

# TEORIJSKA MEHANIKA

## Lagranževa i Hamiltonova mehanika

Voja Radovanović  
Fizički fakultet  
Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2020. godina



# Sadržaj

<b>1 Njutnova mehanika</b>	<b>9</b>
1.1 Elementi kinematike tačke . . . . .	9
1.1.1 Referentni sistem . . . . .	9
1.1.2 Čestica . . . . .	10
1.1.3 Brzina i ubrzanje tačke . . . . .	10
1.2 Njutnovi zakoni . . . . .	16
1.3 Apsolutnost prostora i vremena u nerelativističkoj mehanici . . . . .	17
1.4 Galilejev princip relativnosti . . . . .	17
1.5 Sistemi sa konačno mnogo čestica . . . . .	19
1.6 Rad sile i neki tipovi sila . . . . .	21
1.7 Osnovne teoreme mehanike i zakoni održanja . . . . .	24
1.8 Prinudno kretanje . . . . .	26
1.9 Diferencijalne jednačine kretanja sistema bez veza . . . . .	29
1.10 Reakcije veza. Idealni sistemi . . . . .	30
1.11 Zadaci . . . . .	32
<b>2 Lagranževe jednačine kretanja</b>	<b>35</b>
2.1 Varijacioni račun . . . . .	35
2.2 Čestica u polju konzervativne sile . . . . .	38
2.3 Generalisane koordinate . . . . .	39
2.4 Hamiltonov princip. Lagranževe jednačine. . . . .	41
2.5 Kovariantnost Lagranževih jednačina . . . . .	46
2.6 Matematičko klatno . . . . .	47
2.7 Virtuelna pomeranja i virtuelni rad . . . . .	49
2.8 Lagranževe jednačine za sisteme sa nepotencijalnim silama . . . . .	51
2.9 Generalisano potencijalne sile . . . . .	55
2.10 Lagranževe jednačine sa množiteljima veza . . . . .	56
2.11 Kinetička energija sistema čestica u generalisanim koordinatama . . . . .	59
2.12 Zadaci . . . . .	61
<b>3 Zakoni održanja i simetrija</b>	<b>69</b>
3.1 Homogenost prostora i zakon održanja impulsa . . . . .	69
3.2 Izotropnost prostora i zakon održanja momenta impulsa . . . . .	71

3.3	Homogenost vremena i zakon održanja energije . . . . .	73
3.4	Neterina teorema u analitičkoj mehanici . . . . .	75
3.5	Zadaci . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Male oscilacije</b>	<b>83</b>
4.1	Ravnotežna konfiguracija . . . . .	83
4.2	Jednačine kretanja . . . . .	85
4.3	Primer . . . . .	87
4.4	Normalne mode i svojstveni problem . . . . .	89
4.5	Longitudinalne oscilacije lanca tačkastih masa . . . . .	94
4.6	Transverzalne oscilacije lanca tačkastih masa . . . . .	97
4.7	Zadaci . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Centralno kretanje</b>	<b>103</b>
5.1	Kretanje u polju centralne sile. Lagranževe jednačine . . . . .	103
5.2	Prvi integrali kretanja . . . . .	106
5.3	Kvalitativna analiza centralnog kretanja . . . . .	108
5.4	Keplerov problem . . . . .	111
5.5	Runge-Lencov vektor . . . . .	115
5.6	Problem dva tela . . . . .	116
5.7	Rasejanje čestica na centralno simetričnom potencijalu . . . . .	118
5.8	Zadaci . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Kretanje krutog tela</b>	<b>123</b>
6.1	Definicija krutog tela . . . . .	123
6.2	Rotacije . . . . .	124
6.3	Tenzori u euklidskom prostoru . . . . .	129
6.4	Šalova teorema . . . . .	130
6.5	Koriolisova teorema . . . . .	130
6.6	Ugaona brzina krutog tela . . . . .	131
6.7	Ugaona brzina i matrica rotacije . . . . .	132
6.8	Komponente ugaone brzine u sistemu krutog tela . . . . .	134
6.9	Komponente ugaone brzine u laboratorijskom sistemu . . . . .	135
6.10	Brzina tačke krutog tela . . . . .	136
6.11	Impuls krutog tela . . . . .	137
6.12	Moment impulsa krutog tela. Tenzor inercije . . . . .	138
6.13	Kinetička energija krutog tela . . . . .	142
6.14	Teorema impulsa za kruto telo . . . . .	145
6.15	Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke . . . . .	145
6.16	Lagranžev metod za kruto telo . . . . .	148
6.17	Zadaci . . . . .	158

<b>7 Relativno kretanje</b>	<b>167</b>
7.1 Veza između brzina čestice u dva sistema . . . . .	167
7.2 Veza izmedju ubrzanja čestice u dva sistema . . . . .	168
7.3 Dinamika relativnog kretanja . . . . .	168
7.4 Fukoovo klatno . . . . .	170
7.5 Zadaci . . . . .	171
<b>8 Hamiltonov formalizam</b>	<b>173</b>
8.1 Ležandrova transformacija . . . . .	173
8.2 Hamiltonian . . . . .	174
8.3 Hamiltonove jednačine kretanja . . . . .	175
8.4 Fazni prostor . . . . .	177
8.5 Hamiltonove jednačine i varijacioni princip . . . . .	177
8.6 Poasonove zgrade . . . . .	178
8.7 Zadaci . . . . .	180
<b>9 Kanonske transformacije</b>	<b>185</b>
9.1 Funkcije generatrise kanonskih transformacija . . . . .	185
9.2 Primer kanonskih transformacija . . . . .	189
9.3 Infinitezimalne kanonske transformacije . . . . .	190
9.4 Direktna provera . . . . .	191
9.5 Invarijantnost Poasonove zgrade . . . . .	193
9.6 Simplektičke transformacije . . . . .	194
9.7 Hamilton-Jakobijeva jednačina . . . . .	196
9.8 Hamiltonova karakteristična funkcija . . . . .	199
9.9 Integrabilni sistemi . . . . .	199
9.10 Promenljive dejstvo-ugao . . . . .	201
9.11 Keplerov problem . . . . .	203
9.12 Zadaci . . . . .	205
<b>A Kronekerova delta i simbol Levi–Čivita</b>	<b>207</b>
<b>B Grupa</b>	<b>209</b>
<b>C Kvadratna forma i ekstremne vrednosti funkcije više promenljivih</b>	<b>211</b>



# Predgovor

Mehanika je najstarija grana fizike. Ona izučava kretanja tela. U ovoj knjizi proučavaćemo mehaničko kretanje čestica i sistema čestica uključujući kretanje krutog tela. Pored toga ograničićemo se na situacije u kojima se tela kreću brzinama mnogo manjim od brzine svetlosti, tj. proučavaćemo nerelativističko kretanje tela. Osnovni dinamički zakoni ovakvih sistema su još davno napisani od strane Njutna. Primenom Njutnovih zakona, tj. rešavanjem odgovarajućih diferencijalnih jednačina, možemo odrediti zakone kretanja tela. Potrebno je da znamo sve sile koje deluju na tela, onda ih obično nacrtamo, projektujemo, postavimo diferencijalne jednačine i rešimo ih. Taj postupak je možda nelegantan, nekad komplikovan, ali u većini slučajeva dovodi do rešenja, bilo analitičkog bilo numeričkog. Njutnov ili kako se još naziva vektorski metod je koristan u mnogim praktičnim primenama, ali nema nekog dubljeg značaja za modernu fiziku. Hamilton, Lagranž, Ojler, Jakobi i mnogi drugi fizičari su Njutnove zakone dinamike prepisali na drugi način, možemo slobodno reći drugim jezikom. Tako je nastala analitička, odnosno teorijska mehanika u kojoj se mehaničko kretanje čestica opisuje Lagranževim odnosno Hamiltonovim formalizmom. Pri rešavanju mehaničkih problema oba formalizma imaju preim秉tvo nad Njutnovim metodom. Jednačine kretanja sistema čestica se u okviru analitičke mehanike lakše dobiju. To se posebno odnosi na sisteme sa vezama. Medjutim, značaj analitičke mehanike daleko prevazilazi samu analitičku mehaniku. Osnovni koncepti kvantne fizike imaju svoj analogon u analitičkoj mehanici, tako da je ona osnova celokupne teorijske fizike. Da bi se razumela, i možemo slobodno reći, i formulisala kvantna mehanika koriste se metode analitičke mehanike. Slično važi i za relativnost, elektrodinamiku, teoriju polja, statističku mehaniku, fiziku kontinuma i druge oblasti fizike. Dakle, analitička mehanika nam donosi nove, snažne metode kojima ćemo elegantnije rešiti mehaničke probleme, ali još i važnije, te metode su metode i moderne fizike.

Prva glava ove knjige je kratak pregled Njutnove mehanike. Njutnovi zakoni, tipične sile i osnovne teoreme mehanike su ukratko izloženi. Uvešćemo sisteme sa vezama i videti kako se za takve sisteme nalaze zakoni kretanja čestica u okviru Njutnove mehanike. U drugoj glavi ćemo izložiti Lagranžev formalizam. Polazna tačka za izvodjenje Lagranževih jednačina je Hamiltonov varijacioni princip. Da bismo formirali Lagranževe jednačine uvešćemo jednu novu funkciju koju nazivamo lagranžijanom. Naredna glava posvećena je simetriji mehaničkih sistema i njihovoј vezi sa zakonima održanja. Videćemo da su simetrija sistema i održanje fizičkih veličina u bliskoj vezi. Prednost analitičke mehanike je, izmedju ostalog, i u tome što se u njoj simetrija sistema vidi direktno. Naredne četiri glave posvećene su primenama Lagranževog formalizma. Analiziraćemo male oscilacije konzervativnih sistema, centralno kretanje i kretanje krutog tela, kao i relativno kretanje. U osmoj glavi izložićemo metod za rešavanje mehaničkih problema, koji je alternativan

Lagranževom formalizmu. To je Hamiltonov metod. Hamiltonov formalizam, kao i Lagranžev su u bliskoj vezi sa modernom fizikom. Poslednja glava je posvećena kanonskim transformacijama. U tekstu je dat i izvestan broj zadataka. Jedan deo zadataka je rešen eksplisitno kroz primere. Drugi deo Vam je ostavljen za samostalnu vežbu i dat je na kraju svake glave. Rešavanje zadataka je važan element učenja i razumevanja fizike. Trudio sam se da zadaci ilustruju teoriju i da pripadaju standardnom skupu zadataka koje studenti fizike rešavaju u okviru kursa teorijske mehanike. Na kraju knjige dat je spisak literature. Knjige [1] i [2] su najstandardniji udžbenici teorijske mehanike na većini Univerziteta. Ja Vam preporučujem da koristite ove dve knjige.

Knjiga je namenjena studentima fizike. Izborom tema sadržaj kursa se može prilagoditi različitim usmerenjima, od teorijsko-eksperimentalnog do nastave fizike u školama, primenjene fizike ili astrofizike.

Veliku zahvalnost dugujem koleginicama Sunčici Elezović-Hadžić i Maji Burić, profesorkama Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. One savesne kao i uvek, su vrlo pažljivo u svojstvu recenzenata, pročitale ceo rukopis i dale puno sugestija za njegovu popravku. Zahvaljujem se i Dragoljubu Gočaninu, studentu doktorskih studija Fizičkog fakulteta, koji je pročitao veći deo ovog materijala, posebno onaj koji se odnosi na zadatke, i dao mi korisne primedbe. Takođe, zahvaljujem se i Dušku Latasu, docentu Fizičkog fakulteta, koji je nacrtao sve slike u ovoj knjizi.

Beograd, 2015. godine

*Vojislav Radovanović*  
e-mail: rvoja@ipb.ac.rs

# Glava 1

## Njutnova mehanika

U ovoj glavi je rekapitulirana Njutnova mehanika. Većina ovog materijala Vam je poznata sa kursa Opšte fizike. Prvo poglavlje ove glave odnosi se na kinematiku tačke, dok se ostala odnose na dinamiku jedne čestice i sistema čestica. Izloženi su Njutnovi zakoni, teoreme energije, impulsa i momenta impulsa sistema čestica kao i uslovi pod kojima su spomenute veličine konstante kretanja. U poslednjem delu ove glave analiziraju se sistemi sa vezama, tj. sistemi u kojima postoje ograničenja na položaje i brzine čestica. Jednačine kretanja mehaničkih sistema sa vezama su date u vektorskoj formi.

Većina udžbenika iz teorijske mehanike sadrži uvodnu glavu posvećenu Njutnovoj mehanici. Preporučujemo Vam sledeće užbenike [1, 3, 6, 7] i [11].

### 1.1 Elementi kinematike tačke

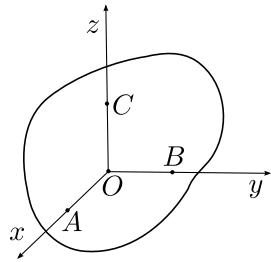
#### 1.1.1 Referentni sistem

Mehanika se bavi proučavanjem kretanja tela. Da bismo opisali kretanje jednog tela moramo uvesti drugo, tzv. referentno telo u odnosu na koje posmatramo kretanje. Referentno telo je najčešće nepokretno i apsolutno kruto. Telo je apsolutno kruto ukoliko se rastojanje izmedju ma koje dve njegove tačke ne menja. Za referentno telo vezaćemo koordinatni sistem koji nazivamo referentnim sistemom. Proizvoljnu tačku apsolutno krutog tela izabraćemo za koordinatni početak referentnog sistema, dok se ose Dekarovog koordinatnog sistema uvode konstrukcijom tri medjusobno ortogonalna pravca kroz tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$  na slici 1.1. Na ovaj način konstruisali smo jedan referentni sistem, definisan koordinatnim početkom i osama.

Njutnova mehanika je definisana u realnom trodimenzionom prostoru,  $\mathbf{R}^3$ . Rastojanje izmedju dve tačke  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  u ovom prostoru definisano je preko skalarnog proizvoda sa

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 .$$

Dekartove koordinate smo obeležili sa  $x, y, z$ . Prostor  $\mathbf{R}^3$  sa definisanim rastojanjem izmedju tačaka je euklidski prostor. Pri kretanju čestica vreme  $t$  igra ulogu parametra.



Slika 1.1: Referentni sistem.

### 1.1.2 Čestica

Česticu (materijalnu tačku) definišemo kao bezdimenzionalni objekat. To je telo čije dimenzije u dатој situaciji zanemaruјемо. Kada posmatramo kretanje Zemlje oko Sunca, Zemlju smatramo materijalnom tačkom, jer je prečnik Zemlje zanemarljiv u odnosu na rastojanje izmedju Sunca i Zemlje. Sa druge strane, ako analiziramo rotaciju Zemlje oko svoje ose onda je ne možemo aproksimirati tačkom.

Položaj čestice u svakom trenutku vremena određen je njenim radijus vektorom (vektorom položaja):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) . \quad (1.1.1)$$

Ova jednačina se još naziva i jednačinom kretanja čestice. Kriva koju čestica opisuje pri svom kretanju je putanja, odnosno trajektorija. U Njutnovoj mehanici Dekartove koordinate zauzimaju posebno mesto. U ovim koordinatama zakon kretanja čestice je

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 , \quad (1.1.2)$$

gde su  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ortovi Dekartovog sistema. Jednačine

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.1.3)$$

nazivaju se konačnim jednačinama kretanja čestice. One predstavljaju parametarski oblik trajektorije čestice. Put koji čestica predje od trenutka  $t_1$  do trenutka  $t_2$  je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} . \quad (1.1.4)$$

### 1.1.3 Brzina i ubrzanje tačke

Brzina materijalne tačke je data sa

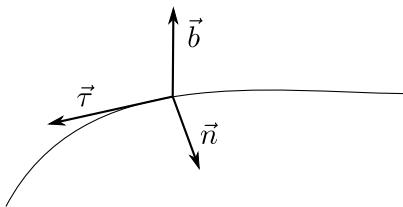
$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} , \quad (1.1.5)$$

tj. jednaka je vremenskom izvodu radijus vektora čestice. U Dekartovim koordinatama brzina čestice je

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \dot{z}\mathbf{e}_3 , \quad (1.1.6)$$



Slika 1.2: Vektor brzine čestice.



Slika 1.3: Prirodni trijedar.

dok je intenzitet brzine dat sa

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (1.1.7)$$

Intenzitet infinitezimalno malog vektora pomeraja je predjeni put,  $ds = |\mathrm{d}\mathbf{r}|$ , pa je

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = v dt \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Dakle, intenzitet brzine čestice je

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (1.1.9)$$

Vektor brzine čestice je

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \boldsymbol{\tau}, \quad (1.1.10)$$

gde je  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{ds}$  ort tangente na trajektoriju čestice u datoј tački. Brzina je dakle tangenta na putanju čestice, što je prikazano na slici 1.2. Ubrzanje čestice se definiše kao izvod brzine po vremenu

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.1.11)$$

U Dekartovim koordinatama ubrzanje tačke je

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_1 + \ddot{y}\mathbf{e}_2 + \ddot{z}\mathbf{e}_3. \quad (1.1.12)$$

Već smo rekli da je u mnogim situacijama umesto Dekartovih pogodno koristiti druge koordinate. Na taj način npr. jednačine kretanja čestica imaju matematički jednostavniji oblik. Prirodni sistem koordinata je vezan za svaku tačku trajektorije čestice. Prirodni trijedar čine tangenta, normala i binormala, što je prikazano na slici 1.3. Njihove ortove obeležavaćemo sa  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{b}$ , redom. Ort tangente smo ranije definisali. On je funkcija puta  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s)$ , jer put možemo uzeti

za parametar kojim parametrizujemo trajektoriju čestice. Diferenciranjem izraza  $\tau^2(s) = 1$  po  $s$  dobijamo

$$\tau \cdot \frac{d\tau}{ds} = 0 . \quad (1.1.13)$$

Vektor  $\frac{d\tau}{ds}$  je ortogonalan na ort tangente. Normiranjem ovog vektora dobijamo ort normale

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d\tau}{ds}}{\left| \frac{d\tau}{ds} \right|} = \rho \frac{d\tau}{ds} . \quad (1.1.14)$$

Veličina

$$\rho = \left| \frac{d\tau}{ds} \right|^{-1} \quad (1.1.15)$$

je poluprečnik krivine trajektorije čestice u dатој таčки. Ort binormale je ortogonalan na ort tangente i na ort normale, tj. definisan je sa

$$\mathbf{b} = \tau \times \mathbf{n} . \quad (1.1.16)$$

Sada možemo da izrazimo ubrzanje čestice u prirodnom trijedru. Lako se vidi da je

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\tau) = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt} . \quad (1.1.17)$$

Kako je

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n} ,$$

to je

$$\mathbf{a} = \dot{v}\tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}.$$

Ubrzanje čestice ima dve komponente: tangencijalnu  $\mathbf{a}_t = \dot{v}\tau$  i normalnu

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} .$$

Tangencijalno ubrzanje predstavlja promenu brzine po intenzitetu, dok je normalno određeno sa promenom brzine po pravcu i smeru. Lako se vidi da je

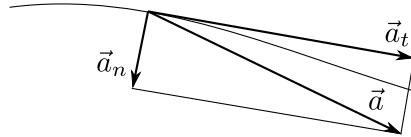
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \mathbf{a} \cdot \tau = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}} \quad (1.1.18)$$

i

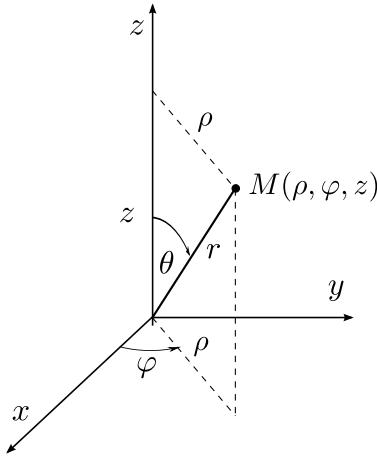
$$a_n^2 = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}{v^2} . \quad (1.1.19)$$

Vektor ubrzanja čestice prikazan je na slici 1.4. Ubrzanje leži u ravni koju određuju tangenta i normala. Ova ravan se naziva oskulatorna ravan. Intenzitet ubrzanja je

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} . \quad (1.1.20)$$



Slika 1.4: Normalno, tangencijalno i ukupno ubrzanje čestice.



