Glava 1

Vordovi identiteti

U ovom poglavlju...

1.1 Vordovi identiteti u kvantnoj elektrodinamici

U ovom pogljavlju izvešćemo Vordove identitete u kvantnoj elektrodinamici primenom funkcionalnog formalizma. Oni su posledica održanja naelektrisanja, tj. globalne $U(1)$ simetrije, koja je posledica, a i povezana je sa kalibracionom simetrijom.

Generišući funkcional u KED je

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}} \tag{1.1.1}$$

gde je

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \tag{1.1.2}$$

tzv. efektivni lagranžijan. Kalibracione transformacije

$$\begin{aligned} A_\mu &\to A'_\mu = A^\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \\ \psi &\to \psi' = \psi - i\theta\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\theta\bar{\psi} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

nisu simetrija efektivnog lagranžijana. Član u efektivnom lagranžijanu koji fiksira kalibraciju nije kalibraciono invarijantan. Sabirci sa strujama takodje nisu kalibraciono invarijantni. Lako se vidi da je

$$\delta \int d^4x \mathcal{L}_{eff} = \int d^4x \Big(-\frac{1}{e\xi}\partial_\mu A^\mu \Box\theta + \frac{1}{e} J^\mu \partial_\mu \theta + i\theta(\bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi) \Big) \ . \tag{1.1.4}$$

Jasno je da se funkcionalni integral ne menja pri prelazku sa neprimovanih na primovane promenljive

$$\int \mathcal{D}A'^\mu \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(A', \bar{\psi}', \psi')} = \int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(A, \bar{\psi}, \psi)} \ . \tag{1.1.5}$$

Kako je mera integracije invarijantna to je

$$\int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \int d^4x \delta \mathcal{L}_{eff} e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(A,\bar{\psi},\psi)} = 0 \ . \tag{1.1.6}$$

Nakon parcijalne integracije dobijamo

$$\int \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \int d^4x \Big(-\frac{1}{e\xi}\Box \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu J^\mu + i(\bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi)\Big)\theta e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(A,\bar{\psi},\psi)} = 0. \tag{1.1.7}$$

Dalje ćemo polja A^μ, ψ i $\bar{\psi}$ u funkcionalnom integralu zameniti sa funkcionalnim izvodom po odgovarajućoj struji, tako dolazimo do

$$\Big(\frac{i}{e\xi}\Box \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu} - \frac{1}{e}\partial_\mu J^\mu + \eta\frac{\delta}{\delta\eta} - \bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\Big) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0 \ . \tag{1.1.8}$$

U prethodnom izrazu varijacion izvodi su levi. Izraz (1.1.8) je funkcionalna diferencijalna jednačina koju generišući funkcional Z u KED zadovoljava kao posledicu kalibracione simetrije. Ova jednačina je Vord-Takanahaši identitet. Pod Vord-Takanahaši identitetima podrazumeva se jedna šira klasa identiteta uključujući funkcionalne jednačine koje zadovoljavaju generišući funkcionali za povezane i za $1PI$ Grinove funkcije. Veze izmedju Grinovih funkcija koje su posledice simetrije su takodje Vord-Takanahaši identiteti. Uvodeći generišući funkcional za povezane Grinove funkcije, jednačina (1.1.8) postaje

$$\Big(-\frac{1}{\xi}\Box \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu} - \partial_\mu J^\mu \frac{1}{W} - ie\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} + ie\eta\frac{\delta}{\delta\eta}\Big) W[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = 0 \ . \tag{1.1.9}$$

Diferenciranjem jednačina (1.1.8) i (1.1.9) po strujama dobijamo veze između Grinovih funkcija. Grinove funkcije nisu gauge invarijantne. Sa druge strane, amplitude prelaza kao merljive veličine jesu kalibraciono invarijante.

Diferencirajmo izraz (1.1.9) po $J_\nu(y)$ i uzimimo da su sve struje jednake nuli:

$$-\frac{1}{i\xi}\Box \partial_\mu \frac{\delta^2(iW)}{\delta J_\nu(y)\delta J_\mu(x)}\Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} = \partial_x^\nu \delta(x-y) \tag{1.1.10}$$

odnosno

$$-\frac{i}{\xi}\Box_x \partial_\mu^x G^{\mu\nu}(x-y) = \partial_x^\nu \delta(x-y) \ . \tag{1.1.11}$$

Dvo-tačkasta Grinova funkcija je translaciono invarijantna i prećićemo u impulsni prostor

$$G^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{G}^{\mu\nu}(k) e^{-ik\cdot(x-y)} \ . \tag{1.1.12}$$

Tako dobijamo

$$\frac{ik^2}{\xi} k_\mu \tilde{G}^{\mu\nu}(k) = k^\nu \ . \tag{1.1.13}$$

Ova relacija predstavlja uslov na dvotačkastu Grinovu funkciju (pun propagator) koji je posledica kalibracione simetrije. Njeno rešenje je

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(k) = \Big(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\Big) f(k^2) - \frac{i\xi k^\mu k^\nu}{(k^2)^2} \ , \tag{1.1.14}$$

gde je $f(k^2)$ neka funkcija. Sabirak proporcionalan sa $f(k^2)$ je transverzalan, dok je deo sa ξ longitudinalan. Pun propagator za fotonsko polje je oblika

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(k) = \tilde{G}_0^{\mu\nu}(k) + \Pi^{\mu\nu}(k) \ , \tag{1.1.15}$$

gde je

$$i\tilde{G}_{\mu\nu 0}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon}\Big(g_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) \tag{1.1.16}$$

slobodni propagator, a $\Pi_{\mu\nu}$ kvantna korekcija propagatora. Na osnovu ovog izlaganja je jasno da je radijativna korekcija propagara čisto transverzalna.

