n j_n} \\
= & \int \mathrm{d}\bar{\eta}_n \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\bar{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_1 (-1)^n \bar{\eta}_1 \eta_{j_1} \bar{\eta}_2 \eta_{j_2} \ldots \bar{\eta}_n \eta_{j_n} m_{1 j_1} \ldots m_{n j_n} \\
= & \int \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\eta_1 \eta_{j_1} \eta_{j_2} \ldots \eta_{j_n} m_{1 j_1} \ldots m_{n j_n} \\
= & \int \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\eta_1 \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \epsilon_{j_1 \ldots j_n} m_{1 j_1} \ldots m_{n j_n} \\
= & \det M \ .
\end{aligned}
\tag{7.1.42}
$$

Generalizacija Gausovog integrala je

$$
\int \mathrm{d}\bar{\eta}_n \mathrm{d}\eta_n \ldots \mathrm{d}\bar{\eta}_1 \mathrm{d}\eta_1 e^{-\bar{\eta} M \eta + \bar{\eta}\rho + \bar{\rho}\eta} = \det M e^{\bar{\rho} M^{-1} \rho} \ . \tag{7.1.43}
$$

Beskonačno dimenziona Grasmanova algebra se dobija zamenom diskretnog indeksa i kontinualnim x:

$$
\theta_i \to \theta(x) \ .
$$

Pri tome se gornje formulre lako generalizuju

$$
\{\theta(x), \theta(y)\} = 0 \tag{7.1.44}
$$

$$
\int \mathrm{d}\theta = 0 \tag{7.1.45}
$$

$$
\int \mathrm{d}\theta\theta = 1 \tag{7.1.46}
$$

$$
\int D\psi D\bar{\psi} e^{-\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \bar{\psi}(y) A(y,x) \psi(x) + \int \mathrm{d}x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi)} = \det A e^{\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \bar{\eta}(y) A^{-1}(y,x) \eta(x)} \ . \tag{7.1.47}
$$

7.2 Slobodno Dirakovo polje

Generišući funkcional za slobodno Dirakovo polja je

$$
Z_0[\eta, \bar{\eta}] = N \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int \mathrm{d}x \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + i\epsilon)\psi) + i \int \mathrm{d}x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \tag{7.2.48}
$$

odnosno

$$
Z_0[\eta, \bar{\eta}] = N \int D\psi D\bar{\psi} e^{-\int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \bar{\psi}(y) A(y,x) \psi(x)) + i \int \mathrm{d}x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \tag{7.2.49}
$$

gde je

$$
A(y,x) = i(i\partial\!\!\!/_x + m - i\epsilon)\delta^{(4)}(y-x) \ .
$$

Furijeovom transformacijom polja ψ i $\bar{\psi}$ imamo

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\bar{\psi}(y)A(y,x)\psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q\tilde{\bar{\psi}}(q)\int \mathrm{d}x\mathrm{d}yA(y,x)e^{iq\cdot y-ip\cdot x}\tilde{\psi}(p) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q\ \tilde{\bar{\psi}}(q)\tilde{A}(q,-p)\tilde{\psi}(p) \qquad (7.2.50)
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(q,-p) &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y(-\partial\!\!\!/_x + im + \epsilon)\delta^{(4)}(y-x)e^{iq\cdot y-ip\cdot x} \\
&= -i(2\pi)^4(p\!\!\!/ - m + i\epsilon)\delta^{(4)}(p+q)\ . \qquad (7.2.51)
\end{aligned}$$

Iz

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{(2\pi)^4}\tilde{A}(p,q)\widetilde{A^{-1}}(-q,k) = (2\pi)^4\delta(p+k) \qquad (7.2.52)$$

sledi

$$\widetilde{A^{-1}}(p,q) = i(2\pi)^4\frac{1}{p\!\!\!/ - m + i\epsilon}\delta^{(4)}(p+q) \qquad (7.2.53)$$

pa je

$$\begin{aligned}
A^{-1}(y,x) &= \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}k}{(2\pi)^8}\widetilde{A^{-1}}(p,k)e^{-ip\cdot y-ik\cdot x} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p\!\!\!/ - m + i\epsilon}e^{-ip\cdot(y-x)} \\
&= \frac{i}{i\partial\!\!\!/_y - m + i\epsilon}\delta(y-x) \\
&= iS_F(y-x)\ . \qquad (7.2.54)
\end{aligned}$$

Prema tome primenom (7.1.47) imamo

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = e^{-\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\bar{\eta}(y)iS_F(y-x)\eta(x)}\ . \qquad (7.2.55)$$

Grinove funkcije su vakuumske očekivane vrednosti vremenskog uredjenja proizvoda polja

$$G^{(2n)}(x_1,\dots x_n,y_1\dots y_n) = \langle 0|T\hat{\psi}(x_1)\dots\hat{\psi}(x_n)\hat{\bar{\psi}}(y_1)\dots\hat{\bar{\psi}}(y_n)|0\rangle\ , \qquad (7.2.56)$$

odnosno

$$\begin{aligned}
G^{(2n)}(x_1,\dots x_n,y_1\dots y_n) &= \frac{\int D\psi D\bar{\psi}\psi(x_1)\dots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\dots\bar{\psi}(y_n)e^{iS}}{\int D\psi D\bar{\psi}e^{iS}} \\
&= \frac{\delta^{(2n)}Z[\eta,\bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}(x_1)\dots\delta\bar{\eta}(x_n)\delta\eta(y_1)\dots\delta\eta(y_n)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}\ . \qquad (7.2.57)
\end{aligned}$$