Slika 1.5: Cilindrične koordinate.

Pored Dekartovih koordinata za opisivanje položaja čestice mogu se koristiti i neke druge koordinate  $q_1, q_2, q_3$ . Ove koordinate se nazivaju generalisanim koordinatama i definisane su relacijama

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) . \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Ove relacije moraju biti invertibilne. Potreban i dovaljan uslov za to je da jakobijan transformacije bude različit od nule

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0 . \quad (1.1.22)$$

Podsetimo se da je Jakobijan definisan sa

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} . \quad (1.1.23)$$

U fizici se najčešće koriste cilindrične i sferne koordinate. Cilindrične koordinate  $\rho, \varphi, z$  definisane

su sa

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z, \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

gde je  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ . Ove koordinate su prikazane na slici 1.5.  $\rho$  je rastojanje tačke do ose  $z$ , a  $\varphi$  je ugao koju zaklapa  $xOz$ -ravan i ravan koju čine  $z$ -osa i radijus vektor čestice. Odgovarajući Jakobijan je  $J = \rho$ . Ortovi cilindričnog koordinatnog sistema su

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Njihovim diferenciranjem po vremenu dobijamo

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho. \quad (1.1.26)$$

Radius vektor čestice u cilindričnim koordinatama je  $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$ . Brzinu čestice u cilindričnim koordinatama dobijamo jednostavno

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Još jednim diferenciranjem po vremenu dobijamo ubrzanje

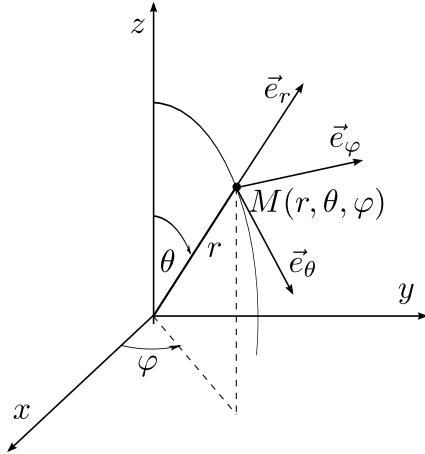
$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z. \quad (1.1.28)$$

Sferne koordinate  $r, \theta, \varphi$  definisane su sa

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

gde je  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Na slici 1.6 prikazali smo sferne koordinate tačke  $M$ .  $r$  je dužina radijusa vektora tačke, polarni ugao  $\varphi$  je definisan isto kao kod cilindričnih koordinata, dok je azimutalni ugao  $\theta$  ugao koji grade radijus vektor tačke i  $z$ -osa. Jakobijan je  $J = r^2 \sin \theta$ . Ortovi sfernog koordinatnog sistema mogu se razložiti po Dekartovoj bazi:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$



Slika 1.6: Sferne koordinate.

Njihovi vremenski izvodi su

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho = -\dot{\varphi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta)\end{aligned}\quad (1.1.31)$$

Komponente brzine čestice u sfernim koordinatama dobijamo diferenciranjem radijus vektora  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ . Rezultat je

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.1.32)$$

Ubrzanje je

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (1.1.33)$$

**Primer 1.** Čestica se kreće u  $Oxy$  ravni po logaritamskoj spirali  $\rho = Ce^{2\varphi}$ , gde je  $C$  konstanta, sa radijalnim ubrzanjem koje je jednako nuli. Naći zavisnost brzine čestice od polarnog ugla,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\varphi)$ , kao i zavisnost polarnog ugla od vremena. U početnom trenutku je  $\varphi(t=0) = 0$  i  $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0$ .

Rešenje: Iz jednačine trajektorije čestice sledi da je  $\dot{\rho} = 2Ce^{2\varphi}\dot{\varphi}$  i  $\ddot{\rho} = 2Ce^{2\varphi}(2\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})$ . Primenom (1.1.28) uslov  $a_\rho = 0$  daje

$$3\dot{\varphi}^2 + 2\ddot{\varphi} = 0.$$

Primenom

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

gornja diferencijalna jednačina razdvaja promenljive i lako se integrali. Rezultat integracije je

$$\dot{\varphi} = \omega_0 e^{-\frac{3}{2}\varphi} .$$

Integracijom gornje jednačine dobijamo

$$\varphi = \frac{2}{3} \ln \left( 1 + \frac{3}{2} \omega_0 t \right) .$$

Lako se nalazi

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{3}{2} \omega_0 t} .$$

Brzina čestice je

$$\mathbf{v} = C \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \omega_0 t \right)^{\frac{1}{3}} (2\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi) .$$


---

## 1.2 Njutnovi zakoni

Njutnova mehanika je zasnovana na principima koji su generalizacija velikog broja eksperimentata. Prvi Njutnov zakon je zakon inercije. Ako na telo ne deluju druga tela onda ono ili miruje ili se kreće ravnomerno pravolinijski. Jednačina kretanja takvog tela je

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t ,$$

gde su  $\mathbf{r}_0$  i  $\mathbf{v}_0$  konstantni vektori. Vektor  $\mathbf{r}_0$  je početni položaj tela, a  $\mathbf{v}_0$  njegova brzina. Sistemi reference u kojima važi zakon inercije su inercijalni sistemi. Ako se nalazite u autobusu koji naglo zakoči (usporava) vi ćete krenuti unapred. Na vas ne deluju druga tela, a vi menjate svoje stanje kretanja. Ovakav sistem je neinercijalan.

Sila koja deluje na telo je proporcionalna sa promenom impulsa tela, tj.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

gde je  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  impuls čestice, a  $\mathbf{F}$  sila koja deluje na česticu. Ovo je drugi Njutnov zakon. On uvodi dva nova pojma u fiziku: silu i masu. Sila je mera interakcije izmedju tela, dok je masa tela mera njegove inertnosti i njegove gravitacione interakcije sa drugim telima.

Ukoliko je masa čestice konstantna, drugi Njutnov zakon je

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} .$$

Ovo je osnovna jednačina mehanike.

Treći Njutnov zakon je zakon akcije i reakcije. Neka imamo dve čestice koje ćemo obeležiti indeksima 1, odnosno 2. Sa  $\mathbf{F}_{12}$  obeležićemo silu kojom prva čestica deluje na drugu, a sa  $\mathbf{F}_{21}$  silu kojom čestica označena indeksom 2 deluje na česticu označenu sa indeksom 1. Zakon akcije i reakcije je

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (1.2.34)$$

Sile interakcije kojima dva tela deluju jedno na drugo jednake su po intenzitetu, a suprotnog su smera.

Recimo, još jednom da Njutnovi zakoni važe u inercijalnim sistemima. Ako je sistem  $S$  inercijalan, onda je i svaki drugi sistem koji se kreće konstantnom brzinom u odnosu na njega takođe inercijalan.

### 1.3 Apsolutnost prostora i vremena u nerelativističkoj mehanici

Dogadjaj je fizička pojava koja se desila u nekom trenutku vremena  $t$  i na nekom mestu, tj. u tački  $x, y, z$ . Paljenje sijalice, kao i stizanje voza u stanicu su primjeri dogadjaja. Neka se dogadjaji 1 i 2 dešavaju u trenucima  $t_1$  odnosno  $t_2$ , u tačkama čije su koordinate  $x_1, y_1, z_1$  odnosno  $x_2, y_2, z_2$ . Ove veličine je izmerio posmatrač u sistemu  $S$  svojim satom i lenjirima. Posmatrač iz drugog sistema  $S'$ , koji se npr. kreće u odnosu na sistem  $S$ , ovim dogadjajima pridružuje druge brojeve  $t'_1, x'_1, y'_1, z'_1$  odnosno  $t'_2, x'_2, y'_2, z'_2$ .

U Njutnovoj mehanici prostor i vreme su absolutni. Apsolutnost vremena znači da je vremenski interval izmedju dogadjaja 1 i 2 isti za oba posmatrača, tj.

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 . \quad (1.3.35)$$

Apsolutnost prostora ogleda se u tome da je rastojanje izmedju istovremenih dogadjaja isto u svim sistemima. Drugim rečima ako je  $t_1 = t_2$  tada je

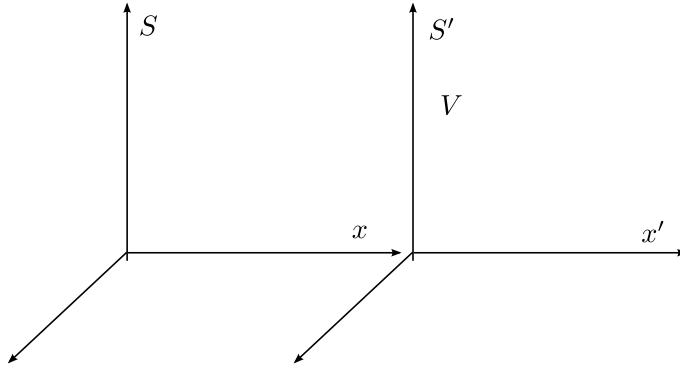
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 . \quad (1.3.36)$$

### 1.4 Galilejev princip relativnosti

Formulisanje dinamičkih zakona fizičkih sistema podrazumeva ne samo skup jednačina kretanja sistema, već i davanje precizanog odgovora na pitanje u kojim situacijama važe isti zakoni. Ako u jednom sistemu reference važe Njutnovi zakoni kretanja mehaničkih sistema legitimno je pitanje da li u sistemu koji se kreće u odnosu na ovaj važe isti zakoni.

Galilejeve transformacije koordinata su relacije koje povezuju koordinate nekog dogadjaja u dva inercijalna sistema, a koje su u skladu sa osobinama prostora i vremena u Njutnovoj mehanici. Prvo ćemo razmatrati jednu specifičnu Galilejevu transformaciju. Neka se inercijalni sistem  $S'$  kreće konstantnom brzinom  $\mathbf{V}$  u odnosu na inercijalni sistem  $S$ , kao što je prikazano na slici 1.7. Uzećemo da su se ova dva sistema poklapala u početnom trenutku. Veza izmedju koordinata jednog dogadjaja u ova dva sistema je

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t \\ t' &= t . \end{aligned} \quad (1.4.37)$$



Slika 1.7: Sistem  $S'$  se kreće konstantnom brzinom  $V$  duž  $x$ -ose u odnosu na sistem  $S$ .

Relacije (1.4.37) su specijalne Galilejevom transformacijom ili bustovi<sup>1</sup>. Ako se sistem  $S'$  kreće duž zajedničke  $x$  ose tada prethodne jednačine postaju

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t . \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

Diferenciranjem prve jednačine u (1.4.37) po vremenu dobijamo klasični zakon sabiranja brzina

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} . \quad (1.4.39)$$

U prethodnoj formuli  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}'$  su brzine čestice u odnosu na sistem  $S$ , odnosno  $S'$ . Još jedno diferenciranje po vremenu vodi nas do relacije

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} . \quad (1.4.40)$$

Ubrzanje je dakle isto u oba inercijalna sistema.

Razmatrimo izolovan inercijalan sistem od dve čestice. Sila kojom druga čestica deluje na prvu iz ovog sistema je funkcija relativnog radijusa vektora ove dve čestice i njihove relativne brzine

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) . \quad (1.4.41)$$

Naravno, analogna formula važi za silu kojom prva čestica deluje na drugu. Drugi Njutnov zakon za prvu česticu u inercijalnom sistemu  $S$  je

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) , \quad (1.4.42)$$

gde je  $m_1$  masa prve čestice. Prelazak u inercijalnom sistemu  $S'$  je jednostavan. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 , \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

---

<sup>1</sup>Termin bust potiče od engleske reči boost.

tj. relativan radijus vektor i relativna brzina čestica su invarijantne na Galilejeve transformacije. Pokazali smo da je ubrzanje nepromenejno pri Galilejevim transformacijama. Takodje svi eksperimentalni rezultati pokazuju da je masa čestice takodje invarijantna. Prema tome u sistemu  $S'$  drugi Njutnov zakon ima oblik

$$m_1 \mathbf{a}'_1 = \mathbf{F}'_{21}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1, \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) . \quad (1.4.44)$$

Dakle drugi Njutnov zakon ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Drugim rečima, drugi Njutnov zakon je kovarijantan pri specijalnim Galilejevim transformacijama.

U prethodnom izlaganju videli smo da je svaki sistem koji se kreće konstantnom brzinom u odnosu na inercijalni sistem takodje inercijalan. Međutim, Galilejeve transformacije su jedna šira klasa transformacija koje povezuju inercijalne sisteme. One pored bustova uključu i rotacije, prostorne translacije i vremenske translacije.

Sistem  $S'$  dobijen rotacijom inercijalnog sistema  $S$  je takodje inercijalan. Rotacije su transformacije koordinata koje ne menjaju dužinu vektora. Pri rotaciji vektor  $\mathbf{r}$  prelazi u novi vektor  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ , gde je  $R$  ortogonalna matrica formata  $3 \times 3$  jedinične determinante. Matrica  $R$  je matrica rotacije. O njima će biti više reči u poglavljiju 6.2. Prostorna translacija za konstantni vektor  $\mathbf{c}$  je transformacija koja vektor  $\mathbf{r}$  prevodi u vektor  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{c}$ . Vremenska translacija je  $t' = t + \tau$ . Postoje tri nezavisne rotacije, tri translacije, jedna vremenska translacija i tri busta. Ukupno deset. Sve ove transformacije su Galilejeve transformacije. Dakle, proizvoljna Galilejeva transformacija je data sa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= R\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{c} \\ t' &= t + \tau . \end{aligned} \quad (1.4.45)$$

Mi smo, na primeru jedne čestice, pokazali kovarijantnost Njutnovog zakona pri bustovima. Može se pokazati da Njutnovi zakoni ne menjaju oblik pri svim Galilejevim transformacijama. Pošto Galilejeve transformacije povezuju samo inercijalne sisteme onda zaključujemo da zakoni mehanike imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Ovaj iskaz je Galilejev princip relativnosti.

Recimo na kraju da je Galilejeva simetrija samo približna simetrija u prirodi. Ona važi u nerelativističkom limesu, koji odgovara brzinama koje su mnogo manje od brzine svetlosti.

## 1.5 Sistemi sa konačno mnogo čestica

Sada ćemo razmatrati sistem koji se sastoji od više čestica koje medjusobno deluju jedna na drugu i na koje mogu da deluju čestice van sistema. Sile kojima čestice van sistema deluju na čestice sistema su spoljašnje sile. Sa druge strane, sile kojima medjusobno jedna na drugu deluju čestice sistema zvaćemo unutrašnjim silama. Masu čestice indeksa  $\alpha$  obeležićemo sa  $m_\alpha$ , radijus vektor sa  $\mathbf{r}_\alpha$  itd. Neka je ukupan broj čestica u sistemu  $N$ . Sila interakcije izmedju dve čestice zavisi od njihovog relativnog radijus vektora i relativne brzine. Sila kojom čestica indeksa  $\alpha$  deluje na česticu indeksa  $\beta$  je

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) . \quad (1.5.46)$$

Prethodni izraz se naziva zakonom sile i on je u skladu sa Galilejevim principom relativnosti.

Sistem čestica je izolovan, odnosno zatvoren, ukoliko su spoljašnje sile jednake nuli. Drugim rečima, u izolovanom sistemu čestica na svaku česticu sistema deluju samo čestice iz tog sistema. Iz zakona sile sledi da je sila koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$  izolovanog sistema data sa

$$\mathbf{F}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mathbf{F}_{\beta\alpha} = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) . \quad (1.5.47)$$

U prethodnoj formuli se sumira po česticama indeksa  $\beta$  i  $\beta \neq \alpha$ .

Ako na čestice sistema deluju spoljašnje sile, tj. tela izvan sistema, onda je sistem neizolovan. Podsistem izolovanog sistema je neizolovan. Neka se podsistem sastoji od  $s < N$  čestica. Položaji i brzine čestica koje ne pripadaju podsistemu, a kojih ima  $N - s$ , su poznate funkcije vremena:

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(t), \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha(t), \quad \alpha = s + 1, \dots, N . \quad (1.5.48)$$

Zamenom u (1.5.47) dobijamo

$$\mathbf{F}_\alpha = \tilde{\mathbf{F}}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, t) , \quad (1.5.49)$$

gde se vremenska zavisnost pojavljuje zbog jednačina (1.5.48). Pojava argumenta  $t$  u prethodnoj jednačini ukazuje na neizolovanost inercijalnog sistema.

Jednačine kretanja čestica sistema su

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mathbf{F}_{\beta\alpha} + \mathbf{F}_\alpha^{(\text{ext})}, \quad \alpha = 1, \dots, N . \quad (1.5.50)$$

Prvi sabirak sa desne strane u (1.5.50) je unutrašnja sila, a drugi ukupna spoljašnja sila koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$ . Sabiranjem jednačina kretanja dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \mathbf{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha^{(\text{ext})} . \quad (1.5.51)$$

Primenom zakona akcije i reakcije unutrašnje sile se krate u prethodnom izrazu, pa dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha^{(\text{ext})} . \quad (1.5.52)$$

Ako uvedemo radius vektor centra mase sistema čestica sa

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} , \quad (1.5.53)$$

onda (1.5.52) postaje

$$M \ddot{\mathbf{r}}_{cm} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha^{(\text{ext})} , \quad (1.5.54)$$

gde je  $M$  ukupna masa sistema. Ovo je vrlo važna formula. Centar mase sistema čestica se kreće pod dejstvom ukupne spoljnje sile.

## 1.6 Rad sile i neki tipovi sila

Neka je  $\mathbf{F}_\alpha$  ukupna sila koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$  jednog  $N$ -čestičnog sistema. Elementarni rad svih sila na infinitezimalno malim pomeranjima čestica sistema je definisan sa

$$d'A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha . \quad (1.6.55)$$

U prethodnom izrazu diferencijal smo obeležili sa  $d'$ , jer elementarni rad,  $d'A$  u opštem slučaju nije totalni diferencijal<sup>2</sup>.