Diferenciranjem funkcionalne jednačine (1.1.9) po $J_\mu(x)$, $\bar{\eta}(z)$ i $\eta(y)$ dobijamo

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu \frac{\delta^3 W}{\delta\eta(z)\delta\bar{\eta}(y)\delta J_\mu(x)}\Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \\ - \quad & ie\Big(\delta(x-y)\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(z)\delta\bar{\eta}(x)}\Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} + \delta(x-z)\frac{\delta^2 W}{\delta\bar{\eta}(y)\delta\bar{\eta}(x)}\Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0}\Big) = 0 \ , \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

odnosno

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi}\Box_x\partial_\mu^x\langle\Omega|TA^\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)|\Omega\rangle_c \\ & = e\delta(x-z)\langle\Omega|T\psi(y)\bar{\psi}(x)|\Omega\rangle_c - e\delta(x-y)\langle\Omega|T\bar{\psi}(z)\psi(x)|\Omega\rangle_c \ . \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Klasične jednačine kretanja za fotonsko polje su

$$\Box A^\mu - \Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\partial_\nu\partial^\mu A^\nu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu \ . \tag{1.1.19}$$

U Fejnmanovom gaugu je $\Box A^\mu = j^\mu$, pa primenom Švinger Dajsonovih jednačina imamo

$$\begin{aligned} & \partial_\mu\langle\Omega|Tj^\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)|\Omega\rangle_c \\ = \quad & e\delta(x-z)\langle\Omega|T\psi(y)\bar{\psi}(x)|\Omega\rangle_c - e\delta(x-y)\langle\Omega|T\bar{\psi}(z)\psi(x)|\Omega\rangle_c + \text{ kont. članovi} \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Kontaktni članovi ne daju doprinos matrici prelaza, tako da ih možemo ignorisati u prethodnoj formuli. Ovaj izraz takodje predstavlja Vordov identitet. Do ovog izraza se može doći i u operatorskom formalizmu.

Efektivno dejstvo u KED je odredjeno sa (sva polja su klasična- ne pišemo indeks kl.)

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = W[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] - \int d^4x(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu) \tag{1.1.21}$$

Primenom relacija

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu} = -J_\mu, \quad \frac{\delta W}{\delta J^\mu} = A_m \\
&\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = \bar\eta, \quad \frac{\delta W}{\delta\eta} = -\bar\psi \\
&\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi} = -\eta, \quad \frac{\delta W}{\delta\bar\eta} = \psi
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

iz (1.1.9) dobijamo

$$-\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu A^\mu + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + ie\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} - ie\bar\psi\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi} = 0\ . \tag{1.1.23}$$

Jednačina (1.1.23) je funkcionalni Vordov identitet za efektivno dejstvo. Iz njega se dobijaju veze (tj. Vordovi identiteti) izmedju vertekskih funkcija. Diferenciranjem (1.1.23) po $\psi(y)$ i $\bar\psi(z)$ i uzimanjem da su klasična polja nula dobijamo

$$\begin{aligned}
&\partial^x_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar\psi(z)\delta\psi(y)\delta A_\mu(x)}\Big| = \\
-\ &ie\delta(x-y)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(z)\delta\psi(y)}\Big| - ie\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi(y)\delta\bar\psi(x)}\Big|\ .
\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

1PI Grinove funkcije u impulsnom prostoru su odredjene sa

$$\int d^4x d^4z e^{i(p'\cdot z - p\cdot x)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar\psi(z)\delta\psi(y)}\Big| = -(2\pi)^4\delta(p'-p)S_F^{-1}(p) \tag{1.1.25}$$

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{i(p'\cdot z - p\cdot y - q\cdot x)}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar\psi(z)\delta\psi(y)\delta A^\mu(x)}\Big| = e(2\pi)^4\delta(p'-p-q)\tilde\Gamma^\mu(p,p',q) \tag{1.1.26}$$

Množenjem (1.1.23) sa $e^{i(p'\cdot z - p\cdot y - q\cdot x)}$ i integracijom po koordinatama x, y i z dobijamo

$$q_\mu\tilde\Gamma^\mu(p,p',q) = S_F^{-1}(p+q) - S_F^{-1}(p) \tag{1.1.27}$$

U limesu $q^\mu \to 0$ dolazimo do

$$\tilde\Gamma_\mu(p,p,0) = \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p^\mu}\ . \tag{1.1.28}$$

Identitet (1.1.28) je originalno izveo Vord, dok je identitet (1.1.27) je nekoliko godina kasnije izveo Takanahaši. Renormalizaciona konstanta Z_1 odredjene je sa jednačinom

$$\tilde\Gamma_\mu(p,p,0) = \frac{\gamma_\mu}{Z_1}\ . \tag{1.1.29}$$

Sa druge strane na osnovu spektralne reprezentacije propagotara znamo da je

$$iS_F(p) = \frac{iZ_2}{\not p - m} + \text{ostatak} \tag{1.1.30}$$

Iz (1.1.28) sledi $Z_1 = Z_2$. Dakle, renormalizacione konstante Z_1 i Z_2 su jednake u svim redovima teorije perturbacije.