Primetimo da smo koristili sledeću 'smenu'

$$\begin{aligned} \bar\psi &\to i\frac{\delta}{\delta\eta} \\ \psi &\to -i\frac{\delta}{\delta\bar\eta}\ . \end{aligned} \tag{7.2.58}$$

Vremensko uredjenje je definisano vodeći računa da su operatori $\hat\psi$ i $\hat{\bar\psi}$ antikomutirajući. Lako se nalazi da je dvotačkasta Grinova funkcija Fajnmanov propagator za Dirakovo polje

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1,y_1) &= iS_{Fab}(x_1-y_1) = \langle 0|T\psi_a(x_1)\bar\psi_b(y_1)|0\rangle \\ &= \theta(x_1^0-y_1^0)\langle 0|\psi_a(x_1)\bar\psi_b(y_1)|0\rangle - \theta(y_1^0-x_1^0)\langle 0|\bar\psi_b(y_1)\psi_a(x_1)|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{7.2.59}$$

Na KTP1 je pokazano da on opisuje kreiranje elektrona u tački y_1 koji propagira do tačke x_1 ako je $x_1^0 > y_1^0$. Sa druge strane ako je $x_1^0 < y_1^0$ on odgovara kreiranju pozitrona u x_1, njegovu propagaciju do y_1 gde se on anahilira.

Četvorotačkasta Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1,x_2,y_1,y_2) &= (S_F(x_1-y_1)S_F(x_2-y_2) - S_F(x_1-y_2)S_F(x_2-y_1)) \\ &= \langle 0|T\hat\psi(x_1)\hat\psi(x_2)\hat{\bar\psi}(y_1)\hat{\bar\psi}(y_2)|0\rangle. \end{aligned} \tag{7.2.60}$$

Rezultat je poznat i na osnovu Vikove teoreme.

Chapter 8

Funkcionalni formalizam: Gauge teorije

8.1 Kratak podsetnik

Neka je G prosta grupa simetrije a $\psi(x)$ multiplet polja koji se transformiše po fundamentalnoj reprezentaciji grupe G

$$\psi_i'(x) = e^{-\imath T^a_{ij}\theta_a}\psi_j(x).$$

θ_a su parametri a T^a generatori grupe. Npr. za $SU(n)$ grupu $i = 1, \ldots, n$, $a = 1, \ldots, n^2 - 1$. Lagranžijan materije

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \tag{8.1.1}$$

je invarijantan na globalne transformacije

$$\psi'(x) = e^{-\imath T_a\theta_a}\psi(x),$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{\imath T_a\theta_a}.$$

Kovarijantni izvod je definsan sa

$$D_\mu\psi{=}(\partial_\mu + \imath g T^a A^a_\mu)\psi, \tag{8.1.2}$$

gde je g konstanta interakcije, a A^a_μ gauge polja. Želimo da konstruišemo teoriju koja je invarijantna na lokalne transformacije

$$\psi'(x) = e^{-\imath T_a\theta_a(x)}\psi(x)\ .$$

Kovarijantni izvod $D_\mu\psi$ se mora transformisati pri lokalnim (kalibracionim, gauge) transformacijama na isti način kao polja materije ψ:

$$[D_\mu\psi]' = e^{-\imath T_a\theta_a(x)}[D_\mu\psi]. \tag{8.1.3}$$

Iz ovog uslova sledi zakon transformacije gauge polja A_μ

$$A'_\mu = U(x)(A_\mu - \frac{\imath}{g}\partial_\mu)U^{-1}(x) \tag{8.1.4}$$

gde je $A_\mu = A^a_\mu T^a$ i $U(x)$=$e^{-\imath T^a\theta^a(x)}$. U komponentnoj notaciji

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) - f^{abc}\theta^c(x)A^b_\mu = A^a_\mu + \frac{1}{g}(D_\mu\theta)^a, \tag{8.1.5}$$

gde su f_{abc} strukturne konstante algebre su(n)

$$[T_a, T_b] = \imath f_{abc}T_c. \tag{8.1.6}$$

Tenzor jačine polja je definisan sa

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\imath}{g}[D^\mu, D^\nu]. \tag{8.1.7}$$

Iz prethodne relacije sledi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \imath g[A_\mu, A_\nu], \tag{8.1.8}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{8.1.9}$$

Pri gauge transformacijama tenzor jačine polja se menja po

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \tag{8.1.10}$$

Yang Mills-ov lagranžijan je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}\sum_a F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a. \tag{8.1.11}$$