U opštem slučaju sile mogu biti potencijalne i nepotencijalne. Prvo ćemo definisati jednu specijalnu klasu potencijalnih sila, tzv. konzervativne sile. Sila koja deluje na česticu sa indeksom  $\alpha$  je konzervativna ako može da se napiše u obliku

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\alpha} , \quad (1.6.56)$$

gde je  $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  potencijalna energija, odnosno potencijal sistema. Parcijalni izvodi u gradijentu  $\nabla_\alpha$  u (1.6.56) su po koordinatama čestice indeksa  $\alpha$ , tj.

$$\nabla_\alpha U = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \mathbf{e}_3 .$$

Elementarni rad ovakvih sila je totalni diferencijal:

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^N \nabla_\alpha U \cdot d\mathbf{r}_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right) \\ &= -dU . \end{aligned} \quad (1.6.57)$$

Iz prethodnog izraza se vidi da je rad konzervativnih sila na premeštanju sistema iz konfiguracije 1 u konfiguraciju 2 jednak

$$A = - \int_{(1)}^{(2)} dU = -(U_2 - U_1) . \quad (1.6.58)$$

<sup>2</sup>Da bi izraz

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

bio totalni diferencijal potrebno je i dovoljno da važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} . \end{aligned}$$

Pokažite da ako je sila  $\mathbf{F} = ax^2 \mathbf{e}_x + bxy \mathbf{e}_y + cz^2 \mathbf{e}_z$ , gde su  $a, b, c$  konstante, elementarni rad nije totalni diferencijal.

Rad konzervativnih sila je jednak negativnoj promeni potencijalne energije. On zavisi samo od početne i krajnje konfiguracije sistema. Ako se početna i krajnja konfiguracija poklapaju onda je rad konzervativnih sila nula:

$$A = - \oint dU = 0 . \quad (1.6.59)$$

Jednostavan test za proveru da li je sila  $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  konzervativna je da se pokaže da je njen rotor, računat po koordinatama čestice indeksa  $\alpha$  jednak nuli, tj.  $\text{rot}_\alpha \mathbf{F}_\alpha = 0$ .

Navećemo dva primera konzervativnih sile. Prvi je gravitaciona sila. Neka se čestica mase  $M$  nalazi u koordinatnom početku. Sila kojom ona deluje na drugu česticu mase  $m$ , koja se nalazi u tački sa radijus vektorom  $\mathbf{r}$  data je Njutnovim zakonom gravitacije

$$\mathbf{F} = -G_N \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} , \quad (1.6.60)$$

gde je  $G_N$  Njutnova gravitaciona konstanta. Rotor ove sile je nula,  $\text{rot} \mathbf{F} = 0$ , pa je ona konzervativna. Potencijalna (gravitaciona) energija je

$$\begin{aligned} U &= - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G_N m M \int \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3} \\ &= G_N m M \int \frac{dr}{r^2} \\ &= -G_N \frac{mM}{r} + C . \end{aligned} \quad (1.6.61)$$

Ako izaberemo da je potencijal  $U = 0$  kada  $r \rightarrow \infty$ , integraciona konstanta  $C$  jednak je nuli. Prethodni rezultat se lako generališe na slučaj sistema tačkastih masa. Potencijalna energija sistema je

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} G_N \frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} . \quad (1.6.62)$$

Drugi primer konzervativne sile je elastična sila  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ . Lako se vidi da je

$$\text{rot} \mathbf{F} = -k \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 . \quad (1.6.63)$$

Potencijalna (elastična) energija je

$$U = k \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} kr^2 .$$

Ova dva primera konzervativnih sile imaju jednu zajedničku osobinu. Obe sile su usmerene ka jednom centru. Ovakve sile se nazivaju centralnim silama. Neka su vektori položaja dve čestice  $\mathbf{r}_\alpha$  odnosno  $\mathbf{r}_\beta$ . Sila interakcije ove dve čestice je centralna ako je kolinearna sa relativnim radijus vektorom ove dve čestice, tj. ukoliko ima oblik

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) \frac{\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} ,$$

gde je  $F_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|)$  skalarna funkcija rastojanja izmedju čestica.

Potencijalne sile su oblika

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_\alpha U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) . \quad (1.6.64)$$

Potencijal je funkcija vektora položaja čestica u sistemu, ali i vremena. Konzervativne sile su specijalni slučaj potencijalnih, ukoliko potencijalna energija ne zavisi eksplisitno od vremena. Elementarni rad potencijalnih sila nije totalni diferencijal:

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{r}_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^N \nabla_\alpha U \cdot d\mathbf{r}_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right) \\ &= -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (1.6.65)$$

Sile koje nisu potencijalne nazivaju se nepotencijalnim. Prvi primer za takve sile su girokopske sile. One su linearne i homogene funkcije brzina čestica, i njihov rad je jednak nuli. Primer takve sile je sila kojom magnetno polje deluje na nanelektrisanu česticu u kretanju:  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Lako se vidi da je  $dA = 0$ . Druga velika klasa nepotencijalnih sila su disipativne sile. Rad disipativnih sila je negativan, to su sile otpora sredine. Primer za disipativnu silu je Stoksova sila. To je sila koja deluje na kuglicu poluprečnika  $r$  koja se kreće u viskoznom fluidu brzinom  $\mathbf{v}$ . Data je sa  $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$  gde je  $k = 6\pi\eta r$  pozitivna konstanta. Pri većim brzinama čestice sila otpora postaje proporcionalna kvadratu njene brzine. Trenje klizanja je takođe disipativna sila.

**Primer 1.** Sila koja deluje na česticu ima oblik

$$\mathbf{F} = C((2xy^2 - z^3)\mathbf{e}_x + 2x^2y\mathbf{e}_y - 3xz^2\mathbf{e}_z) ,$$

gde je  $C$  konstanta. Pokazati da je ova sila konzervativna, i odrediti potencijalnu energiju. Uzeti da je potencijalna energija u koordinatnom početku jednaka nuli.

Rešenje: Rotor ove sile je jednak nuli, a kako ona ne zavisi od vremena, zaključujemo da je konzervativna. Potencijalnu energiju ćemo odrediti na dva načina. Prvi je izborom krive po kojoj integralimo. Potencijalna energija ne zavisi od izbora trajektorije. Izabraćemo da je trajektorija koja povezuje koordinatni početak i tačku  $(x, y, z)$  u kojoj odredujemo potencijalnu energiju sastavljena iz tri dela. Prvi je duž  $x$ -ose od koordinatnog početka do tačke  $(x, 0, 0)$ . Drugi deo je od tačke  $(x, 0, 0)$  do tačke  $(x, y, 0)$  duž  $y$ -ose. Poslednji, treći deo je duž  $z$ -ose od  $(x, y, 0)$  do  $(x, y, z)$ . Potencijalna energija je

$$U = -C \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (2xy^2 - z^3) dx - C \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} 2x^2y dy + 3C \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} xz^2 dz .$$

Rešavanjem gornjih integrala dobijamo

$$U = -C(x^2y^2 - xz^3) .$$

Drugi način za određivanje potencijalne energije je polazeći od

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= -C(2xy^2 - z^3) , \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -2Cx^2y , \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 3Cxz^2 .\end{aligned}\tag{1.6.66}$$

Integracija poslednje jednačine daje

$$U = Cxz^3 + f(x, y),$$

gde je  $f = f(x, y)$  funkcija koju određujemo iz druge dve jednačine. Iz druge jednačine sledi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2Cx^2y ,$$

odakle je

$$f = -Cx^2y^2 + g(x) .$$

Zamenom u prvu jednačinu dobija se da je  $g(x) = 0$ . Dakle, dobijamo isti rezultat za potencijalnu energiju.

---

## 1.7 Osnovne teoreme mehanike i zakoni održanja

### Teorema kinetičke energije i zakon održanja mehaničke energije

Kinetička energija sistema čestica je

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha v_\alpha^2 .\tag{1.7.1}$$

Primenom drugog Njutnovog zakona elementarni rad sila koje deluju na čestice sistema je

$$\begin{aligned}d'A &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \cdot d\mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha = d\left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2}{2}\right) \\ &= dT .\end{aligned}\tag{1.7.2}$$

Dakle, elementarni rad jednak je promeni kinetičke energije sistema

$$d'A = dT .\tag{1.7.3}$$

Poslednji izraz je teorema kinetičke energije. Ako su sile u sistemu potencijalne, tada je

$$\frac{d'A}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}\tag{1.7.4}$$

pa je

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} . \quad (1.7.5)$$

Ako su sile konzervativne, tj.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 ,$$

dobijamo

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0 . \quad (1.7.6)$$

Ukupna mehanička energija sistema, koja je zbir kinetičke i potencijalne energije je nepromenjena ako su sile u sistemu konzervativne. Mehanička energija konzervativnih sistema je integral kretanja. To je zakon održanja mehaničke energije.

### Teorema impulsa i zakon održanja impulsa

Ukupni mehanički impuls sistema čestica je  $\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$ . Potražimo njegov vremenski izvod u inercijalnom sistemu referenice

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\mathbf{v}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha} . \quad (1.7.7)$$

Primenom zakona akcije i reakcije u gornjoj sumi ostaju samo spoljašnje sile

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha}^{(\text{ext})} . \quad (1.7.8)$$

Formula (1.7.8) je teorema impulsa za sistem čestica. Promena impulsa sistema čestica u jedinici vremena jednak je ukupnoj sumi spoljašnjih sila koje deluju na čestice sistema. Ukoliko je ukupna spoljašnja sila jednaka nuli, onda je ukupni impuls sistema konstanta (integral) kretanja

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const.} \quad (1.7.9)$$

To je zakon održanja impulsa.

### Teorema momenta impulsa i zakon održanja momenta impulsa

Moment impulsa (angularni moment) sistema čestica je

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} . \quad (1.7.10)$$

Moment impulsa zavisi od izbora pola. Izvod momenta impulsa  $\mathbf{L}$  po vremenu se lako nalazi:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{a}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{M} \quad (1.7.11)$$

Dakle,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} , \quad (1.7.12)$$

gde je  $\mathbf{M}$  ukupni moment sila. Ovo je teorema momenta impulsa za sistem čestica (naravno u inercijalnom sistemu reference). Sile ponovo možemo podeliti na unutrašnje i spoljašnje, pa je moment sile dat sa

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha = \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{(\text{ext})} . \quad (1.7.13)$$

Moment unutrašnjih sila je dat sa

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(\text{int})} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\beta\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \mathbf{r}_\beta \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \times \mathbf{F}_{\beta\alpha} . \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

U drugom sabirku smo zamenili neme indekse  $\alpha$  i  $\beta$ , a zatim smo primenili zakon akcije i reakcije. Ako pretpostavimo da su unutrašnje sile centralne, onda je njihov ukupni moment sile jednak nuli. Dakle, teorema momenta impulsa u slučaju unutrašnjih centralnih sila je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(\text{ext})} . \quad (1.7.15)$$

Ako je moment spoljašnjih sila jednak nuli i ako su unutrašnje sile centralne onda iz (1.7.15) sledi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \text{const.} , \quad (1.7.16)$$

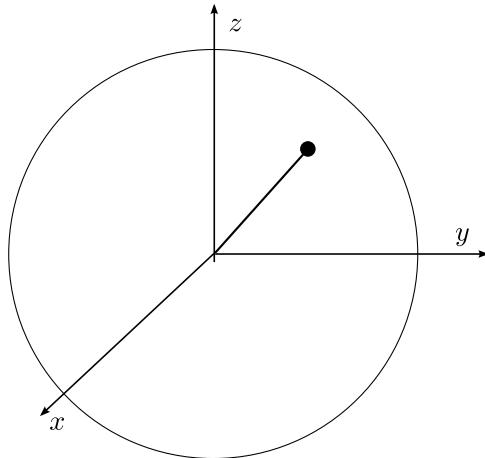
tj. moment impulsa sistema čestica je konstantan. Ovo je zakon održanja momenta impulsa.

## 1.8 Prinudno kretanje

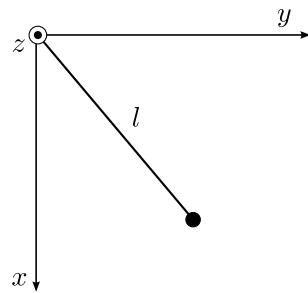
Kretanja mogu biti prinudna (vezana) ili bez veza<sup>3</sup>. Kretanje je prinudno ako postoje izvesna ograničenja na položaje i brzine čestica. Ova ograničenja izražavamo (ne)jednakostima koja zavise od položaja i brzina čestica i eventualno vremena. Navešćemo nekoliko primera vezanih kretanja.

---

<sup>3</sup>Kretanja bez veza se nazivaju i slobodnim kretanjima, mada ćemo ovaj termin izbegavati, jer se u literaturi često pojam slobodnog kretanja odnosi na kretanje čestica na koje ne deluju sile.



Slika 1.8: Kretanje čestice po površini sfere.



Slika 1.9: Matematičko klatno.

1. Kretanje čestice po površini sfere poluprečnika  $R$  (slika 1.8) je vezano kretanje, jer koordinate čestice  $x, y$  i  $z$  moraju zadovoljavati jednačinu

$$f_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 . \quad (1.8.17)$$

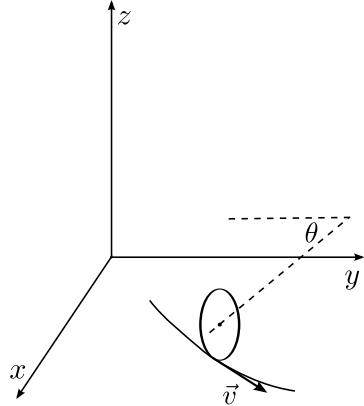
Ova jednačina se naziva jednačinom veze.

2. Kretanje molekula gasa koji se nalazi u sudu je takođe primer prinudnog kretanja, jer molekuli ne mogu da napuste sud. Ukoliko je sud sfera poluprečnika  $R$ , onda koordinate svake čestice zadovoljavaju nejednakost

$$f_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 < 0 . \quad (1.8.18)$$

3. Sledeci primer je matematičko klatno, prikazano na slici 1.9. Ako je dužina klatna  $l$  onda postoje dve jednačine veze

$$\begin{aligned} f_3 &\equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0 \\ f_4 &\equiv z = 0 . \end{aligned} \quad (1.8.19)$$



Slika 1.10: Disk koji se kotrlja bez proklizavanja

4. Neka su dve male kuglice vezane za krajeve tankog štapa zanemarljive mase. Neka je dužina štapa  $l$ . Ako sa  $x_1, y_1, z_1$  obeležimo Dekartove koordinate prve, a sa  $x_2, y_2, z_2$  druge čestice, onda jednačina veze ima oblik

$$f_5 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0 . \quad (1.8.20)$$

5. Neka se disk poluprečnika  $R$  kotrlja bez klizanja u  $xy$  ravni kao što je prikazano na slici 1.10. Ugao rotacije diska označimo sa  $\varphi$ , a sa  $\theta$  ugao koji osa diska gradi sa pozitivnim delom  $y$  ose. Da bismo opisali položaj diska pored uglova  $\theta$  i  $\varphi$  uvešćemo koordinate  $x, y$  centra mase diska. Kako nema klizanja, to je brzina centra mase diska data sa

$$v = R\dot{\varphi} . \quad (1.8.21)$$

Projektovanjem vektora brzine centra mase diska na  $x$  odnosno  $y$  osu, a primenom (1.8.21), dobijaju se dve jednačine veza

$$\begin{aligned} f_6 &\equiv \dot{x} - R\dot{\varphi} \cos \theta = 0 \\ f_7 &\equiv \dot{y} - R\dot{\varphi} \sin \theta = 0 . \end{aligned} \quad (1.8.22)$$

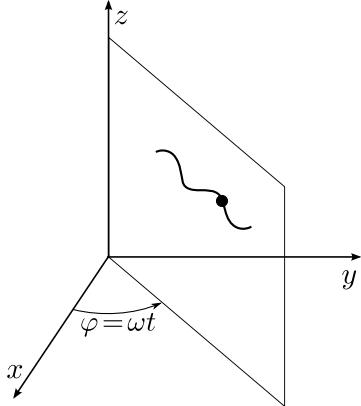
6. Neka se čestica kreće u ravni koja ravnomođno rotira oko  $z$  ose ugaonom brzinom  $\omega$  (slika 1.11). Ako se u početnom trenutku ta ravan poklapala sa  $xOz$  ravni, jednačina veze je

$$f_8 \equiv y - x \tan(\omega t) = 0 . \quad (1.8.23)$$

Ukoliko jednačine veza imaju oblik

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (1.8.24)$$

takve se veze nazivaju holonomnim. Dakle, holonomne veze su izražene jednakostima i zavise od koordinata čestica i vremena. Veze koje nemaju prethodni oblik nazivaju se neholonomnim.



Slika 1.11: Čestica se kreće u ravni koja rotira.

Veze  $f_1, f_3, f_4, f_5, f_8$  su holonomne, dok je veza  $f_2$  neholonomna. Veza koja pored koordinata zavisi i od brzina

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = 0 \quad (1.8.25)$$

je takođe neholonomna. Takve su veze  $f_6$  i  $f_7$ . Sistemi kod kojih su prisutne samo holonomne veze nazivaju se holonomnim sistemima.

Veze mogu biti zadržavajuće i nezadržavajuće. Ukoliko je veza izražena nejednakostima ona je nezadržavajuća. Primer takve veze je veza  $f_2$ .

Ako se u jednačini veze vreme ne pojavljuje eksplicitno ona se naziva stacionarnom. U suprotnom je nestacionarna. Veza  $f_8$  je nestacionarna, dok su veze  $f_1, f_2, \dots, f_7$  stacionarne.

## 1.9 Diferencijalne jednačine kretanja sistema bez veza

Neka u sistemu čestica ne postoje nikakva ograničenja na položaje i brzine čestica. Jednačine kretanja takvog  $N$ -čestičnog sistema su

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t), \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (1.9.26)$$

gde je  $\mathbf{F}_\alpha$  ukupna sila koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$ . Projektovanjem gornjih vektorskih jednačina na ortove Dekartovog sistema dobijamo  $3N$  diferencijalnih jednačina drugog reda:

$$\begin{aligned} m_\alpha \ddot{x}_\alpha &= F_{\alpha x}(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N), \\ m_\alpha \ddot{y}_\alpha &= F_{\alpha y}(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N), \\ m_\alpha \ddot{z}_\alpha &= F_{\alpha z}(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N). \end{aligned} \quad (1.9.27)$$

Jednačine kretanja su sistem diferencijalnih jednačina drugog reda, rešen po drugim izvodima, tj. u normalnom obliku. Da bismo rešili sistem jednačina (1.9.27) moramo znati sile, ali i početne uslove:

$$\begin{aligned} x_\alpha(t=0) &= x_\alpha^{(0)}, \quad y_\alpha(t=0) = y_\alpha^{(0)}, \quad z_\alpha(t=0) = z_\alpha^{(0)}, \\ \dot{x}_\alpha(t=0) &= \dot{x}_\alpha^{(0)}, \quad \dot{y}_\alpha(t=0) = \dot{y}_\alpha^{(0)}, \quad \dot{z}_\alpha(t=0) = \dot{z}_\alpha^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.9.28)$$

Početni uslovi su početni položaji i početne brzine svih čestica. Poznavanje sila i početnih uslova obezbeđuje da sistem diferencijalnih jednačina (1.9.27) ima jedinstveno rešenje. Ova jednoznačna evolucija sistema naziva se principom mehaničke kauzalnosti. Poznavanje sila koje deluju na čestice i početnih uslova jednoznačno određuje zakon kretanja svake čestice. Rešenje jednačina kretanja zavisi od vremena i  $6N$  integracionih konstanti  $C_1, \dots, C_{6N}$ , tj.

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(t, C_1, \dots, C_{6N}), \\ y_\alpha &= y_\alpha(t, C_1, \dots, C_{6N}), \\ z_\alpha &= z_\alpha(t, C_1, \dots, C_{6N}). \end{aligned} \quad (1.9.29)$$

Integracione konstante se određuju iz početnih uslova. Broj početnih uslova je jednak broju integracionih konstanti.

Veličine koje zavise od položaja i brzina čestica, a koje ostaju stalne tokom kretanja nazivaju se prvim integralima kretanja. Opšti oblik takvih veličina je

$$f_i(x_1, \dots, z_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N, t) = C_i,$$

gde su  $C_i$  konstante. Ovakvih veličina najviše može biti  $6N$ . Naziv prvi integrali kretanja potiče iz činjenice da oni sadrže najviše prve izvode, tj. dobijeni su posle prve integracije jednačina kretanja. Često je pogodno integrale kretnja direktno dobiti na osnovu zakona održanja.

## 1.10 Reakcije veza. Idealni sistemi

Pri kretanju čestica u prisustvu veza na česticu pored tzv. aktivnih sila, deluju i sile reakcije veza. Kada se telo mase  $m$  kreće po strmoj ravni na njega deluju: sila zemljine teže  $mg$ , sila normalne reakcije podloge i sila trenja. Sila zemljine teže je aktivna sila, dok su druge dve posledica toga što se telo kreće po ravni, tj. posledica veze. One su sile reakcije veza. Aktivne sile koje deluju na česticu su posledica njene interakcije sa drugim telima, dok su sile reakcije veza sile kojima 'veza deluje' na česticu. One su takodje, mera interakcije čestice sa česticama veze, ali nas ne interesuje mikroskopska priroda ove interakcije. Sile reakcije veza nisu poznate unapred.

Jednačine kretanja čestica sistema su

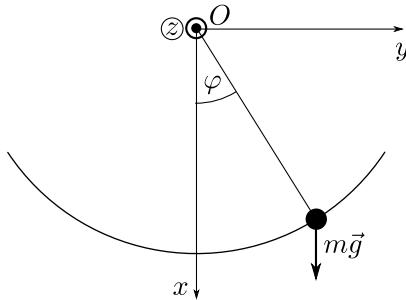
$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha, \alpha = 1, \dots, N, \quad (1.10.30)$$

gde smo sa  $\mathbf{F}_\alpha$ , odnosno sa  $\mathbf{R}_\alpha$ , obeležili ukupnu aktivnu силу, odnosno силу reakcije veza, koje deluju na česticu indeksa  $\alpha$ .

Sile reakcije mogu biti idealne i neidealne. Sila reakcije koja je normalna na vezu je primer idealne sile reakcije. Normalna reakcija podloge u prethodnom primeru je primer ovakve sile, dok je sila trenja klizanja neidealna sila reakcije. Sila zatezanja konca kod matematičkog klatna je takodje idealna sila reakcije.

Razmatrajmo prvo samo jednu česticu koja se kreće po površi  $f(x, y, z, t) = 0$ . Gradijent funkcije  $f(x, y, z, t)$  je ortogonalan na površinu  $f(x, y, z, t) = 0$ . Idealna sila reakcije veze koja deluje na česticu je onda oblika

$$\mathbf{R}^{(\text{id})} = \lambda \nabla f, \quad (1.10.31)$$



Slika 1.12: Kretanje čestice po krugu u vertikalnoj ravni.

gde je  $\lambda$  tzv. Lagranžev množitelj.

Idealni sistemi su sistemi kod kojih su sve sile reakcije idealne. Neka u sistemu od  $N$  čestica imamo  $k$  idealnih holonomih veza,  $f_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ ,  $a = 1, \dots, k$ . Sila reakcije koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$  je linearna kombinacija članova oblika (1.10.31), tj.

$$\mathbf{R}_\alpha^{(\text{id})} = \sum_{a=1}^k \lambda_a \nabla_\alpha f_a . \quad (1.10.32)$$

Drugi Njutnov zakon za idealne sisteme ima oblik

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \sum_{a=1}^k \lambda_a \nabla_\alpha f_a , \alpha = 1, \dots, N . \quad (1.10.33)$$

Ove jednačine nazivaju se jednačinama sa množiteljima veza. Lagranževi množitelji su funkcije koordinata čestica i vremena.

**Primer 1.** Čestica mase  $m$  kreće se u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže i spojena je sa tankim neistegljivim koncem dužine  $l$  sa centrom  $O$  (slika 1.12). Sastaviti jednačine kretanja i odrediti množitelje i reakcije veza. Neka je  $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{e}_\varphi$  i  $\varphi(t = 0) = 0$ .

Rešenje: Jednačine veza su

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \rho - l = 0 \\ f_2 &\equiv z = 0 . \end{aligned} \quad (1.10.34)$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \nabla f_1 &= \mathbf{e}_\rho \\ \nabla f_2 &= \mathbf{e}_z . \end{aligned} \quad (1.10.35)$$

Jednačina kretanja je

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 . \quad (1.10.36)$$

Projektovanjem prethodne jednačine na ose cilindričnog koordinatnog sistema imamo

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= mg \cos \varphi + \lambda_1 \\ m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= -mg \sin \varphi \\ m\ddot{z} &= \lambda_2 . \end{aligned} \quad (1.10.37)$$

Diferenciranjem jednačina veza dva puta po vremenu dobijamo  $\ddot{\rho} = 0$  i  $\ddot{z} = 0$  što zamenom u jednačine (1.10.37) daje  $\lambda_2 = 0$  i

$$\begin{aligned} -ml\dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi + \lambda_1 \\ l\ddot{\varphi} &= -g \sin \varphi . \end{aligned} \quad (1.10.38)$$

Iz druge jednačine uz

$$\dot{\varphi} = \varphi \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

imamo

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l} \cos \varphi + \frac{v_0^2}{l^2} - 2\frac{g}{l} , \quad (1.10.39)$$

odakle sledi

$$\lambda_1 = -3mg \cos \varphi + 2mg - \frac{mv_0^2}{l} . \quad (1.10.40)$$

Sila reakcije veze je

$$\mathbf{R} = \left( -3mg \cos \varphi + 2mg - \frac{mv_0^2}{l} \right) \mathbf{e}_\rho , \quad (1.10.41)$$

što je sila zatezanja konca.

Ako su pored idealnih prisutne i neidealne sile reakcije moramo ih dodati u dinamičke jednačine

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \sum_{a=1}^k \lambda_a \nabla_\alpha f_a + \mathbf{R}_\alpha^{(\text{neid})} , \alpha = 1, \dots, N . \quad (1.10.42)$$

## 1.11 Zadaci

**1.1.** Kretanje čestice je zadato jednačinama:  $\rho = ct$ ,  $\varphi = kt$ ,  $z = 0$ , gde su  $c$  i  $k$  konstante. Naći eksplicitan oblik trajektorije čestice, projekcije brzine i ubrzanja čestice u cilindričnim koordinatama, intenzitete brzine i ubrzanja, normalno i tangencijalno ubrzanje.

**1.2.** Čestica se kreće po paraboli  $y = kx^2$  ubrzanjem  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_y$ ,  $a = \text{const.}$  Odrediti  $a_t$ ,  $a_n$  i  $v(t)$ . U početnom trenutku,  $t = 0$ , čestica se nalazi u koordinatnom početku.

**1.3.** Čestica se kreće u ravni konstantnom brzinom  $v$  i sa konstantnom sektorskrom brzinom<sup>4</sup>  $v_s$ . Naći vektor brzine čestice ako je  $\rho(t=0) = \rho_0$ .

**1.4.** Čestica se kreće u ravni konstantnom sektorskrom brzinom  $v_s$ , tako da joj je brzina obrnuto proporcionalna trećem stepenu rastojanja do koordinatnog početka. Naći  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

**1.5.** Tačka se kreće po sferi tako da u svakom trenutku vremena njen vektor brzine zaklapa stalni ugao  $\alpha$  sa meridijanom. Naći jednačinu kretanja čestice.

**1.6.** Čestica mase  $m$  izbačena je kao horizontalni hitac početnom brzinom  $v_0$ , sa visine  $H$ . Naći zakon kretanja čestice ako na nju, pored gravitacione sile, deluje i sila otpora sredine  $-k\mathbf{v}$ , gde je  $k$  pozitivna konstanta.

**1.7.** Telo se nalazi na visini  $H$  od površine Zemlje, i pusti se da vertikalno pada. Na telo deluje pored gravitacione deluje i sila otpora sredine proporcionalna kvadratu brzine čestice. Koeficijent proporcionalnosti je  $km$ . Naći kako se menja brzina i visina tela pri padanju.

**1.8.** Čestica mase  $m$  i nanelektrisanja  $q$  kreće se u uzajamno ortogonalnim konstantnim poljima. Električno polje je  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ , a magnetno polje je  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Na česticu deluje i gravitaciona sila  $-mge_z$ . Odrediti konačne jednačine kretanja čestice ako se u početnom trenutku ona nalazi u koordinatnom početku i ima brzinu  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ . Kretanje čestice je nerelativističko.

**1.9.** Skijaš mase  $m$  spušta se niz padinu nagibnog ugla  $\theta$ . Početna brzina skijaša je jednak nuli. Intenzitet sile otpora vazduha je  $-kv^2$ , a trenje izmedju skija i snega je zanemarljivo. Naći brzinu i predjeni put skijaša kao funkcije vremena.

**1.10.** Čestica se kreće u potencijalu

$$U(x) = U_0 \tan^2\left(\frac{x}{a}\right),$$

gde su  $U_0$  i  $a$  konstante. U početnom trenutku čestica se nalazila u koordinatnom početku i imala je brzinu  $v_0$ . Polazeći od integrala kretanja naći jednačinu kretanja čestice i period oscilacija čestice.

**1.11.** Čestica mase  $m$  kreće se po glatkoj ravni koja rotira konstantnom ugaonom brzinom  $\Omega$  oko vertikalne ose. Sastaviti jednačine kretanja sa množiteljima veza i naći reakciju veze. U početnom trenutku čestica se nalazila u koordinatnom početku sa brzinom  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\rho$ . Uzeti da je  $z$ -osa postavljena duž vertikale.

**1.12.** Čestica mase  $m$  kreće se po glatkem izvrnutom konusu, čija je osa simetrije vertikalno postavljena. Ugao konusa je  $\alpha$ . U početnom trenutku čestica je bila na rastojanju  $r = a$  od vrha konusa i imala je početnu brzinu  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\varphi$ . Sastaviti jednačine kretanja sa množiteljima veze. Naći reakciju veze.

**1.13.** Čestica mase  $m$  kreće se po unutrašnjoj površini glatkog vertikalnog cilindra radijusa  $R$  u zemljinom gravitacionom polju. Naći силу reakcije koja deluje na česticu. U početnom trenutku brzina čestice  $\mathbf{v}_0$  zaklapa ugao  $\alpha$  sa horizontalnom ravni.

---

<sup>4</sup>Sektorska brzina čestice je

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$



# Glava 2

## Lagranževe jednačine kretanja

Ova glava posvećena je Lagranževoj formulaciji mehanike. Prvo poglavlje je matematički uvod u varijacioni račun. U narednom poglavlju uvešćemo dve nove veličine, koje su od velikog značaja ne samo u mehanici, već u svim granama teorijske fizike. To su lagranžian i dejstvo. Zatim je uveden Hamiltonov varijacioni princip u mehanici. Hamiltonov princip je jedan od centralnih principa fizike. Klasične jednačine kretanja mehaničkih sistema, tj. Lagranževe jednačine se dobijaju iz uslova stacionarnosti dejstva. Analiziraćemo slučajeve potencijalnih i nepotencijalnih sila. Pored toga izvedene su Lagranževe jednačine sa množiteljima veza.

Mnogo detalja o Lagranževim jednačinama i varijacionom računu možete naći u [1, 2, 4, 10].

### 2.1 Varijacioni račun

Realna funkcija realne promenljive  $y : R \rightarrow R$  je preslikavanje iz skupa realnih brojeva u skup realnih brojeva. Funkcional je preslikavanje iz skupa funkcija u skup  $R$ . Dakle, funkcional svakoj funkciji pridružuje broj. Neka je  $f = f(y(x), y'(x), x)$  zadata funkcija koja zavisi od funkcije  $y = y(x)$ , njenog prvog izvoda i nezavisno promenljive  $x$ . Veličina

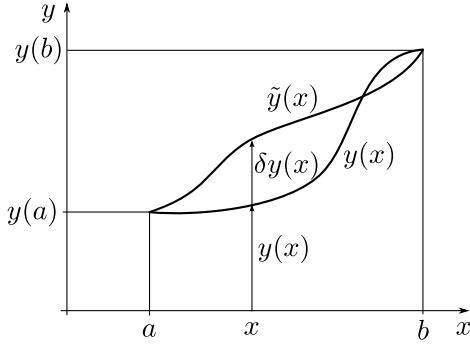
$$I[y(x)] = \int_a^b f(y(x), y'(x), x) dx \quad (2.1.1)$$

je funkcional. On funkciju  $y = y(x)$  preslikava u broj, tj.  $I : y(x) \rightarrow R$ . Zadatak varijacionog računa je da u skupu funkcija  $y = y(x)$  nadje one za koje funkcional  $I$  ima stacionarnu (ekstremnu) vrednost. Uzećemo još da su vrednosti funkcija  $y(x)$  fiksirane u tačkama  $x = a$ , odnosno  $x = b$ . Ako, na primer, funkcional  $I$  ima minimalnu vrednost za funkciju  $y = y(x)$  onda je za funkcije koje su u okolini funkcije  $y(x)$  njegova vrednost veća od te minimalne vrednosti. Slično se definiše i maksimum funkcionala.

Funkcija koja je u okolini funkcije  $y(x)$ , se malo razlikuje od nje, tj. ima oblik

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x) , \quad (2.1.2)$$

gde je  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ . Obe funkcije su prikazane na slici 2.1. Veličina  $\delta y(x)$  je tzv. varijacija funkcije. Za funkciju  $\tilde{y}(x)$  kaže se da je "okolna" ili "varirana". Varijacija, odnosno odstupanje



Slika 2.1: Dve funkcije na intervalu  $[a, b]$  čije se vrednosti poklapaju na krajevima ovog intervala.

funkcije je malo, tj.

$$\frac{|\delta y|}{|y|} \ll 1 .$$

Potražimo sada varijaciju funkcionala,  $\delta I$ . Ona je razlika vrednosti funkcionala za ove dve funkcije koje se malo razlikuju, tj.

$$\begin{aligned} \delta I[y] &= I[\tilde{y}(x)] - I[y(x)] = \\ &= \int_a^b f(\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), x) dx - \int_a^b f(y(x), y'(x), x) dx , \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

gde zadržavamo linearan član po  $\delta y(x)$ . Iz (2.1.2) sledi

$$\tilde{y}'(x) = y'(x) + \frac{d}{dx} \delta y(x) .$$

Razvijajući funkciju  $f$  u red imamo

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b f\left(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \frac{d}{dx} \delta y(x), x\right) dx - \int_a^b f(y(x), y'(x), x) dx \\ &= \int_a^b dx \left[ f(y(x), y'(x), x) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y(x)) \right] - \int_a^b f(y(x), y'(x), x) dx \\ &= \int_a^b dx \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y(x)) \right] . \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) ,$$

to je

$$\delta I = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx .$$

Zbog uslova  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ , prvi član u prethodnom izrazu je nula, pa je

$$\delta I = \int_a^b dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y . \quad (2.1.4)$$

Da bi funkcional  $I = I[y(x)]$  imao stacionarnu, tj. ekstremnu vrednost za funkciju  $y = y(x)$  potrebno je da  $\delta I = 0$ . Kako je  $\delta y(x)$  proizvoljno to sledi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 . \quad (2.1.5)$$

Ovo je tzv. Ojlerova jednačina. Ona određuje ekstremnu funkciju  $y = y(x)$ .

**Primer 1.** Naći najkraće rastojanje izmedju dve tačke (a,c) i (b,d) u ravni.

Rešenje: Rastojanje izmedju ovih tačaka,  $l$  je funkcional

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx . \quad (2.1.6)$$

Funkcija  $f$  je data sa

$$f = \sqrt{1 + y'^2} ,$$

pa je

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} .$$

Ojlerova jednačina je

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 ,$$

odakle sledi

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C ,$$

gde je  $C$  konstanta. Iz poslednjeg izraza sledi da je  $y' = C/\sqrt{1 - C^2} = A$ , gde je  $A$  takođe konstanta. Iz  $y' = A$  sledi

$$y = Ax + B , \quad (2.1.7)$$

dakle najkraće rastojanje izmedju dve tačke je prava. Konstante  $A$  i  $B$  određuju se iz graničnih uslova. Rezultat je

$$A = \frac{c-d}{a-b} , B = \frac{c(a-b)}{a(c-d)} .$$

## 2.2 Čestica u polju konzervativne sile

Razmotrimo jednodimenziono kretanje čestice pod dejstvom konzervativne sile  $\mathbf{F} = -\frac{d}{dx}U(x)\mathbf{e}_x$  u vremenskom intervalu  $(t_i, t_f)$ . Lagranžian je definisan sa

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) . \quad (2.2.8)$$

On je razlika kinetičke i potencijalne energije. Lagranžian zavisi od trajektorije čestice  $x = x(t)$  i njenog prvog izvoda. Definisaćemo još jednu veličinu, dejstvo koje je integral po vremenu od lagranžijana

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt . \quad (2.2.9)$$

Dejstvo je funkcional, jer moguće trajektorije čestice preslikava u realne brojeve,  $S : x(t) \rightarrow R$ . Jedna od ovih trajektorija je prava trajektorija, tj. trajektorija po kojoj se čestica kreće. Varijacija dejstva je infinitezimalna razlika dejstva na pravom putu  $x = x(t)$  i variranom  $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ , pri čemu je  $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ . Drugim rečima, čestica se u početnom trenutku nalazi u tački  $x_i$ , a u finalnom u tački  $x_f$ .