Neka je G poluprosta grupa; $T^a(r)$ su generatori u ireducibilnoj reprezentaciji r normirani prema

$$\mathrm{tr}(T^a(r)T^b(r)) = C(r)\delta^{ab}\ . \tag{8.1.12}$$

U pridruženoj (adjoint) reprezentaciji $(r = G)$

$$(T^b)_{ac} = i f^{abc}\ .$$

$T^a(r)T^a(r)$ je Kazimirov operator i po Šurovoj lemi

$$T^a(r)T^a(r) = C_2(r)I\ ,$$

gde je I jedinična matrica formata $d(r) \times d(r)$. U pridruženoj reprezentaciji je

$$T^a(G)T^a(G) = C_2(G)I\ .$$

Množenjem (8.1.12) sa δ^{ab} imamo

$$\mathrm{tr}(T^a(r)T^a(r)) = d(G)C(r)$$

odnosno

$$C_2(r)d(r) = d(G)C(r)\ .$$

Za fundamentalnu reprezentaciju $SU(N)$ grupe je

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{1}{2} \\ C_2(N) &= \frac{N^2-1}{2N} \end{aligned} \tag{8.1.13}$$

dok je u pridruženoj reprezentaciji $C(G) = C_2(G) = N$.

8.2 Kvantovanje kalibracionih polja

Lagranžijan YM teorije (bez materije) je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \ . \tag{8.2.1}$$

Napisaćemo ga kao zbir kinetičkog $\mathcal{L}_0$ i interakcionog dela, $\mathcal{L}_{\rm int}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int}, \tag{8.2.2}$$

gde je

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A^a_\mu \partial^\nu A^\mu_a - \partial_\nu A^a_\mu \partial^\mu A^\nu_a), \tag{8.2.3}$$

a

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)A^\mu_b A^\nu_c - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e \ . \tag{8.2.4}$$

Propagator za gauge polje računamo iz dela lagranžijana kvadratnog po poljima

$$\begin{aligned} S_0[A^a_\mu] &= \frac{1}{2}\int d^4x A^a_\mu[g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu]A^a_\nu & (8.2.5)\\ &= \frac{1}{2}\int d^4x d^4y A^a_\mu(x)[g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu]\delta(x-y)A^a_\nu(y) & (8.2.6)\\ &= \frac{1}{2}\int d^4x d^4y A^a_\mu(x)K^{\mu a,\nu b}(x,y)A^a_\nu(y) \ . & (8.2.7)\end{aligned}$$

U impulsnom prostoru operator K je

$$K^{\mu a,\nu b}(p,k) = (2\pi)^4(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu)\delta(p+k)\delta^{ab} \ . \tag{8.2.8}$$

Inverzni operator

$$K^{-1}_{\mu a,\nu b} = (Ag_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu)\delta_{ab}\delta(p+k)$$

ne postoji jer je operator $K^{\mu a,\nu b}(x,y)$ singularan. Razlog za ovu singularnost je gauge simetrija. U path integralu treba da integralimo po nezavisnim stepenima slobode a ne po svim potencijalima.

Generalisani impulsi su

$$\pi^a_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu_a} = F^a_{\mu 0} \ . \tag{8.2.9}$$

Odmah vidimo da je $\pi^a_0 = 0$. Ovo je tzv. primarna veza. Zbog ove veze Poasonova zagrada

$$\{A^\mu_a(t,\vec{x}), \pi^b_\nu(t,\vec{y})\} = i\delta^\mu_\nu\delta^{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

ne može biti primenjena za $\mu = \nu = 0$. Sistemi sa vezama se analiziraju u okviru tzv. Dirakovog formalizma što nećemo ovde raditi. Pored primarne veze postoji još jedna (sekundarna) veza

$$D_i\pi^{ia} = 0$$

koja je Gausova teorema. Zbog postojanja veza u teoriji nisu svi potencijali i generealisani impulsi nezavisni; broj nezavisnih stepeni slobode je manji nego skup faznih promenljivih A^a_μ, π^a_μ. Zato je potrebno u funkcionalnom integralu izdvojiti prave, fizičke stepene slobode.

8.3 Fadejev-Popovljeva metoda

Sa $A^U_{a\mu}$ označimo potencijal $A_{a\mu}$ posle lokalne transformacije. U funkcionalnom integralu

$$\int DA^\mu e^{\imath S[A^\mu]}$$

treba da integralimo samo po neekvivalentnim potencijalima. Naime potencijali $A^U_{a\mu}$ i $A_{a\mu}$ opisuju istu konfiguraciju polja. Zato moramo sa svake trajektorije (gauge ekvivalentni potencijali) izdvojiti po jednog predstavnika. Cilj je izdvajanje funkcionalnog integrala po lokalnim transformacijama (elementima grupe simetrije). Taj integral ćemo obeležiti sa $\int \mathcal{D}U$. Može se definisati funkcionalni integral po lokalnim transformacijama tako da za svaki funkcional $f[U]$ i fiksnu lokalnu transformaciju $U'(x)$ važi

$$\int DU f[U] = \int DU f[UU']. \tag{8.3.10}$$

Tačnost prethodne relacije se lako dokazuje kada je oblast integracije infinitezimalna. Tada možemo da uzmemo

$$DU = \prod_a D\theta_a. \tag{8.3.11}$$

Neka su U, U' i U'' tri infinitezimalne lokalne transformacije za koje važi

$$U'' = UU'. \tag{8.3.12}$$

Iz prethodne jednačine imamo

$$1 - \imath T_a\theta''_a = (1 - \imath T_a\theta_a)(1 - \imath T_b\theta'_b). \tag{8.3.13}$$