Dejstvo na variranom putu je

$$\begin{aligned} S[\tilde{x}(t)] &= S[x + \delta x] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2} m \left( \dot{x} + \frac{d(\delta x)}{dt} \right)^2 - U(x + \delta x) \right] . \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Kako je

$$\left( \dot{x} + \frac{d(\delta x)}{dt} \right)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x} \frac{d(\delta x)}{dt} + O(\delta x^2)$$

i

$$U(x + \delta x) = U(x) + U'(x)\delta x + O(\delta x^2)$$

imamo

$$S[x + \delta x] = S[x] + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( m\dot{x} \frac{d}{dt}(\delta x) - U'(x)\delta x \right) + O(\delta x^2) . \quad (2.2.11)$$

Varijacija dejstva<sup>1</sup> je linearna po  $\delta x$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( m\dot{x} \frac{d}{dt}(\delta x) - U'(x)\delta x \right) . \quad (2.2.12)$$

Da bismo prethodni izraz napisali u obliku

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt [\dots] \delta x$$

---

<sup>1</sup>Preciznije, ovo je prva varijacija.

izvršićemo parcijalnu integraciju u prvom članu

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \, m\dot{x} \frac{d}{dt}(\delta x) = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} dt \, m\ddot{x}\delta x .$$

Prvi sabirak u prethodnom izrazu je nula zbog graničnih uslova, pa je varijacija dejstva

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( -m\ddot{x} - U'(x) \right) \delta x . \quad (2.2.13)$$

Za pravu trajektoriju je  $m\ddot{x} = -U'(x)$ , pa je dejstvo stacionarno tj.  $\delta S = 0$ . Dakle, čestica u polju konzervativne sile kreće se po trajektoriji za koju dejstvo ima stacionarnu vrednost. Ovo je Hamiltonov princip. U sledećem poglavlju uvešćemo generalisane koordinate, a u narednom ćemo generalisati Hamiltonov princip na sisteme sa više stepeni slobode.

## 2.3 Generalisane koordinate

Neka se sistem sastoji od  $N$  čestica i neka je kretanje čestica u sistemu ograničeno sa  $k$  holonomih veza

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1 \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0 , \\ \dots \\ f_k(x_1, y_1, z_1 \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Zbog postojanja ovih veza,  $3N$  Dekartovih koordinata nisu medjusobno nezavisne; njih  $k$  možemo izraziti preko preostalih  $3N - k$  koordinata. Tih  $3N - k$  koordinata je dovoljno da se u svakom trenutku vremena potpuno opiše položaj svake čestice u sistemu (konfiguracija sistema). Nezavisnih koordinata je  $n = 3N - k$  i ovaj broj je broj stepeni slobode sistema. Umesto  $n$  Dekartovih, možemo koristiti i neke druge, proizvoljne koordinate,  $q_1, \dots, q_n$ . Zvaćemo ih generalisanim koordinatama. Kao što smo rekli, položaj svake čestice u sistemu može se izraziti preko generalisanih koordinata i vremena

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad \alpha = 1, \dots, N . \quad (2.3.15)$$

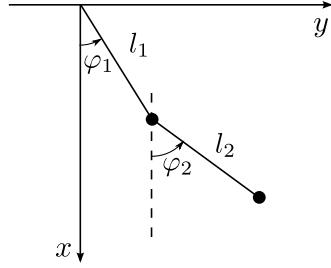
Generalisane koordinate nisu jednoznačno odredjene. Ako su veze stacionarne, onda se generalisane koordinate mogu izabrati tako da se u izrazu (2.3.15) vreme ne pojavljuje eksplicitno.

Sada ćemo za neke od primera iz poglavlja 1.8 odrediti broj stepeni slobode i izabrati generalisane koordinate.

U primeru 1. postoji jedna holonomna veza  $f_1$ , pa je broj stepeni slobode  $n = 3 - 1 = 2$ . Generalisane koordinate su  $\theta, \varphi$ . U primeru 3. postoji dve holonomne veze, pa je broj stepeni slobode:

$$n = 3 \cdot 1 - 2 = 1 .$$

Generalisana koordinata je  $\varphi$ . Navedimo još jedan primer. To je dvostruko matematičko klatno prikazano na slici 2.2. Ceo sistem se kreće u vertikalnoj ravni. Veze su



Slika 2.2: Dvostruko matematičko klatno.

$$\begin{aligned}
 f_1 &\equiv x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0, \\
 f_2 &\equiv z_1 = 0, \\
 f_3 &\equiv z_2 = 0, \\
 f_4 &\equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Broj stepeni slobode je  $n = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ . Za genereralisane koordinate možemo uzeti uglove  $\varphi_1, \varphi_2$  prikazane na slici 2.2.

Za sistem dve čestice koje se nalaze na krajevima krutog štapa dužine  $l$  broj stepeni slobode je  $n = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ .

U holonomnim vezama (2.3.14) Dekartove koordinate se mogu izraziti preko generalisanih koordinata, pa veze onda imaju oblik

$$f_a(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad a = 1, \dots, k. \tag{2.3.17}$$

Veza

$$f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = 0 \tag{2.3.18}$$

je neholonomna jer nema oblik (2.3.17). Funkcija  $f$  zavisi od generalisanih koordinata, ali i od generalisanih brzina,  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ .

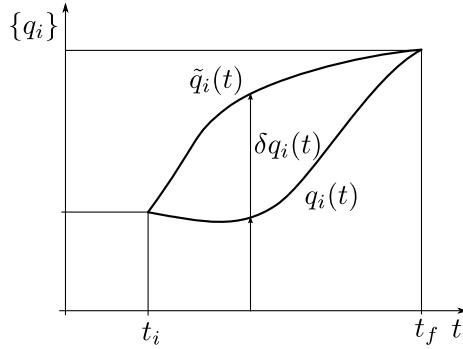
Recimo na kraju da postoje veze koje zavise od generalisanih brzina, a koje nakon integracije postaju holonomne. Ovakve veze se nazivaju pseudo-neholonomne. Primer ovakve veze je

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0,$$

gde su  $x, y$  i  $z$  koordinate, a  $\dot{x}, \dot{y}$  i  $\dot{z}$  brzine čestice. Integracijom gornje jednačine dobijamo holonomnu vezu  $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$ , gde je  $C$  integraciona konstanta. Generalno, veza

$$\sum_{i=1}^n f_i(q, t) dq_i + g(q, t) dt = 0, \tag{2.3.19}$$

gde su  $f_i$  i  $g$  zadate funkcije generalisanih koordinata i vremena, je pseudo-neholonomna ako je leva strana gornjeg izraza totalni diferencijal. Tada, integracijom ove veze dobijamo holonomnu vezu.



Slika 2.3: Prava i varirana trajektorij

## 2.4 Hamiltonov princip. Lagranževe jednačine.

Neka je broj čestica u sistemu  $N$ , a broj holonomnih veza  $k$ . U prethodnom poglavlju smo videli da je broj stepeni slobode ovakvog sistema  $n = 3N - k$ . Kao što smo rekli, položaj svake čestice u trenutku  $t$  je određen sa  $n$  koordinata,  $q_1, \dots, q_n$

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (2.4.20)$$

Prostor dozvoljenih vrednosti generalisanih koordinata je konfiguracioni prostor. Tačke u tom prostoru su  $(q_1, \dots, q_n)$  i on je očigledno  $n$ -dimenzionalan. Svaka tačka u konfiguracionom prostoru reprezentuje stanje sistema. Pošto se čestice mehaničkog sistema kreću, to tačka u konfiguracionom prostoru opisuje krivu, koju ćemo zvati trajektorijom  $q_i = q_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ona ne opisuje direktno kretanje svake čestice ponaosob, već sistema kao celine. Na osnovu trajektorije sistema u konfiguracionom prostoru može se reprodukovati kretanje pojedinačnih čestica.

Razmotrimo kretanje sistema od nekog početnog trenutka  $t_i$  do finalnog trenutka  $t_f$ . Pretpostavimo dalje da je početna konfiguracija sistema  $(q_1^{(i)}, \dots, q_n^{(i)})$ , a finalna  $(q_1^{(f)}, \dots, q_n^{(f)})$ . Postoji beskonačno puno mogućih trajektorija u konfiguracionom prostoru po kojima sistem može da evoluira iz početne do finalne konfiguracije. Međutim, samo jedna od ovih trajektorija zadovoljava klasične jednačine kretanja i ona je prava trajektorija  $q_1 = q_1(t), \dots, q_n = q_n(t)$ . Varirana trajektorija je u okolini prave trajektorije

$$\tilde{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4.21)$$

gde su varijacije  $\delta q_i(t)$  male, tj.

$$\frac{|\delta q_i(t)|}{|q_i(t)|} \ll 1. \quad (2.4.22)$$

Koordinate  $\tilde{q}_i(t)$ , moraju pripadati skupu dozvoljenih vrednosti koordinata. Na slici 2.3 smo nacrtali obe trajektorije.

Dejstvo je definisano sa

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.4.23)$$

gde je  $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = L(q, \dot{q}, t)$  lagranžijan sistema. On je funkcija generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena. Radi jednostavnosti nezavisno promenljive lagranžijana pisaćemo u skraćenom obliku,  $L = L(q, \dot{q}, t)$ . Ne postoji pravilo po kome se za proizvoljan sistem definiše lagranžijan.

Hamiltonov princip iz skupa mogućih trajektorija od početnog do krajnjeg položaja u konfiguracionom prostoru izdvaja klasičnu trajektoriju, tj. trajektoriju po kojoj se sistem klasično evoluira. To je, po Hamiltonovom principu, ona trajektorija za koju je dejstvo stacionarno, tj. ima ekstremum. Drugim rečima prava trajektorija je odredjena sa

$$\delta S = 0 . \quad (2.4.24)$$

Stacionarna tačka dejstva može biti bilo maksimum, minimum ili sedlasta tačka. U većini fizičkih primera ekstremum dejstva odgovara minimumu, a ne maksimum dejstva, pa se Hamiltonov princip često naziva i principom najmanjeg dejstva.

Dejstvo izračunato na okolnoj trajektoriji je

$$\begin{aligned} S[\tilde{q}_i] &= \int_{t_i}^{t_f} dt L(\tilde{q}_i, \frac{d\tilde{q}_i}{dt}, t) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} \right) + O((\delta q_i)^2) \right], \end{aligned}$$

gde smo u drugom redu razvili lagranžijan oko prave trajektorije. Varijacija dejstva je

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\tilde{q}_i] - S[q_i] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i . \end{aligned}$$

Prvi član u trećem redu je nula, jer su varijacije koordinata u početnom i krajnjem trenutku vremena jednake nuli, tj.  $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ . Po Hamiltonovom principu sistem se kreće po trajektoriji za koju je varijacija dejstva jednaka nuli. Kako su početni,  $t_i$  i krajnji trenutak,  $t_f$  ( $t_i < t_f$ ) proizvoljni, sledi

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0 .$$

Varijacije  $\delta q_i$  su nezavisne<sup>2</sup>, pa na kraju dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, \dots, n . \quad (2.4.26)$$

Ovo su Lagranževe jednačine kretanja. Dobili smo sistem od  $n$  diferencijalnih jednačina drugog reda. Da bismo ga rešili potrebno je da znamo  $2n$  početnih uslova: početne vrednosti generalisanih koordinata i brzina,  $q_i(t_i), \dot{q}_i(t_i)$ .

Za jednu veliku klasu mehaničkih sistema lagranžian je razlika kinetičke i potencijalne energije

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U . \quad (2.4.27)$$

To su sistemi sa potencijalnim silama koji su ili bez veza ili sa idealnim vezama<sup>3</sup>. Postoji mnogo mehaničkih sistema za koje ne važi pravilo " $L = T - U$ ", što bi moglo da znači da ovo pravilo nije univerzalno. Tipičan primer za ovakve sisteme su sistemi sa disipativnim silama. Međutim, disipativne sile su efektivne sile i posledica su medjumolekulskih interakcija. One su, dakle dobijene ignorisanjem (odnosno integracijom) mnogo unutrašnjih stepeni slobode. Jednostavnije rečeno, one su izvedene iz fundamentalnih medjumolekulskih interakcija koje su elektromagnetne prirode i za koje je pravilo " $L = T - U$ " ispunjeno. Disipativne sile se uvode empirijski, ne ulazeći u mikroskopsku strukturu. Lagranževe jednačine za nepotencijalne sile ćemo izvesti u poglavlju 2.8.

Recimo na kraju da svi fundamentalni zakoni u fizici (elektromagnetizam, gravitacija, standardni model elektroslabih i jakih interakcija i dr.) se opisuju dejstvom. Jednačine kretanja se dobijaju pomoću varijacionog principa. Hamiltonov princip, je prema tome fundamentalni princip za dobijanje osnovnih fizičkih jednačina.

**Primer 1.** Blok mase  $M$  nalazi se na horizontalnoj ravni po kojoj može da se kreće bez trenja. Blok je oprugom konstante elastičnosti  $k$  vezan za zid, kao na slici 2.4. Nominalna dužina opruge je  $l_0$ . Za blok je lakin, neistegljivim koncem dužine  $l$  vezana mala kuglica mase  $m$ . Naći lagranžian i sastaviti Lagranževe jednačine kretanja.

Rešenje: Sistem ima dva stepena slobode. Za generalisane koordinate uzećemo rastojanje bloka od zida za koji je zakačena opruga,  $x$  i ugao  $\varphi$  koji pravac matematičkog klatna gradi sa vertikalnom osom. Dekarove koordinate kuglice mase  $m$  su

$$x_A = x + l \sin \varphi, \quad y_A = l \cos \varphi . \quad (2.4.28)$$

Diferenciranjem po vremenu dobijamo

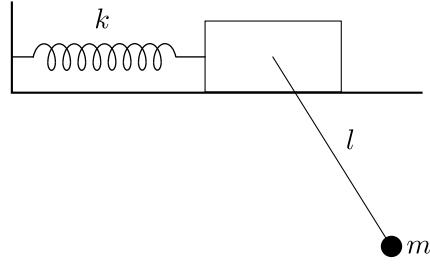
$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi , \\ \dot{y}_A &= -l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

<sup>2</sup>Neka je

$$A_1 \delta q_1 + \dots + A_n \delta q_n = 0 . \quad (2.4.25)$$

Medjusobna nezavisnost varijacija  $\delta q_i$  znači da možemo izabrati  $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \dots = \delta q_n = 0$  što zamenom u (2.4.25) daje  $A_1 = 0$ . Dalje bi uzeli  $\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$  što bi dovelo do  $A_2 = 0$ , itd. Dakle, dobijamo da je  $A_1 = \dots = A_n = 0$ .

<sup>3</sup>Ovakvi sistemi se u literaturi nazivaju i monogenim.



Slika 2.4: Slika uz primer 1.

pa je

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x} \cos \varphi . \quad (2.4.30)$$

Lagranžijan sistema je

$$L = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(x^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x} \cos \varphi) + mg \cos \varphi - \frac{k}{2}(x - l_0)^2 . \quad (2.4.31)$$

Zamenom

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -k(x - l_0) , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

u

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 , \quad (2.4.33)$$

dobijamo Lagranževu jednačinu

$$(M + m)\ddot{x} + ml \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \cos \varphi) + k(x - l_0) = 0 . \quad (2.4.34)$$

Analogno, zamenom

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ml\dot{\varphi}\dot{x} \sin \varphi - mg \sin \varphi , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{x} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

u jednačinu za  $\varphi$  dobijamo drugu Lagranževu jednačinu

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x} \cos \varphi + mg \sin \varphi = 0 . \quad (2.4.36)$$

**Primer 2.** Naći lagranžijan i jednačine kretanja za dvostruko matematičko klatno prikazano na slici 1.9. Mase kuglica su  $m_1$  i  $m_2$ , a dužine konaca zanemarljivih masa su  $l_1$ , odnosno  $l_2$ .

Rešenje: Generalisane koordinate su uglovi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ ; vidi sliku 1.9. Kinetička energija kuglice mase  $m_1$  je

$$T_1 = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} .$$

Dekartove koordinate druge čestice su

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 . \end{aligned}$$

Njihovim diferenciranjem po vremenu, kvadriranjem i sabiranjem dolazimo do kvadrata brzine druge kuglice. Njena kinetička energija je

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \left( l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) . \quad (2.4.37)$$

Lagranžijan je

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \left( l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) . \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Lagranževe jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= -(m_1 + m_2) g \sin \varphi_1 , \\ m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) &= m_2 g \sin \varphi_2 . \end{aligned}$$

Ova dva primera ilustruju Lagranžev metod. Jednačine kretanja smo dobili iz lagranžijana. Nismo crtali sile koje deluju na tela, kao što se to radi u Njutnovoj mehanici. Sva informacija o sistemu je sadržana u lagranžijanu. Pored toga u okviru Lagranževog metoda jednostavnije je raditi sa silama reakcija veza, ako su one idealne, naravno. U ovim primerima sile reakcije veze su sila zatezanja konca i sila reakcije podloge i njih je i u Njutnovoj mehanici lako odrediti. Međutim, generalno sile reakcije veze se teško nalaze.

Lagranževe jednačine, za razliku od Njutnovih, važe i u neinercijalnim sistemima. O tome će biti više reči kasnije u glavi 7.

### Nejednoznačnost lagranžijana

Lagranžijan nije jednoznačno odredjen. Neka je  $F = F(q, t)$  funkcija generalisanih koordinata i vremena. Lagranžijanu  $L = L(q, \dot{q}, t)$  možemo dodati vremenski izvod funkcije  $F$  i pri tome oba lagranžijana daju iste jednačine kretanja. Dakle, lagranžijan

$$L' = L + \frac{dF}{dt}$$

opisuje istu fiziku kao i lagranžijan  $L$ .

Jednačine kretanja su odredjene stacionarnošću dejstva. Potrebno je da pokažemo da iz  $\delta \int L dt = 0$  sledi  $\delta \int L' dt = 0$ . Ovaj uslov znači da je varijacija dodatnog člana jednaka nuli, tj.

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dF(t, q) = \delta F(q(t), t) \Big|_{t_i}^{t_f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} = 0 . \quad (2.4.39)$$

Rezultat sledi iz činjenice da su varijacije koordinata u krajnijim tačkama jednake su nuli, tj.  $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ . Primetimo da funkcija  $F$  ne može da zavisi od generalisanih brzina. Takva zavisnost bi variranjem dala članove proporcionalane sa  $\delta \dot{q}_i$  koji nisu jednaki nuli, jer varijacija generalisane brzine u trenucima  $t_i$  i  $t_f$  nije jednaka nuli.

## 2.5 Kovarijantnost Lagranževih jednačina

Već smo ranije rekli da generalisane koordinate nisu jednoznačno odredjene. Sa koordinata  $q_1, \dots, q_n$  možemo preći na nove koordinate  $Q_1, \dots, Q_n$ . Pokazaćemo da Lagranževe jednačine važe u bilo kom sistemu koordinata, tj. one imaju isti oblik u svim koordinatnim sistemima. Koordinatna transformacija, tj. prelazak na druge koordinate je

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t) , \quad i = 1, \dots, n . \quad (2.5.40)$$

Prepostavimo da je ova veza invertibilna. Novi lagranžian,  $L'$  je dobijen iz starog sменom promenljivih

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) . \quad (2.5.41)$$

Lagranževe jednačine u  $Q$  koordinatama su

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = 0 . \quad (2.5.42)$$

Iz (2.5.41) sledi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \\ &= \sum_j \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] . \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

U drugom koraku koristili smo pravilo 'poništenje tačaka'

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} , \quad (2.5.44)$$

koje se odmah vidi iz

$$\dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} . \quad (2.5.45)$$

Slično je

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_j \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right]. \quad (2.5.46)$$

Oduzimanjem (2.5.43) i (2.5.46) dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \quad (2.5.47)$$

Pošto je matrica  $\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$  nesingularna to iz Lagranževih jednačina u  $q$  koordinatama slede lagranževe jednačine u  $Q$  koordinatama. Dakle, Lagranževe jednačine imaju isti oblik u svim koordinatama, tj. one su kovarijantne.

Kovarijantnost Lagranževih jednačina se može videti iz sledeće jednostavne analize. Lagranževe jednačine slede iz Hamiltonovog principa, koji od svih trajektorija u konfiguracionom prostoru po kojima sistem može da se kreće izdvaja jednu, pravu klasičnu trajektoriju. Dakle, Hamiltonov princip određuje trajektoriju kretanja i zbog toga on je geometrijski princip. Koordinate koje koristimo da parametrizujemo trajektoriju su proizvoljne.

## 2.6 Matematičko klatno

Kuglica mase  $m$ , koja se kreće u vertikalnoj ravni po krugu poluprečnika  $l$ , u polju Zemljine teže je matematičko klatno, slika 1.12. Sistem ima jedan stepen slobode. Za generalisanu koordinatu možemo izabrati ugao  $\varphi$  koji pravac konca gradi sa vertikalom. Lagranžian je

$$L = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(\cos \varphi - 1). \quad (2.6.48)$$

Iz lagranžijana se lako dobija jednačina kretanja

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (2.6.49)$$

Dobili smo difrenčijalnu jednačinu drugog reda, koju nećemo rešavati. Rešenje jednačine kretanja naćićemo preko integrala kretanja. Naime, gravitaciona sila je konzervativna, pa je energija

$$E = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) \quad (2.6.50)$$

integral kretanja. Preciznije, ona je tzv. prvi integral kretanja, jer zavisi od generelisane koordinate i generalisane brzine, tj. dobijena je jednom integracijom jednačina kretanja. Iz (2.6.50) sledi

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} \left( \cos \varphi - 1 + \frac{E}{mgl} \right)}. \quad (2.6.51)$$

Neka su početni uslovi dati sa  $\varphi(t=0) = 0$  i  $\dot{\varphi}(t=0) = \sqrt{\frac{2E}{ml^2}}$ . Ukoliko je  $E < 2mgl$  klatno će se najviše otkloniti za ugao  $\varphi_0$ , kada je kinetička energija jednaka nuli, pa je

$$E = mgl(1 - \cos \varphi_0). \quad (2.6.52)$$

U ovom slučaju kretanje klatna je periodično i kuglica se kreće u intervalu uglova  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ . Ovakvo kretanje se naziva libracijom ili oscilovanjem. Iz (2.6.51) sledi

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} . \quad (2.6.53)$$

Period kretanja klatna obeležićemo sa  $T$ . Za  $t = T/4$  je  $\varphi = \varphi_0$  pa je

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \int_0^{T/4} dt , \quad (2.6.54)$$

odnosno

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} . \quad (2.6.55)$$

Smenom  $\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \theta = k \sin \theta$  gornji integral postaje

$$T = 4 \frac{l}{g} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} . \quad (2.6.56)$$

Gornji integral se ne može izraziti preko elementarnih funkcija. Period oscilovanja je

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k) , \quad (2.6.57)$$

gde je  $K(k)$  tzv. eliptički integral prve vrste.

Ukoliko je  $k^2 \ll 1$  podintegralnu funkciju u (2.6.56) možemo razložiti u red

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \theta + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \theta + \dots , \quad (2.6.58)$$

a integraciju izvesti član po član. Tako dobijamo da je period oscilovanja klatna dat sa

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \frac{11}{3072} \varphi_0^4 + \dots \right) . \quad (2.6.59)$$

Period oscilovanja klatna zavisi od amplitude  $\varphi_0$ , i od dužine klatna. Za male uglove  $\varphi_0 \approx 0$ , zadržaćemo se na vodećem članu u izrazu za period. Tako dobijamo dobro poznat rezultat:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (2.6.60)$$

Ukoliko je  $E > 2mgl$  ugao  $\varphi$  raste neograničeno, klatno opisuje krug za krugom. Ovakvo kretanje se zove 'rotacija'. Granični slučaj izmedju prethodna dva, kada je  $E = 2mgl$ , je treći

tip kretanja klatna. Klatno će uspeti da dostigne položaj  $\varphi = \pi$ , ali mu za to treba beskonačno puno vremena, jer se kreće sve sporije i sporije. Za  $E = 2mgl$  jednačina (2.6.53) postaje

$$\frac{d\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}dt. \quad (2.6.61)$$

Primenom

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \quad (2.6.62)$$

uz početni uslov  $\varphi(t=0) = 0$  dobijamo

$$\varphi = \pi - 4 \arctan\left(e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right). \quad (2.6.63)$$

Kretanje je asimptotsko, čestica tačku  $\varphi = \pi$  dostiže za beskonačno vreme.

## 2.7 Virtuelna pomeranja i virtuelni rad

Kao što smo rekli, položaj svake čestice u sistemu,  $\mathbf{r}_\alpha$ , ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) jednoznačno je određen generalisanim koordinatama:

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t). \quad (2.7.64)$$

Pri prelasku sa jedne trajektorije  $q_1(t), \dots, q_n(t)$  drugu infinitezimalno blisku trajektoriju

$$q_1(t) + \delta q_1(t), \dots, q_n(t) + \delta q_n(t),$$

vektor položaja čestice,  $\mathbf{r}_\alpha$  promeni se za

$$\delta\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, t) - \mathbf{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t). \quad (2.7.65)$$

Pri varijaciji vektora položaja oba radijus vektora sa desne strane izraza (2.7.65) su u istom trenutku vremena. Lako se vidi da je

$$\delta\mathbf{r}_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2.7.66)$$

Varijacije vektora položaja čestica nazivaju se još i virtuelnim pomeranjima. To su proizvoljne, infinitezimalne promene položaja čestica sistema koje su u skladu sa vezama, a koja su načinjena u fiksnom trenutku vremena. Virtuelna pomeranja se razlikuju od stvarne promene položaja čestica

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha(t + dt) - \mathbf{r}_\alpha(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} dt \\ &= \mathbf{v}_\alpha(t)dt. \end{aligned} \quad (2.7.67)$$

Stvarno pomeranje  $d\mathbf{r}_\alpha$  izvršeno je u vremenskom intervalu  $(t, t + dt)$ , dok je pri virtuelnim pomeranjima vreme fiksirano (zamrznuto). Definisaćemo i treći vid pomeranja čestica u sistemu, tzv. moguće pomeranje. Moguće pomeranje,  $d\mathbf{r}_\alpha$  čestice indeksa  $\alpha$  izvršeno je u intervalu  $(t, t + dt)$ , ali ono ne mora biti jednak proizvodu brzine čestice u trenutku  $t$  i vremenskog intervala  $dt$ , tj.  $d\mathbf{r}_\alpha \neq \mathbf{v}_\alpha dt$ . Ako su veze stacionarne onda se generalisane koordinate mogu tako izabrati da se u zakonu (2.3.15) vreme ne pojavljuje eksplisitno. U tom slučaju virtuelna pomeranja se poklapaju sa mogućim.

Rad sila na virtuelnim pomeranjima čestica definiše se analogno radu na stvarnim pomeranjima

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha . \quad (2.7.68)$$

Pokazaćemo da je rad idealnih sila reakcije na virtuelnim pomeranjima jednak nuli. To se vidi direktno:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}_\alpha^{(\text{id})} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{a=1}^k \lambda_a \nabla_\alpha f_a \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{a=1}^k \lambda_a \nabla_\alpha f_a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i . \end{aligned} \quad (2.7.69)$$

Primenili smo izraze (1.10.32) i (2.7.66). Ako dalje iskoristimo

$$\sum_{\alpha=1}^N \nabla_\alpha f_a \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \quad (2.7.70)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{i=1}^n \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{a=1}^k \lambda_a \delta f_a . \end{aligned} \quad (2.7.71)$$

Jednačine veza  $f_a = 0$  daju  $\delta f_a = 0$ , pa prema tome dobijamo  $\delta A = 0$ .

U poglavlju 1.10 rekli smo da su idealne reakcije veza linearne kombinacije gradijenata veza, tj. one su oblika (1.10.32). Ekvivalentna definicija idealnih sila reakcije je da su sile reakcije u nekom sistemu čestica idealne ukoliko je njihov rad na proizvoljnim virtuelnim pomeranjima jednak nuli, tj. ukoliko je

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}_\alpha^{(\text{id})} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0 . \quad (2.7.72)$$

Može se pokazati da iz uslova (2.7.72) sledi da su idealne reakcije veza oblika (1.10.32). Recimo na kraju da uslov idealnosti sila reakcije sile ne znači da svaki sabirak u izrazu za virtuelni rad (2.7.72) mora biti jednak nuli. Potrebno je da cela suma bude jednaka nuli. To ilustruje naredni primer.

**Primer 1.** Naći virtuelna pomeranja čestica kod dvojnog matematičkog klatna. Pokazati da je ono idealni sistem.

Rešenje: Sa slike 2.2 se vidi da su radijus vektori čestica

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \mathbf{e}_1 + l_1 \sin \varphi_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{r}_2 &= (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) \mathbf{e}_1 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \mathbf{e}_2 .\end{aligned}\quad (2.7.73)$$

Virtuelna pomeranja čestica su

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{r}_1 &= l_1(-\sin \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_2) \delta \varphi_1 \\ \delta \mathbf{r}_2 &= -(l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2) \mathbf{e}_1 + (l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2) \mathbf{e}_2 .\end{aligned}\quad (2.7.74)$$

Sile reakcije deluju duž niti. Sila reakcije koja deluje na prvu česticu je  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ , a na drugu je  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{T}_2$ . Sa  $T_1$  obeležili smo silu zatezanja u gornjem, a sa  $T_2$  u donjem koncu dvojnog klatna. Virtuelni rad sila reakcije je

$$\begin{aligned}\delta A &= \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 \\ &= (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{T}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 .\end{aligned}\quad (2.7.75)$$

Zamenom izraza za virtuelna pomeranja dobija se  $\delta A = 0$ , dakle dvojno matematičko klatno jeste idealni sistem. U ovom primeru vidimo da pojedinačni sabirci u virtuelnom radu sila reakcije nisu jednak nuli, ali njihov zbir jeste.

## 2.8 Lagranževe jednačine za sisteme sa nepotencijalnim silama

U ovom poglavljiju izvećemo Lagranževe jednačine kretanja kada su u sistemu prisutne nepotencijalne sile. Takodje, pretpostavićemo da pored idealnih imamo i neidealne sile reakcije.

Definišimo funkcional  $I$  sa

$$I = \int_{t_i}^{t_f} dt T = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2}{2} , \quad (2.8.76)$$

koji je, kao što vidimo, integral kinetičke energije. Potražimo varijaciju ove veličine, tj. njenu

infinitezimalnu promenu pri prelasku sa jedne trajektoriju na drugu, koja je u njenoj okolini:

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \tilde{\mathbf{v}}_\alpha^2}{2} - \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2}{2} \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_\alpha \left( (\mathbf{v}_\alpha + \delta \mathbf{v}_\alpha)^2 - \mathbf{v}_\alpha^2 \right) \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \delta \dot{\mathbf{r}}_\alpha . \tag{2.8.77}
 \end{aligned}$$

Sa  $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha + \delta \mathbf{v}_\alpha$  obeležili smo brzinu čestice indeksa  $\alpha$  na variranoj trajektoriji. U (2.8.77) koristili smo

$$\delta \mathbf{v}_\alpha = \delta \left( \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_\alpha) , \tag{2.8.78}$$

tj. činjenicu da varijacija i vremenski izvod komutiraju. Pokažimo to. Diferenciranjem po vremenu izraza (2.7.64) dobijamo brzinu čestice indeksa  $\alpha$

$$\mathbf{v}_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} . \tag{2.8.79}$$

Varijacija brzine je

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{v}_\alpha &= \sum_{i=1}^n \left[ \delta \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i \right] + \delta \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i \delta q_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial t \partial q_i} \delta q_i . \tag{2.8.80}
 \end{aligned}$$

Sa druge strane je

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_\alpha) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i \delta q_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\alpha}{\partial t \partial q_i} \delta q_i . \tag{2.8.81}
 \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali (2.8.78). Primenom parcijalne integracije izraz za varijaciju  $\delta I$  postaje

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha) - \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha \right) \\
 &= - \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \delta \mathbf{r}_\alpha \Big|_{t_i}^{t_f} \\
 &= - \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\alpha=1}^N \left( (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha \right) .
 \end{aligned}$$

Drugi sabirak u drugom redu je jednak nuli. U narednom redu primenili smo drugi Njutnov zakon. Podintegralni izraz u poslednjem redu je rad aktivnih sila i sila reakcije koje deluju u sistemu na virtuelnim pomeranjima

$$\delta A = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha . \quad (2.8.82)$$

Primenom (2.7.66) ovaj rad možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n (Q_i + \mathcal{R}_i) \delta q_i , \end{aligned} \quad (2.8.83)$$

gde smo uveli generalisane aktivne sile sa

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.8.84)$$

i generalisane sile reakcije

$$\mathcal{R}_i = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} . \quad (2.8.85)$$

Dakle,

$$\delta I = - \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n (Q_i + \mathcal{R}_i) \delta q_i . \quad (2.8.86)$$

Sa druge strane, pošto je kinetička energija funkcija generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, to po analogiji sa variranjem dejstva, varijacija funkcionala  $I$  je data sa

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i . \quad (2.8.87)$$

Izjednačavajući (2.8.86) sa (2.8.87) dobijamo

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + Q_i + \mathcal{R}_i \right] \delta q_i = 0 . \quad (2.8.88)$$

Kako su varijacije  $\delta q_i$ , nezavisne to dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \mathcal{R}_i . \quad (2.8.89)$$

Ovo su Lagranževe jednačine kretanja.

Aktivne sile u sistemu se mogu podeliti na potencijalne i nepotencijalne

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{(\text{pot})} + \mathbf{F}_\alpha^{(\text{np})} = -\nabla_\alpha U + \mathbf{F}_\alpha^{(\text{np})} . \quad (2.8.90)$$

Generalisana aktivna sila je

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{\alpha=1}^N \left( -\nabla_\alpha U + \mathbf{F}_\alpha^{(\text{np})} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^{(\text{np})} . \end{aligned} \quad (2.8.91)$$

Sila reakcije koja deluje na česticu indeksa  $\alpha$  je suma idealnih i neidealnih sila,  $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha^{(\text{id})} + \mathbf{R}_\alpha^{(\text{neid})}$ . Rad idealnih sila reakcije na virtuelnim pomeranjima je jednak nuli.

Zamenjujući izraze za generalisane sile u (2.8.89) dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_\star}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_\star}{\partial q_i} = Q_i^{(\text{np})} + \mathcal{R}_i^{(\text{neid})} , \quad (2.8.92)$$

gde je

$$L_\star = T - U . \quad (2.8.93)$$

Ova veličina nije Lagranžian sistem. Dobili smo Lagranževe jednačine za holonomne sisteme kod kojih pored potencijalnih postoje i nepotencijalne sile interakcije.

**Primer 1.** Telo osciluje na opruzi konstante elastičnosti  $k$  i nalazi se u viskoznoj tečnosti. Sila otpora je  $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$  gde je  $b$  konstanta. Naći jednačinu kretanja.

Rešenje: Sistem ima jedan stepen slobode. Funkcija  $L_\star$  je

$$\begin{aligned} L_\star &= T - U \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} . \end{aligned} \quad (2.8.94)$$

Generalisana nepotencijalna sila je

$$Q = -b\dot{x} \quad (2.8.95)$$

pa je jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} . \quad (2.8.96)$$

**Primer 2.** Po površini glatke cilindrične površi radijusa  $R$  kreće se čestica mase  $m$ . Gravitaciono polje je usmereno duž ose simetrije cilindra. Na česticu deluje i sila otpora  $\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}$ , gde je  $\gamma$  pozitivna konstanta. Sastaviti Lagranževe jednačine kretanja.

Rešenje: Generalisane sile su

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -m\gamma R^2 \dot{\varphi} \\ Q_z &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = -m\gamma \dot{z} . \end{aligned} \quad (2.8.97)$$

Veličina  $L_*$  je

$$L_* = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz . \quad (2.8.98)$$

Jednačina kretanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L_*}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (2.8.99)$$

daje

$$\ddot{\varphi} = -\gamma\dot{\varphi} . \quad (2.8.100)$$

Druga jednačina kretanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L_*}{\partial z} = Q_z \quad (2.8.101)$$

daje

$$\ddot{z} + g = -\gamma\dot{z} . \quad (2.8.102)$$

## 2.9 Generalisano potencijalne sile

Generalisano potencijalne sile su važan slučaj nepotencijalnih sila. Za silu ćemo reći da je generalisano potencijalna ako je oblika

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} , \quad (2.9.103)$$

gde je  $U = U(q, \dot{q}, t)$  generalisani potencijal. Zamenom (2.9.103) u (2.8.89) dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad (2.9.104)$$

gde je  $L = T - U$ .

Lorencova sila,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  je sila kojom elektromagnetsko polje deluje na nanelektrisanje. Ona je primer generalisano potencijalne sile. Generalisani potencijal je

$$U = q\phi(t, \mathbf{r}) - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) , \quad (2.9.105)$$

gde su  $\phi$  i  $\mathbf{A}$  potencijali elektromagnetskog polja. Jačine polja su

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi , \\ \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (2.9.106)$$

Nadjimo sada izraz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial U}{\partial x} . \quad (2.9.107)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= q\frac{\partial \phi}{\partial x} - q\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial \dot{x}} &= -qA_x . \end{aligned}$$

Dalje je

$$F_x = -q \frac{dA_x}{dt} - q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right). \quad (2.9.108)$$

Koristeći

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad (2.9.109)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} F_x &= q \left( -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &+ q v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + q v_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \\ &= q E_x + q(v_y(\text{rotB})_z - v_z(\text{rotB})_y) \\ &= q E_x + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x. \end{aligned} \quad (2.9.110)$$

Slično važi i za  $y$  i  $z$  komponentu. Dakle, Lorencova sila jeste generalisano potencijalna.

## 2.10 Lagranževe jednačine sa množiteljima veza

Razmatrajmo sistem od  $N$  čestica sa konzervativnim silama i idealnim holonomnim vezama. Početni skup generalisanih koordinata je  $q_1, \dots, q_{3N}$ . Njih ima  $3N$ . Zbog prisustva  $k$  holonomnih veza  $n = 3N - k$  koordinata je nezavisno. U poglavlju 2.4 smo jednačine kretanja izveli variranjem dejstva izraženog u nezavisnim generalisanim koordinatama. Međutim, često je korisno da u opisu fizičkog sistema koristimo sve koordinate  $q_1, \dots, q_{3N}$ , a ne samo podskup nezavisnih generalisanih koordinata. Ako koristimo nezavisne koordinate, simetrija fizičkog sistema nije eksplicitna, tj. manifestna. To često komplikuje dinamičke jednačine. Dakle, da bi simetrija postala vidljiva, koristimo sve koordinate. Uzećemo da je lagranžian holonomnih sistema funkcija svih  $3N$  koordinata i odgovarajućih brzina. Varijacija dejstva je onda data sa

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^{3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (2.10.111)$$

Primetimo da se sumiranje po indeksu  $i$  u prethodnoj formuli vrši od 1 do  $3N$ . Iz Hamiltonovog principa,  $\delta S = 0$ , sledi

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (2.10.112)$$

Međutim iz prethodnog izraza ne možemo da zaključimo da su izrazi u velikoj zagradi jednaki nuli, jer varijacije  $\delta q_i$  nisu medjusobno nezavisne. Broj nezavisnih varijacija je isti kao broj nezavisnih koordinata, tj. on je  $n = 3N - k$ . Preostalih  $k$  varijacija koordinata su zavisne od  $3N - k$  nezavisnih varijacija. Dejstvo variramo, ali uz uslove, a to su jednačine veza  $f_a(q, t) = 0, a = 1, \dots, k$  u teoriji. Problem je analogan problemu u matematičkoj analizi kada npr. odredujemo ekstremum neke funkcije više promenljivih, ali uz neki zadati uslov.