Odavde imamo

$$\theta''_a = \theta_a + \theta'_a + \mathrm{O}(\theta^2) \tag{8.3.14}$$

i

$$\det\left(\frac{\partial\theta''_a}{\partial\theta_b}\right) = 1 + \mathrm{O}(\theta^2) \tag{8.3.15}$$

Da bismo dokazali relaciju (8.3.10) dovoljno je da izvršimo smenu promenljivih

$$\int DU'' f[U''] = \int DU f[U''] \det\left(\frac{\partial\theta''_a}{\partial\theta_b}\right) = \int DU f[UU']. \tag{8.3.16}$$

Da bismo integralili samo po predstavnicima orbite u funkcionalnom integralu moramo da uvedemo uslove kojima se biraju predstavnici, tzv. uslove koji fiksiraju gauge. Te uslove zadajemo skupom jednačina

$$F_a(A^a_\mu) = 0, \tag{8.3.17}$$

gde su F_a funkcije kalibracionih polja i njihovih izvoda. Lorencob kalibracioni uslov je

$$F_a(A^\mu) = \partial_\mu A^\mu_a\ . \tag{8.3.18}$$

Uvedimo lokalno invarijantan funkcional

$$\Delta[A_\mu] = \int DU\delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)], \tag{8.3.19}$$

gde je $\delta^{(n)}[F_a] = \prod_a \delta[F_a]$ funkcionalna delta funkcija. Lokalna invarijantnost (8.3.19) se lako pokazuje

$$\Delta[A_{a\mu}^{U'}] = \int DU\delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^{UU'})] = \int DU\delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^U)] = \Delta[A_{a\mu}]. \tag{8.3.20}$$

Sada možemo generišući funkcional da napišemo kao

$$\int DA^\mu e^{\imath S[A^\mu]} = \int DA^\mu \Delta^{-1}[A^\mu] \int DU\delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)]e^{\imath S[A^\mu]}. \tag{8.3.21}$$

Uzevši u obzir i lokalnu invarijantnost funkcionala $\Delta[A_{a\mu}]$ imamo

$$\int DA_\mu e^{\imath S[A^\mu]} = \int DU \int DA_\mu^U \Delta^{-1}[A_\mu^U]\delta[F_a(A_\mu^U)]e^{\imath S[A_\mu^U]}. \tag{8.3.22}$$

Ako izvršimo smenu $A_{a\mu}^U \to A_{a\mu}$ dobijamo

$$\int DA_\mu e^{\imath S[A_\mu]} = \int DU \int DA_\mu \Delta^{-1}[A_\mu]\delta[F_a(A_\mu)]e^{\imath S[A_\mu]}. \tag{8.3.23}$$

Ovim smo uspeli da izdvojimo integraciju po lokalnim transformacijama. Integral $\int DU$ predstavlja beskonačnu konstantu koja ulazi u normalizaciju, pa imamo

$$\int DA_\mu e^{\imath S[A_\mu]} = \int DA_\mu \Delta^{-1}[A_\mu]\delta^{(n)}[F_a(A_\mu)]e^{\imath S[A_\mu]}. \tag{8.3.24}$$

Potrebno je izračunati $\Delta^{-1}[A_{a\mu}]$. U (8.3.19) izvršimo smenu promenljivih sa DU na $\prod_a DF_a$, koristeći (8.3.11)

$$\begin{aligned}
\Delta[A_{a\mu}] &= \int DU\delta^{(n)}[F_a(A_\mu^U)] && (8.3.25)\\
&= \int \prod_b D\theta_b \delta^{(n)}[F_a(A_{a\mu}^\theta)] && (8.3.26)\\
&= \int \prod_c DF_c \det\left(\frac{\delta\theta_b(x)}{\delta F_c(y)}\right)\delta^{(n)}[F_a(A_\mu^\theta)] && (8.3.27)\\
&= \det\left(\frac{\delta\theta_b(x)}{\delta F_c(y)}\right)\Big|_{F_a=0} && (8.3.28)
\end{aligned}$$

Korišćenje (8.3.11) je opravdano jer funkcionalna delta funkcija u (8.3.19) ograničava DU na infinitezimalnu oblast oko jedinične transformacije. Sa $F_a(x)$ smo označili $F_a[A_{a\mu}^\theta(x)]$.