Jasno je da varijacija veza data sa

$$\delta f_a = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \delta q_i = 0 . \quad (2.10.113)$$

Množeći prethodni izraz sa neodredjenim Lagranževim množiteljima  $\lambda_a = \lambda_a(t)$  i sumiranjem po  $a = 1, \dots, k$  dobijamo

$$\sum_{a=1}^k \sum_{i=1}^{3N} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \delta q_i = 0 . \quad (2.10.114)$$

Sabiranjem (2.10.112) i (2.10.114) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0 . \quad (2.10.115)$$

Varijacije koordinata  $\delta q_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  podelićemo u dva skupa: nezavisne varijacije koordinata  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$  kojih ima  $n$ , i preostalih  $k$  zavisnih varijacija  $\delta q_{n+1}, \dots, \delta q_{3N}$ . Množitelja veza ima  $k$ , isto onoliko koliko ima zavisnih koordinata. Množitelje ćemo odrediti iz zahteva da su izrazi u zagradama u (2.10.115) uz zavisne varijacije koordinata jednaki nuli. Onda su preostale samo nezavisne varijacije koordinata. Izrazi u zagradama, koje množe varijacije nezavisnih koordinata su jednakci nuli. Dakle, u svakom slučaju dobijamo jednačine

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} . \quad (2.10.116)$$

Jednačine (2.10.116) su Lagranževe jednačine sa množiteljima veza. Izraz na desnoj strani jednačine (2.10.116) označićemo sa  $\mathcal{R}_i$ , tj.

$$\mathcal{R}_i = \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} . \quad (2.10.117)$$

To su generalisane sile reakcije holonomnih veza.

Opisanu proceduru možemo pojednostaviti na sledeći način. Uvedimo modifikovani lagranžjan

$$\tilde{L} = L + \sum_{a=1}^k \lambda_a f_a , \quad (2.10.118)$$

gde smo običnom lagranžijanu dodali član sa množiteljima veza  $\sum_{a=1}^k \lambda_a f_a$ . Odgovarajuće, modifikovano dejstvo je

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(q, \dot{q}, t) + \sum_{a=1}^k \lambda_a f_a(q) \right] dt , \quad (2.10.119)$$

gde generalisane koordinate  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  i množitelje veza tretiramo kao nezavisne varijable. Variracija modifikovanog dejstva (2.10.119) je

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \sum_{a=1}^k f_a \delta \lambda_a \right]. \quad (2.10.120)$$

Hamiltonov princip,  $\delta S = 0$  onda daje sledeće jednačine:

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{a=1}^k \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (2.10.121)$$

$$f_a = 0, \quad a = 1, \dots, k. \quad (2.10.122)$$

Prva jednačina je ista kao (2.10.115), dok su naredne jednačine jednačine veza. Primenjujući logiku opisanu u prvom delu ovog poglavlja iz prve jednačine (2.10.121) dobijamo Lagranževe jednačine sa množiteljima veza (2.10.116). Opisani metod se uz neznatne modifikacije može primeniti i kod neholonomnih sistema.

**Primer 1.** Vratimo se ponovo na primer iz poglavlja 1.10. Naći jednačine kretanja primenom formalizma izloženog u ovom poglavlju.

Rešenje: Kao što smo rekli veze su  $f_1 = \rho - l = 0$  i  $f_2 = z = 0$ . Modifikovani lagranžijan je

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mg\rho \cos \varphi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2. \quad (2.10.123)$$

Variranjem dejstva po koordinatama  $\rho, \varphi, z$  dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi &= \lambda_1, \\ m\frac{d}{dt} \left( \rho^2\dot{\varphi} \right) + mg\rho \sin \varphi &= 0, \\ m\ddot{z} &= \lambda_2. \end{aligned} \quad (2.10.124)$$

Variranje dejstva po množiteljima dobijamo jednačine veza  $\rho = l$  i  $z = 0$ . Iste jednačine dobili smo ranije kada smo Lagranževe jednačine sa množiteljima veza izveli vektorskim metodom. Prednost ovog metoda nad vektorskim metodom je očigledna.

**Primer 2.** Čestica mase  $m$  kreće se bez trenja po paraboli  $z = Ax^2$ , gde je  $A$  konstanta, u vertikalnoj ravni, kao što je prikazano na slici 2.5. Čestica se nalazi u gravitacionom polju  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$ . Naći jednačine kretanja čestice i reakcije veza. U početnom trenutku čestica je na visini  $h$  i ima nultu brzinu.

Rešenje: Lagranžijan sa množiteljima veza je

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda_1(z - Ax^2) + \lambda_2 y.$$

Variranjem dejstva dobijamo jednačine kretanja i veze:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda_1 Ax \\ m\ddot{y} &= \lambda_2 \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda_1 \\ z &= Ax^2 \\ y &= 0 . \end{aligned} \quad (2.10.125)$$

Odmah se vidi da je druga veza trivijalna. Prva veza daje  $\dot{z} = 2A\dot{x}$  i  $\ddot{z} = 2A(\dot{x}^2 + \ddot{x})$ . Eliminisanjem promenljive  $z$  preko promenljive  $x$  i njenih izvoda u trećoj jednačini, dobijamo

$$\lambda_1 = \frac{m(g + 2Ax^2)}{1 + 4A^2x^2} . \quad (2.10.126)$$

Zamenom ove vrednosti Lagranževog množitelja u prvu jednačinu dobijamo

$$\ddot{x} + \frac{4A^2x}{1 + 4A^2x^2}\dot{x} + \frac{2gAx}{1 + 4A^2x^2} = 0 . \quad (2.10.127)$$

Ova jednačina nije jednostavna za rešavanje. Umesto nje primenićemo zakon održanja energije. Naime, održanje energije je

$$mgh = \frac{m}{2}(1 + 4A^2x^2)\dot{x}^2 + mgAx^2 \quad (2.10.128)$$

odakle je

$$\dot{x}^2 = \frac{2h - 2gAx^2}{1 + 4A^2x^2} . \quad (2.10.129)$$

Zamenom ovog izraza u (2.10.126) dobijamo

$$\lambda_1 = \frac{mg(1 + 4Ah)}{(1 + 4A^2x^2)^2} . \quad (2.10.130)$$

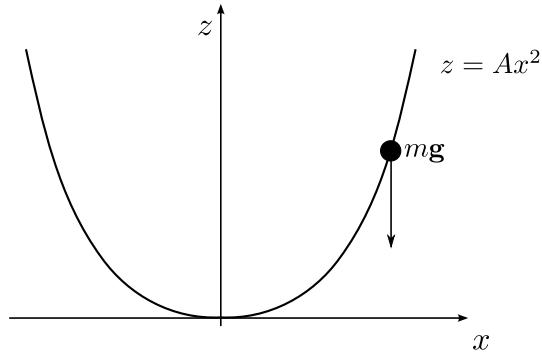
Sila reakcije veze je  $\mathbf{R} = \frac{mg(1+4Ah)}{(1+4A^2x^2)^2}\mathbf{e}_z$ .

---

## 2.11 Kinetička energija sistema čestica u generalisanim koordinatama

Razmatramo holonomi sistem od  $N$  čestica. Diferenciranjem (2.3.15) po vremenu dobijamo brzinu čestice indeksa  $\alpha$

$$\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i . \quad (2.11.131)$$



Slika 2.5: Slika uz primer 2.

Zamenom gornjeg izraza u kinetičku energiju sistema čestica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 , \quad (2.11.132)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} . \end{aligned} \quad (2.11.133)$$

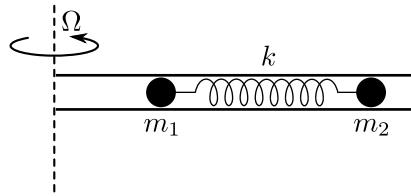
Ovaj izraz ćemo prepisati u obliku

$$T = T_0 + \sum_i N_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j , \quad (2.11.134)$$

gde je

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right)^2 , \\ N_i &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} , \\ M_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} . \end{aligned} \quad (2.11.135)$$

Iz izraza (2.11.134) vidimo da je kinetička energija sistema čestica sa holonomnim vezama kvadratna funkcija generalisanih brzina. Prvi član u (2.11.134) je konstantan, drugi linearan, a



Slika 2.6: Slika uz zadatak 2.2.

treći čisto kvadratan po generalisanim brzinama. Ako su veze u sistemu stacionarne, generalisane koordinate se mogu izabrati tako da je  $\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} = 0$ , pa u izrazu za kinetičku energiju preostaje samo kvadratni član:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j . \quad (2.11.136)$$

Matrica  $M_{ij} = M_{ij}(q)$  se često naziva masenom matricom.

## 2.12 Zadaci

**2.1.** Čestica mase  $m$  se kreće u vertikalnoj ravni u gravitacionom polju Zemlje. Neka je  $x$ -osa usmerena vertikalno na dole, a  $y$  osa je horizontalna. U početnom trenutku čestica se nalazila u koordinatnom početku. Pokazati da je vreme za koje čestica stigne u tačku  $(x_1, y_1)$ , po krivoj  $y = y(x)$  dato sa

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} .$$

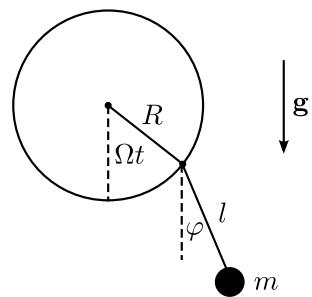
Odrediti funkciju  $y = y(x)$  tako da vreme kretanja čestice bude najmanje. Ovaj problem se naziva Bernulijevim problemom brahistohrone.

**2.2.** Dve jednake kuglice mase  $m$  povezane su oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ . Kuglice i opruga se nalaze u cevi koja rotira u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom  $\Omega$ . Osa rotacije prolazi kroz jedan kraj cevi. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja.

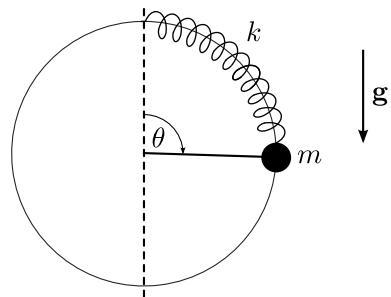
**2.3.** Tanak štap dužine  $R$  i zanemarljive mase rotira oko jednog svog kraja u vertikalnoj ravni konstantnom ugaonom brzinom  $\Omega$ . Za drugi kraj štapa preko konca dužine  $l$  i zanemarljive mase, vezana je kuglica mase  $m$ . Kuglica se kreće u vertikalnoj ravni. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja za ovaj mehanički sistem. Gravitacija deluje vertikalno na dole.

**2.4.** Čestica mase  $m$  kreće se po glatkom prstenu, poluprečnika  $R$ , koji rotira oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom  $\Omega$  u Zemljinom gravitacionom polju. Čestica je spojena oprugom sa vrhom prstena. Konstanta elastičnosti opruge je  $k$ , a njena nominalna dužina  $l_0$ . Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja ako

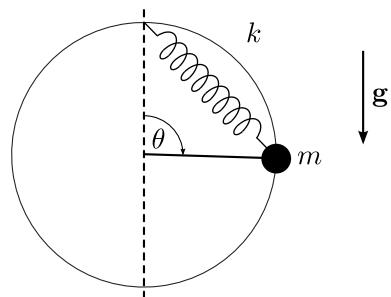
- (a) je opruga namotana na prsten, kao na slici 2.8;



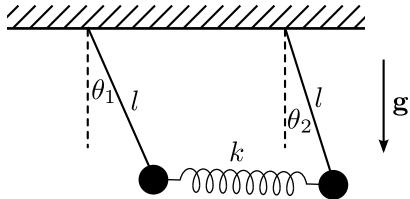
Slika 2.7: Slika uz zadatak 2.3.



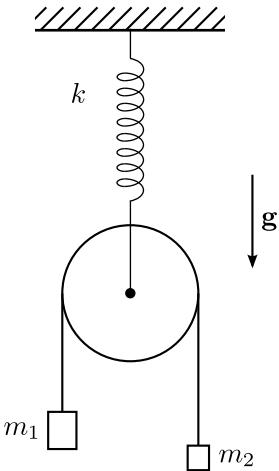
Slika 2.8: Slika uz zadatak 2.4.



Slika 2.9: Slika uz zadatak 2.4.



Slika 2.10: Slika uz zadatak 2.6.



Slika 2.11: Slika uz zadatak 2.7.

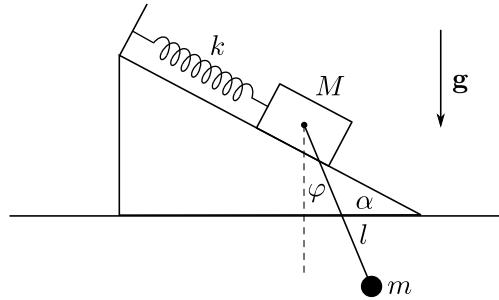
(b) opruga nije namotana na prsten, kao na slici 2.9.

**2.5.** Po površini glatke sfere radijusa  $R$  kreće se čestica mase  $m$ . Na česticu pored gravitacione sile deluje i sila otpora  $\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}$ , gde je  $\gamma$  pozitivna konstanta. Sastaviti Lagranževe jednačine kretanja čestice.

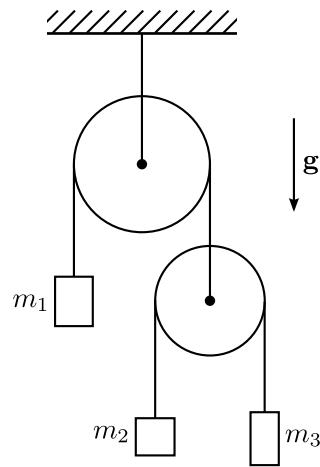
**2.6.** Na svaku od dve lake neistegljive niti dužine  $l$ , okačena je po jedna kuglica mase  $m$ . Kuglice su medjusobno povezane oprugom konstante elastičnosti  $k$ . Rastojanje izmedju tačaka u kojima su zakaćene niti,  $d$ , jednako je nominalnoj dužini opruge. Sastaviti lagranžian i Lagranževe jednačine kretanja.

**2.7.** Kotur zanemarljive mase obešen je za horizontalni zid oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ , kao na slici 2.11. Preko kotura je prebačen neistegljni konac zanemarljive mase, na čijim krajevima vise tegovi masa  $m_1$ , odnosno,  $m_2$ . Sastaviti lagranžian sistem, naći jednačine kretanja, kao i ubrzanje kotura i tegova. Sistem se nalazi u gravitacionom polju usmerenom vertikalno na dole.

**2.8.** Blok mase  $M$  nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagibnog ugla  $\alpha$ . Blok je spojen oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$  za vrh strme ravni. Za blok je pomoću neistegljive niti dužine  $l$  obešena mala kuglica mase  $m$  koja se kreće u vertikalnoj ravni.



Slika 2.12: Slika uz zadatak 2.8.



Slika 2.13: Slika uz zadatak 2.9.

(a) Sastaviti lagranžijan ovog sistema.

(b) Naći Lagranževe jednačine kretanja.

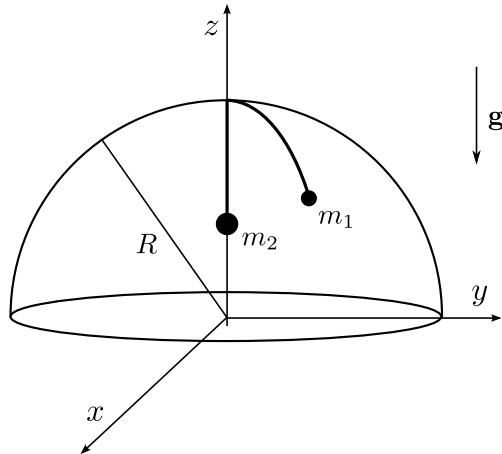
**2.9.** Za sistem sa slike 2.13 naći lagranžijan i jednačine kretanja. Mase tela su  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ .

**2.10.** Dve čestice mase  $m_1$  i  $m_2$  spojene su neistegljivom niti dužine  $l$  i zanemarljive mase. Nit je provučena kroz vrh glatke sfere radijusa  $R$  tako da čestica mase  $m_1$  može da se kreće po sferi, a čestica mase  $m_2$  duž vertikalnog pravca, kao što je prikazano na slici 2.14.

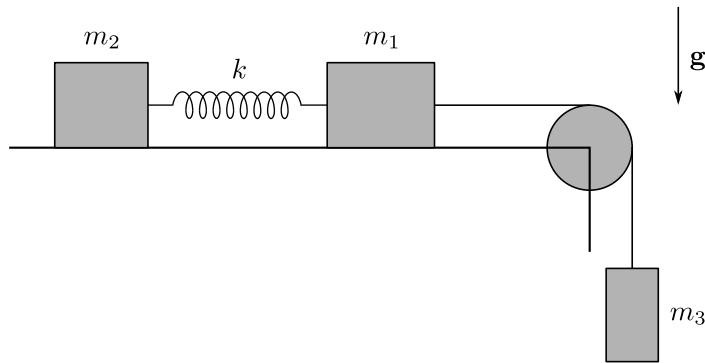
(a) Naći jednačine veze i odrediti broj stepeni slobode sistema;

(b) Sastaviti lagranžijan sistema.

(c) Odrediti integrale kretanja i na osnovu toga naći konačne jednačine kretanja u kvadraturama.



Slika 2.14: Slika uz zadatak 2.10.



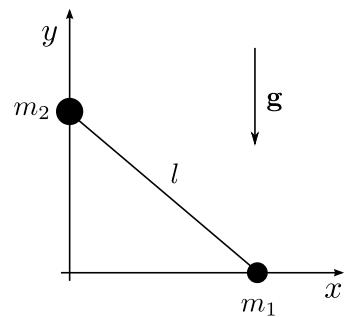
Slika 2.15: Slika uz zadatak 2.11.

**2.11.** Na horizontalnom stolu nalaze se dva tela mase  $m_1$  i  $m_2$  spojena oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ . Za telo mase  $m_1$  preko neistegljivog konca obešeno je telo mase  $m_3$ , kao na slici 2.15. Konac je prebačen preko kotura zanemarljive mase. Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Trenje je zanemarljivo.