Iz (8.3.25) dobijamo

$$\Delta[A_{a\mu}]^{-1} = \det\left(\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}\right)\Big|_{F_a=0}. \tag{8.3.29}$$

Ovo je tzv. Fadeev-Popovljeva determinanta. Zamenom (8.3.29) u (8.3.24) dobijamo

$$Z[J^\mu] = N \int DA_\mu \det\Big(\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}\Big)\delta^{(n)}[F_a(A^\mu)]e^{\imath S[A_{a\mu}]+J^a_\mu A^{\mu a}}. \tag{8.3.30}$$

Nadjimo Fadeev–Popovljevu determinantu u slučaju Lorencovog gauga

$$F^a[A] = \partial_\mu A^{\mu a} \ .$$

Variranjem

$$F^a[A^\theta] = \partial_\mu(A^{\mu a} + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta^a - f^{abc}\theta^c A^{\mu b}) \tag{8.3.31}$$

po parametrima gauge grupe imamo

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(y)} &= \frac{1}{g}\delta^{ab}\Box_x\delta(x-y) - f^{acb}\partial_{\mu x}(A^{\mu c}(x)\delta(x-y)) \\ &= \frac{1}{g}[\delta^{ab}\Box_x - gf^{acb}A^{\mu c}(y)\partial^x_\mu]\delta(x-y) \ , \end{aligned}\tag{8.3.32}$$

gde smo iskoristili Lorencov kalibracioni uslov.

Determinantu možemo da napišemo kao integral po Grasmanovim poljima c^a i $\bar{c}^a$

$$\int D\bar{c}Dc e^{-\imath\int d^4x\int d^4x' \bar{c}^a(x)M^{ab}(x,x')c_b(x')} = \det(M_{ab}), \tag{8.3.33}$$

gde je $D\bar{c}Dc = \prod_a D\bar{c}^a Dc^a$. Ako uzmemo da je

$$M_{ab}(x,x') = \frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')} \tag{8.3.34}$$

važi

$$\det\Big(\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}\Big) = \int D\bar{c}Dc e^{-\imath\int d^4x\int d^4x'\bar{c}^a(x)\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}c^b(x')}. \tag{8.3.35}$$

U slučaju Lorentz-ovog gauga imamo

$$\begin{aligned}\det\Big(\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}\Big) &= \int D\bar{c}Dc e^{-\frac{1}{g}\imath\int d^4x\int d^4y\bar{c}_a(x)[\Box_y\delta^{ab} - gf^{abc}A^\mu_c(y)\partial^y_\mu]\delta(x-y)c^b(y)} \\ &= \int DcD\bar{c}e^{\imath\int d^4x\partial_\mu\bar{c}^a(x)(\partial^\mu c^a(x) - gf_{acb}A^\mu_c c_b(x))} \\ &= \int DcD\bar{c}e^{\imath\int d^4x\mathcal{L}_{\rm gh}}. \end{aligned}\tag{8.3.36}$$

Izraz u eksonentu je tzv. dejstvo za duhovima (ghost dejstvo). Gostovi su skalari u odnosu na Lorencove transformacije. Sa druge strane oni su antikomutirajuće (Grasmanove) veličine. Oni ne mogu biti spoljašnje linije u dijagramima jer nisu opservabilni.

Gauge uslove ćemo generalisati na sledeći način

$$F_a = \partial_\mu A^{\mu a} - f^a(x) \ .$$

Funkcije $f^a(x)$ ne utiču na Z i možemo da integralimo po njima sa Gausovom težinom

$$\int (\prod_c \mathcal{D}f_c) e^{\frac{-\imath}{2\xi}\int d^4x f_a^2(x)}. \tag{8.3.37}$$

Kako je

$$\int (\prod_c \mathcal{D}f_c) e^{\frac{-\imath}{2\xi}\int d^4x f_a^2(x)} \delta^{(n)}[\partial_\mu A^{\mu a} - f^a(x)) = e^{-\frac{i}{2\xi}\int \mathrm{d}^4x (\partial_\mu A^{\mu a})^2} \tag{8.3.38}$$

to dobijamo

$$Z[J^a_\mu] = N \int \mathcal{D}A^{a\mu} \det\Big(\frac{\delta F_a(x)}{\delta\theta_b(x')}\Big) e^{\imath \int d^4x (\mathcal{L}_{YM}(A^a_\mu) + J^a_\mu A^\mu_a - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu_a(x))^2)}. \tag{8.3.39}$$

odnosno

$$Z[J^a_\mu] = N \int DA^{a\mu} Dc D\bar{c} e^{\imath \int d^4x (\mathcal{L}_{YM} - \bar{c}^a M^{ab} c^b - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu_a(x))^2 + J^a_\mu A^\mu_a)}. \tag{8.3.40}$$

Prvi član u eksponentu je Yang Millsovo dejstvo, drugi je član sa ghostovima dok je treći član tzv. gauge fiksing član.

Parametar ξ je proizvoljan i fizičke veličine ne zavise od njega. $\xi = 0$ je Landauvljev 'gauge', a $\xi = 1$ Fajnmanov 'gauge'. Koristili smo navodnike jer reč gauge nije adekvatna; sve je to Lorencov gauge. Gauge teorije se mogu kvantovati i sa drugim kalibracionim uslovom. Npr. $A^a_3 = 0-$ aksijalni gauge, $\partial_i A^{ia} = 0-$ Kulonov gauge.

8.4 Fajnmanova pravila

Efektivni lagranžijan koji se pojavljuje u izrazu za generišući funkcional je

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} A^a_\mu \Big[g^{\mu\nu}\Box - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\partial^\mu\partial^\nu \Big] A_{\nu a} - \bar{c}^a \Box c^a + \bar{\psi}_i (i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i \\
&+ \frac{g}{2} f^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^\mu_b A^\nu_c - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e \\
&- g f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{\mu b} c^c - g\bar{\psi}_i \gamma^\mu T^a_{ij} A^{\mu a}\psi_j,
\end{aligned} \tag{8.4.41}$$

gde smo uključili i materiju. Prvi red je kvadratan po poljima i on nam daje propagatore. Drugi i treći red su interakcioni članovi.

Generišući funkcional za slobodnu teoriju je

$$Z_0[J^a_\mu, \bar{\sigma}_a, \sigma_a, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A_{a\mu} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{\imath \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J^a_\mu A^\mu_a + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \bar{c}^a\sigma^a + \bar{\sigma}^a c^a)}, \tag{8.4.42}$$

gde je

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}A^a_\mu\Big[g^{\mu\nu}\Box - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\partial^\mu\partial^\nu\Big]A_{\nu a} - \bar{c}^a\Box c^a + \bar{\psi}_i(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i \ . \tag{8.4.43}$$

Rezultat integracije je

$$\begin{aligned} Z_0 &= e^{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y J^a_\mu(x)(K^{-1})^{\mu\nu ab}(x,y)J^b_\nu(y)} \\ &\times \ e^{-i\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\bar{\eta}(y)[i\partial\!\!\!/_y - m + i\epsilon]^{-1}\delta(y-x)\eta(x) + i\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\bar{\sigma}^a(y)\Box^{-1}\delta(y-x)\sigma^a(x)} \ . \end{aligned} \tag{8.4.44}$$

Odredimo inverzni operator od

$$K^{\mu\nu ab}(x,y) = \Big[g^{\mu\nu}\Box - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\partial^\mu\partial^\nu\Big]_x \delta(x-y)\delta^{ab} \ . \tag{8.4.45}$$

Lako se nalazi

$$\tilde{K}^{\mu\nu ab}(p,q) = (2\pi)^4\Big[-p^2g^{\mu\nu} + \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)p^\mu p^\nu\Big]\delta^{ab}\delta(p+q) \ . \tag{8.4.46}$$

Inverzni nalazimo iz uslova

$$\int \mathrm{d}^4q\tilde{K}^{\mu\nu ab}(p,q)\widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q,r) = (2\pi)^8\delta^a_c\delta(p+r)\delta^\mu_\rho \tag{8.4.47}$$

Pretpostavljajući rešenje u obliku

$$\widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q,r) = (2\pi)^4\Big[A(q)g_{\nu\rho} + Bq_\nu q_\rho\Big]\delta(q-r)\delta_{bc} \tag{8.4.48}$$

lako nalazimo

$$\widetilde{(K^{-1})}_{\nu\rho bc}(-q,r) = (2\pi)^4\Big[-\frac{1}{q^2+i\epsilon}g_{\nu\rho} + (1-\xi)\frac{q_\nu q_\rho}{q^2}\frac{1}{q^2+i\epsilon}\Big]\delta(q-r)\delta_{bc} \ . \tag{8.4.49}$$

Dvo-tačkasta Grinova funkcija za gauge polja je

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1,x_2) &= \langle 0|TA^d_\rho A^c_\sigma \\ &- \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^d_\rho(x_2)\delta J^c_\sigma(x_1)}\Big|_{J=0} \\ &= i(K^{-1})_{\sigma\rho cd}(x_1,x_2) \ . \end{aligned} \tag{8.4.50}$$

U impulsnom prostoru ona se dobija iz

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2G^{(2)}(x_1,x_2)e^{ipx_1+iqx_2} \\ &= i(2\pi)^4\delta(p+q)\delta_{cd}\Big[-\frac{1}{p^2+i\epsilon}g^{\sigma\rho} + (1-\xi)\frac{p^\sigma p^\rho}{p^2}\frac{1}{p^2+i\epsilon}\Big] \end{aligned} \tag{8.4.51}$$

Propagator za gauge polja u impulsnom prostoru je

$$i\Big[-\frac{1}{q^2+i\epsilon}g_{\nu\rho} + (1-\xi)\frac{q_\nu q_\rho}{q^2}\frac{1}{q^2+i\epsilon}\Big]\delta_{cd} \ . \tag{8.4.52}$$

Propagator duhova u koordinatnom prostoru je

$$
\begin{aligned}
\langle 0|Tc^a(x_1)\bar{c}^b(x_2)|0\rangle &= \frac{\delta^2}{\delta\bar{\sigma}^a(x_1)\delta\sigma^b(x_2)} e^{i\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\bar{\sigma}^a(y)\Box^{-1}\delta(y-x)\sigma^a(x)}\Big|_{\sigma=\bar{\sigma}=0} \\
&= -i\Box^{-1}\delta(x_1-x_2)\delta^{ab} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}}{p^2+i\epsilon}\delta^{ab} \ . \qquad (8.4.53)
\end{aligned}
$$

U impulsnom prostoru on je

$$
\frac{i\delta^{ab}}{p^2+i\epsilon} \ . \qquad (8.4.54)
$$

Fermionski propagator je

$$
\frac{i\delta_{ij}}{\not{p}-m+i\epsilon} \ . \qquad (8.4.55)
$$

Verteksi su

$$
gf_{abc}(g_{\alpha\gamma}(p_1-p_3)_\beta + g_{\alpha\beta}(p_2-p_1)_\gamma + g_{\beta\gamma}(p_3-p_2)_\alpha) \qquad (8.4.56)
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\imath}{4}g^2(f_{abc}f_{ade}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}-g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \\
&+ f_{adc}f_{abe}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}-g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}) \\
&+ f_{abd}f_{ace}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho}-g_{\lambda\rho}g_{\nu\mu})), \qquad (8.4.57)
\end{aligned}
$$

uz

$$
p+q+r+s=0. \qquad (8.4.58)
$$

Interakcija gostova sa gauge poljima je $-gf_{abc}p_\mu$, a fermiona sa gauge poljima $-ig\gamma_\mu T^a_{ji}$.

Chapter 9

Dodatak: Šredingerova, Hajzenbergova i Dirakova slika

Stanja u Šredingerovoj slici zadovoljavaju Šredingerovu jednačinu

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle_S}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle_S \ , \tag{9.0.1}$$

odakle je

$$|\psi(t)\rangle_S = U_S(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_S \tag{9.0.2}$$

gde je $U_S(t,t_0)$ evolucioni operator u Šredingerovoj slici. Ako je Hamiltonijan nezavistan od vremena (zatvoren sistem) onda je evolucioni operator

$$U_S(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \tag{9.0.3}$$

Dalje ćemo uzeti da je Hamiltonijan nezavistan od vremena.

U Hajzenbergovoj slici vektori stanja ne zavise od vremena; operatori nose vremensku evoluciju. Vektor stanja u Hajzenbergovoj slici je

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_S = e^{iH(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S \ , \tag{9.0.4}$$

gde je t_0 referentna tačka. Matrični elementi operatora su isti u obe slike

$${}_S\langle\psi(t)|O_S|\psi(t)\rangle_S = {}_H\langle\psi|O_H(t)|\psi\rangle_H$$

pa je

$$O_H(t) = e^{iH(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH(t-t_0)} \ . \tag{9.0.5}$$

Hamiltonijan celog sistema H rastavićemo u zbir slobodnog Hamiltonijana H_0 i male perturbacije (interakcioni član) H_{int}:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \ .$$

Operator u interakcionoj slici se definiše analogno sa Hajzenbergovom slikom samo se umesto H uzima H_0

$$O_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}O_S(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{9.0.6}$$

odnosno

$$O_I(t) = U(t,t_0)O_H(t)U^{-1}(t,t_0) \tag{9.0.7}$$

gde je

$$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \tag{9.0.8}$$

evolucioni operator. Za vektore stanja u interakcionoj slici dobija se

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_S && (9.0.9)\\ &= e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\psi\rangle_H \\ &= U(t,t_0)|\psi\rangle_H \\ &= U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I \ . && (9.0.10) \end{aligned}$$

$U(t,t_0)$ je evolucioni operator (propagator) u interakcionoj slici. U referentnoj tački sve tri slike se poklapaju:

$$\begin{aligned} &|\psi(t_0)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_S = |\psi\rangle_H \\ &O_I(t_0) = O_H(t_0) = O_S \ . \end{aligned} \tag{9.0.11}$$

Najčešće se uzima da je $t_0 = 0$. Diferenciranjem (9.0.9) po vremenu dobijamo jednačinu kretanja za stanja u interakcionoj slici

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = (H_{int})_I|\psi(t)\rangle_I \ , \tag{9.0.12}$$

gde je

$$(H_{int})_I = e^{iH_0(t-t_0)}(H_{int})e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{9.0.13}$$

hamiltonijan interakcije u interakcionoj slici. Diferenciranjem (9.0.6) po vremenu dobijamo diferencijalnu jednačinu za operatore u interakcionoj slici

$$i\frac{\mathrm{d}O_I(t)}{\mathrm{d}t} = [O_I(t), H_0]. \tag{9.0.14}$$

Operatori u interakcionoj slici evoluiraju po slobodnom Hamiltonijanu.

Važan rezultat (Dajsonova formula) je da je evolucioni operator u interakcionoj slici (QFT 1)

$$U(t,t_0) = Te^{-i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau (H_{\rm int})_I(\tau)} \ , \tag{9.0.15}$$

gde je $(H_{\rm int})_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}H_{\rm int}(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}$ interakcioni hamiltonijan u interakcionoj slici. Operatori u interakcionoj slici zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja, tj. njihova dinamika je odredjena sa H_0. Evolucija vektora stanja u interakcionoj slici je

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t,t')|\psi(t')\rangle_I \ , \tag{9.0.16}$$

gde je evolucioni operator u interakcionoj slici

$$U(t,t') = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t')}e^{-iH_0(t'-t_0)} \tag{9.0.17}$$

odnosno

$$U(t,t') = Te^{-i\int_{t'}^{t} \mathrm{d}\tau (H_{\rm int})_I(\tau)} \ , \tag{9.0.18}$$

Osobine evolucionog operatora:

$$\begin{aligned} &1. \ \ U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \\ &2. \ \ U(t_1,t_2)^{-1} = U(t_2,t_1) \ . \end{aligned} \tag{9.0.19}$$

Chapter 10

Dodatak: S matrica

U procesu rasejanja čestice dolaze iz daleke prošlosti, zatim intereaguju i u dalekoj budućnosti dobijamo finalno stanje. U eksperimentu se odredjuje verovatnoća da inicijalno stanje predje u neko zadato finalno stanje. Incijalna konfiguracija predstavlja skup skoro izolovanih čestica u dalekoj prošlosti. Finalna konfiguracija je takodje sastavljena od skoro neintereagujućih čestica u dalekoj budućnosti. Osnovna ideja teorije rasejanje je da smatramo da je interakcija isključena u dalekoj prošlosti i u budućnosti. To je moguće za kratkodometne interakcije ali u teoriji polja to je nemoguće, jer npr. elektron intereaguje sa virtuelnim fotonima. Zahvaljujući toj interakciji on ima fizičku masu m a ne golu masu m_0. Takodje mogu se javiti i vezana stanja, koja ćemo ignorisati.

In i *out* stanja su Hajzenbergova svojstvena stanja ukupnog Hamiltonijana H u dalekoj prošlosti odnosno budućnosti, koja u datim limesima teže stanjima slobodne teorije. To su asimptotska stanja i oni su direktni proizvod jednočestičnih stanja. Neka je $\varphi(0)$ stanje u trenutku $t = 0$ koje evoluira po 'slobodnom' Hamiltonijanu, dok je $\psi_{\text{in}}(0)$ stanje komletnog hamiltonijana H u trenutku $t = 0$ koje evoluira po hamiltonijanu H. Dakle

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in}}(0) &= \lim_{t\to-\infty} e^{iHt}\psi(t) \\ \varphi(0) &= \lim_{t\to-\infty} e^{iH_0t}\varphi(t) \end{aligned} \tag{10.0.1}$$

odnosno

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-iHt}\psi_{\text{in}}(0) = \lim_{t\to-\infty} e^{-iH_0t}\varphi(0) \ . \tag{10.0.2}$$

Stanja u gornjoj formuli su u Šredingerovoj slici. Uzećemo da je $t = 0$ trenutak u kome se sve tri slike poklapaju. Onda je in stanje $\psi_{\text{in}} = \psi_{\text{in}}(0)$ Hajzenbergovo stanje odredjeno sa

$$\psi_{\text{in}} = \lim_{t\to-\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi(0) = \Omega_+\varphi \ . \tag{10.0.3}$$

Ω_+ je Mollerov operator. On prevodi stanje slobodnog hamiltonijana u stanje ukupnog Hamiltonijana. Slično se definišu i *out* stanja. Iz asimptotskog ponašanja

$$\lim_{t\to\infty} e^{-iHt}\psi_{\text{out}}(0) = \lim_{t\to-\infty} e^{-iH_0t}\varphi(0) \tag{10.0.4}$$

sledi

$$\psi_{\text{out}} = \lim_{t\to\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi(0) = \Omega_-\varphi \ . \tag{10.0.5}$$

Ω_- je Mollerov operator.

Dakle

$$\begin{aligned} |\psi_\alpha, \text{in}\rangle &= \Omega_+|\varphi_\alpha\rangle \\ |\psi_\beta, \text{out}\rangle &= \Omega_-|\varphi_\beta\rangle \ . \end{aligned} \tag{10.0.6}$$

Primetimo da je

$$\Omega_\pm = \lim_{t\to\mp\infty} U(0,t) \ . \tag{10.0.7}$$

Iz (9.0.16) sledi

$$|\psi_\alpha(0)\rangle_I = U(0,-\infty)|\psi_\alpha(-\infty)\rangle_I \ . \tag{10.0.8}$$

Sa druge strane je $|\psi_\alpha, in\rangle = |\psi_\alpha(0)\rangle_I$ jer se Hajzenbergova i interakciona slika poklapaju u referentnoj tački $t_0 = 0$. Odavde se vidi i da je

$$|\psi_\alpha(-\infty)\rangle_I = |\varphi_\alpha\rangle \ . \tag{10.0.9}$$

Slično se dobija i za out stanje. U procesu rasejanja odredjujemo verovatnoću da in stanje predje u out stanje pa je matriňin element S matrice

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle\psi_\beta, \text{out}|\psi_\alpha, \text{in}\rangle = \langle\varphi_\beta|\Omega_-^{-1}\Omega_+|\varphi_\alpha\rangle \\ &= \langle\varphi_\beta|U(\infty,0)U(0,-\infty)|\varphi_\alpha\rangle \\ &= \langle\varphi_\beta|U(\infty,-\infty)|\varphi_\alpha\rangle \\ &= \langle\varphi_\beta|S|\varphi_\alpha\rangle. \end{aligned}$$

S matrica je dakle

$$S = U(\infty,-\infty) = Te^{i\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi_I)} \ . \tag{10.0.10}$$

To je centralni rezultat ove analize. Dobili smo matricu rasejanja u interakcionoj slici. Interakciona slika je pogodna jer u njoj polja zadovoljavaju slobodne jednačine kretanja.