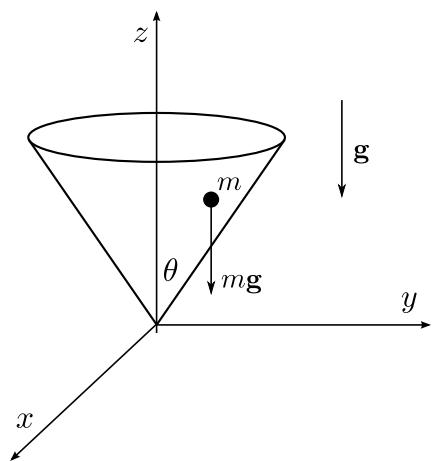
**2.12.** Dve male kuglice mase  $m_1$  i  $m_2$  kreću se u vertikalnoj  $Oxy$  ravni. Prva kuglica se kreće duž  $x$ -ose, a druga duž vertikalne  $y$ -ose. Kuglice su spojene tankim štapom zanemarljive mase i dužine  $l$ , kao što je prikazano na slici 2.16. Gravitacija je usmerena duž  $y$ -ose,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ . Napisati jednačine veza i odrediti broj stepeni slobode. Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Trenje je zanemarljivo.

**2.13.** Čestica mase  $m$  kreće se po glatkom izvrnutom konusu, čija je osa simetrije vertikalno postavljena. Polu-ugao konusa je  $\theta$ . Sastaviti lagranžijan i naći Lagranževe jednačine kretanja. Naći integrale kretanja i konačnu jednačinu kretanja čestice u integralnom obliku.

**2.14.** Čestica mase  $m$ , na koju ne deluje nikakva spoljašnja sila, zakačena je na laku neistegljivu nit dužine  $L$ , koja je potpuno obmotana oko nepokretnog cilindra radijusa  $R$ . U početnom



Slika 2.16: Slika uz zadatak 2.12.



Slika 2.17: Slika uz zadatak 2.12.

trenutku ( $t = 0$ ) čestici je saopštena brzina intenziteta  $v_0$  u radijalnom pravcu. Sastaviti lagranžian i Lagranževe jednačine kretanja. Odrediti vreme za koje će se nit sasvim odmotati.

**2.15.** Čestica mase  $m$  kreće se po paraboli  $y = ax^2$ , gde je  $a$  pozitivna konstanta.  $y$ -osa je verikalna tako da je gravitaciona sila koja deluje na česticu  $-mge_y$ . Česticu je oprugom konstane  $k$  i nominalne dužine  $l_0$  vezana za koordinatni početak. Naći lagranžian i sastaviti jednačine kretanja.

**2.16.** Čestica mase  $m$  kreće se po elipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Čestica je oprugom konstane  $k$  i nominalne dužine  $l_0$  vezana za koordinatni početak. Naći lagranžian i sastaviti jednačine kretanja. Za generalisanu koordinatu izbrati koordinatu  $x$ .

**2.17.** Rešiti zadatak 1.11 primenom metoda izloženog u poglavlju 2.10.

**2.18.** Rešiti zadatak 1.13 primenom metoda izloženog u poglavlju 2.10.



# Glava 3

## Zakoni održanja i simetrija

U prvoj glavi, posvećenoj Njutnovoj mehanici, polazeći od osnovnih teorema mehanike, odredili smo uslove pod kojima su impuls, moment impulsa i energija sistema čestica očuvane veličine. U ovoj glavi, naš pristup će biti drugačiji. Opštiji i elegantniji. U formalizmu analitičke mehanike simetrija sistema se direktno vidi iz lagranžijana, odnosno dejstva. Transformacije simetrije jednačine kretanja prevode u jednačine kretanja. Često se lagranžian konstruiše polazeći od simetrijskih razloga. Posledica simetrije fizičkih sistema su očuvane veličine. Tu se vidi fizički smisao odgovarajućih veličina. U prva dva paragrafa analiziraćemo translacionu i rotacionu simetričnost lagranžijana i zakone održanja impulsa i momenta impulsa kao njihovu posledicu. U narednom poglavlju videćemo u kakvoj vezi je translaciona vremenska invarijantnost lagranžijana sa energijom sistema. U poslednjem paragrafu, naćićemo opštiji metod za nalaženje očuvanih veličina kao posledicu simetrije fizičkih sistema. To je čuvena Neterina teorema.

### 3.1 Homogenost prostora i zakon održanja impulsa

Razmatraćemo izolovan sistem čestica bez veza sa konzervativnim silama. Za generalisane koordinate izabraćemo Dekartove koordinate čestica:  $x_1, y_1, z_1, \dots, z_N$ . Lagranžian za ovakav sistem je

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) , \quad (3.1.1)$$

gde je  $U_{\alpha\beta}$  potencijalna energija interakcije čestica indeksa  $\alpha$  i  $\beta$ . Lagranževe jednačine su

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0 , \quad \alpha = 1, \dots, N . \quad (3.1.2)$$

Generalisani impuls  $p_i$  konjugovan (pridružen) koordinati  $q_i$  je definisan sa

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (3.1.3)$$

Generalisani impulsi se u opštem slučaju ne poklapaju sa običnim impulsima, čak ne moraju imati dimenziju impulsa. U našem slučaju, kada su generalisane koordinate Dekartove, genera-

lisani impulsi

$$\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (3.1.4)$$

se poklapaju sa običnim implusima čestica.

U inercijalnim izolovanim sistemima sve tačke u prostoru su ravnopravne. Za takav prostor kažemo da je homogen. Ceo fizički sistem možemo translirati za proizvoljan vektor, a da se pri tome dinamika sistema ne promeni. Dakle, homogenost prostora je invarijantnost na prostorne translacije. Sistem vezan za disk koji rotira oko svoje ose je neinercijalan. U njemu prostor nije homogen, tj. tačke prostora nisu ravnopravne. Malo telo postavljeni u centar diska sa nultom početnom brzinom će mirovati. Ukoliko isto telo stavimo u neku drugu tačku diska, opet sa nultom početnom brzinom, telo će početi da se kreće (uz uslov da je centrifugalna sila veća od sile trenja). Ovakav prostor je nehomogen, tj. nije translaciono invarijantan.

Teorija je invarijantna na neke transformacije ako je dejstvo nepromenjeno pri tim transformacijama. Međutim, u ovom i narednom poglavlju dovoljno je da posmatramo samo lagranžijan, jer mera integracije  $dt$  je nepromenjena pri transformacijama koje analiziramo.

Pri infinitezimalnim translacijama za  $\epsilon$ , čestica indeksa  $\alpha$  čiji je vektor položaja  $\mathbf{r}_\alpha$  prelazi u novi položaj  $\mathbf{r}'_\alpha$ , prema

$$\mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \epsilon . \quad (3.1.5)$$

Pošto je  $\epsilon$  konstantan vektor, to je brzina čestice pre i posle translacije nepromenjena, tj.  $\mathbf{v}'_\alpha = \mathbf{v}_\alpha$ . Jednačine kretanja pre translacije su  $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(t)$ . Teorija je translaciono simetrična ako su  $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}'_\alpha(t)$  jednačine kretanja čestica. Drugim rečima, ako se svako rešenje jednačina kretanja transformiše u rešenje onda je ta transformacija simetrija. Sada ćemo eksplicitno proveriti invarijantnost lagranžijana (3.1.1) pri translacijama. Već smo rekli da se brzina čestica ne menja pri translacijama, pa je kinetička energija nepromenjena. Dalje se lako vidi da je

$$|\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}'_\beta| = |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta| ,$$

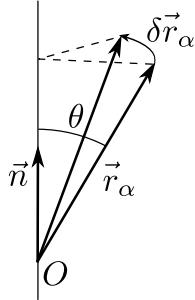
pa je i potencijalna energija invarijantna pri translacijama. Dakle, lagranžijan (3.1.1) jeste translaciono invarijantan.

Generalno, promena lagranžijana  $L(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, t)$  pri infinitezimalnoj translaciji (3.1.5) je

$$\delta L = L(\mathbf{r}_\alpha + \epsilon, \mathbf{v}_\alpha, t) - L(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, t) = \epsilon \cdot \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} . \quad (3.1.6)$$

Primenom Lagranževih jednačina kretanja (3.1.2) imamo

$$\begin{aligned} \delta L &= \epsilon \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \\ &= \epsilon \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \right) \\ &= \epsilon \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} . \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Slika 3.1: Rotacija vektora  $\mathbf{r}_\alpha$  za mali ugao  $\delta\varphi$ .

Dobili smo da je promena lagranžijana proporcionalna vremenskom izvodu ukupnog impulsa sistema. Već smo rekli da je promena lagranžijana (3.1.1) jednaka nuli,  $\delta L = 0$ . Kako je vektor  $\epsilon$  konstantan i proizvoljan, to je

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const.} \quad (3.1.8)$$

Ovo je zakon održanja impulsa. Održanje impulsa sistema je posledica translacione simetrije lagranžijana tog sistema. Na osnovu gornje analize videli smo da je impuls sistema konstantan, ali pored toga vidimo i šta je impuls sistema. Naglasimo još jednom da održanje impulsa važi u inercijalnim sistemima koji su izolovani.

## 3.2 Izotropnost prostora i zakon održanja momenta impulsa

Ako su svi pravci u sistemu ravnopravni kažemo da je prostor izotropan. Preciznije, ako takav sistem zarotiramo oko bilo koje ose za proizvoljan ugao dinamika sistema se neće promeniti. Drugim rečima sistem je rotaciono invarijantan. Ovo osobinu imaju zatvoreni inercijalni sistemi.

Na slici 3.1 prikazano je kako rotacija transformiše vektor položaja čestice. Neka je  $\delta\varphi = \delta\varphi\mathbf{n}$  infinitezimalno mali ugao, gde je  $\mathbf{n}$  ort ose oko koje se vrši rotacija usmeren po pravilu desne ruke. Ako se rotacija vrši u smeru prstiju desne ruke onda kažiprst pokazuje smer orta  $\mathbf{n}$ . Pri ovoj rotaciji vektor  $\mathbf{r}_\alpha$  prelazi u

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha &\rightarrow \mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}_\alpha \\ &= \mathbf{r}_\alpha + \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha . \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Intenzitet vektora  $\delta\mathbf{r}_\alpha$  je  $\delta\varphi|\mathbf{r}_\alpha| \sin \theta$ , gde je  $\theta$  ugao izmedju vektora  $\mathbf{r}_\alpha$  i  $\mathbf{n}$ . Diferenciranjem (3.2.9) po vremenu dobijamo zakon transformacije brzine čestice pri rotacijama

$$\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_\alpha + \delta\varphi \times \mathbf{v}_\alpha . \quad (3.2.10)$$

Sada ćemo naći promenu lagranžijana pri rotaciji za ugao  $\delta\varphi$ . Tejlorov razvoj daje

$$\begin{aligned}\delta L &= L(\mathbf{r}_\alpha + \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha + \delta\varphi \times \mathbf{v}_\alpha, t) - L(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \left[ (\delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + (\delta\varphi \times \mathbf{v}_\alpha) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right].\end{aligned}$$

Ako iskoristimo cikličnost mešovitog proizvoda dobijamo

$$\delta L = \delta\varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{r}_\alpha \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{v}_\alpha \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right). \quad (3.2.11)$$

Primenom Lagranževih jednačina promena lagranžijana postaje

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta\varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{r}_\alpha \times \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) + \mathbf{v}_\alpha \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \\ &= \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \\ &= \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha \right) \\ &= \delta\varphi \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (3.2.12)\end{aligned}$$

Na kraju vidimo da je promena lagranžijana proporcionalna izvodu momenta impulsa sistema po vremenu.

Sa druge strane, na osnovu oblika lagranžijana (3.1.2), vidimo da je on rotaciono invarijantan. Naime, rastojanje izmedju tačaka u kojima su čestice indeksa  $\alpha$  i  $\beta$  je nepromenjeno pri rotacijama:

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'_\alpha - \mathbf{r}'_\beta| &= |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta + \delta\varphi \times (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)| \\ &= \sqrt{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2 + 2(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot (\delta\varphi \times (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta))} \\ &= |\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|,\end{aligned} \quad (3.2.13)$$

jer je drugi član pod korenom u drugom redu jednak nuli. Odavde sledi da se potencijalna energija ne menja pri rotacijama. Dalje vidimo da se kvadrat brzine čestica ne manja pri rotacijama:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_\alpha^2 &= (\mathbf{v}_\alpha + \delta\varphi \times \mathbf{v}_\alpha)^2 \\ &= \mathbf{v}_\alpha^2 + 2\mathbf{v}_\alpha \cdot (\delta\varphi \times \mathbf{v}_\alpha) \\ &= \mathbf{v}_\alpha^2,\end{aligned} \quad (3.2.14)$$

pa je onda kinetička energija invarijantna na rotacije. Ovim smo pokazali da je lagranžijan (3.1.1) rotaciono invarijantan, tj. da je  $\delta L = 0$ . Ponovimo još jednom da smo razmatrali infinitezimalne rotacije, tj. zadžavalci smo samo članove koji su linearni po malom uglu rotacije.

Rotaciona invarijantnost lagranžijana znači da je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 , \quad (3.2.15)$$

tj. moment impulsa sistema je integral kretanja. Dobili smo zakon održanja momenta impulsa sistema. Da rezimiramo: Impuls i moment impulsa su integrali kretanja kod sistema koji su invarijantni na prostorne translacije odnosno rotacije.

### 3.3 Homogenost vremena i zakon održanja energije

Vremenska translacija je transformacija oblika

$$t \rightarrow t + \delta t , \quad (3.3.16)$$

gde je  $\delta t$  konstanta. Promena lagranžijana  $L(q, \dot{q}, t)$  holonomnog sistema pri vremenskoj translaciji za  $\delta t$  je

$$\delta L = L(q, \dot{q}, t + \delta t) - L(q, \dot{q}, t) = \delta t \frac{\partial L}{\partial t} . \quad (3.3.17)$$

Invarijantnost znači da je  $\delta L = 0$ , što daje

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 . \quad (3.3.18)$$

Dakle, ako lagranžian ne zavisi eksplisitno od vremena, dinamika sistema se ne menja pri vremenskim translacijama. Kažemo da je sistem invarijantan na vremenske translacije, tj. one su simetrija sistema. U takvim sistemima vreme je homogeno, i to je još jedan način da iskažemo ovu simetriju. Diferenciranjem lagranžijana po vremenu, uz uslov (3.3.18) dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) , \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

pri čemu smo primenili Lagranževe jednačine kretanja i definiciju generalisanog impulsa. Iz poslednje relacije vidimo da je

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = 0 . \quad (3.3.20)$$

Veličina u zagradi

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (3.3.21)$$

je integral (konstanta) kretanja. Ona se naziva generalisanom energijom ili funkcijom energije. Vidimo da je očuvana samo ako lagranžian ne zavisi eksplisitno od vremena.

Dalje ćemo uzeti da je sistem idealan i da su sile konzervativne. Lagranžian je tada

$$L = T - U(q) . \quad (3.3.22)$$

Ako su veze stacionarne, kinetička energija ima oblik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j . \quad (3.3.23)$$

Generalisani impulsi su

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j + \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_i \right) . \end{aligned}$$

Parcijalni izvodi koji se pojavljuju u zadnjem redu poslednje formule su jednaki Kronekerovim deltama. Definiciju Kronekerove delta možete naći u dodatku A. Prema tome imamo

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij} (\delta_{ik} \dot{q}_j + \delta_{jk} \dot{q}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (M_{ki} + M_{ik}) \dot{q}_i . \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Simetričnost masene matrice,  $M_{ij} = M_{ji}$  daje

$$p_k = \sum_i M_{ki} \dot{q}_i , \quad (3.3.25)$$

pa je generalisana energija

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U \\ &= T + U = E . \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Generalisana energija se poklapa sa ukupnom mehaničkom energijom  $E$  sistema ukoliko su veze stacionarne, holonomne i idealne, a sile konzervativne.

**Primer 1.** Kuglica mase  $m$  može da se kreće bez trenja po kružnom ramu od žice radijusa  $R$ . Ram je postavljen vertikalno i rotira konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko vertikalne ose. Odrediti generalisano energiju kuglice i pokazati da se ona ne poklapa sa mehaničkom energijom.

Rešenje: Kretanje kuglice je određeno sa dve veze:  $r = R$  i  $\varphi = \omega t$ . Druga veza je nestacionarna. Generalisana koordinata je sferni ugao  $\theta$ . Lagranžian je

$$L = \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \cos \theta . \quad (3.3.27)$$

Generalisani impuls je

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} . \quad (3.3.28)$$

Generalisana energija je

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= p_\theta \dot{\theta} - L \\ &= \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\theta}^2 - R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) + mgR \cos \theta . \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Mehanička energija kuglice je

$$E = \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) + mgR \cos \theta \quad (3.3.30)$$

i ona se ne poklapa sa generalisanom energijom, jer u sistemu postoji nestacionarna veza. Generalisana energija je integral kretanja, dok ukupna mehanička energija to nije.

## 3.4 Neterina teorema u analitičkoj mehanici

U ovom poglavlju generalnije ćemo analizirati svojstva simetrije mehaničkih sistema. Simetrija fizičkih sistema znači da se sistem ne promeni pri određenom skupu transformacija. Preciznije, transformacije simetrije jednačine kretanja transformišu ponovo u jednačine kretanja. Mehanički sistem je opisan lagranžijanom  $L(q, \dot{q}, t)$ , odnosno dejstvom

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt . \quad (3.4.31)$$

Za mehaničke sisteme transformacije definišemo promenom koordinata, tj. relacijama koje povezuju koordinate i vreme pre transformacije sa koordinatama nakon transformacije. Takođe, vreme  $t$  može biti promenjeno pri transformacijama. Sasvim generalno transformacije mogu biti neprekidne (kontinualne) i diskretne. Translacija, kao i rotacija su primeri neprekidnih transformacija, jer su parametri ovih transformacija neprekidni (vektor translacije, odnosno uglovi rotacije). Transformacija  $t' = -t$  je tzv. inverzija vremena i ona je diskretna transformacija.

Prostorna inverzija, pri kojoj koordinate menjaju znak,  $q'_i = -q_i$  je takođe diskretna transformacija. Ispitivanje da li neki sistem poseduje ili ne simetriju svodi se na ispitivanje ponašanja dejstva pri tim transformacijama.

Pri kontinualnim transformacijama generalisane koordinate i vreme prelaze u nove, primovane koordinate i vreme prema:  $t \rightarrow t'(t)$ ,  $q_i(t) \rightarrow q'_i(t')$ . Mi ćemo se ograničiti na infinitezimalne transformacije:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \delta t(t) \\ q_i(t) &\rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) . \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

Sa  $\delta t(t)$  označili smo infinitezimalnu promenu vremena koja može da zavisi od  $t$ , a sa  $\delta q_i(t)$  promene generalisanih koordinata. Račun koji dalje sledi podrazumeva da sve radimo u prvom redu po malim veličinama.

Potražimo promenu dejstva pri transformacijama (3.4.32). Dejstvo se menja zbog promene koordinata i vremena. Takodje, pri transformacijama (3.4.32) granice integracije se menjaju. Donja granica integracije nakon smene postaje  $t'_1 = t'(t_1)$  odnosno infinitezimalno  $t'_1 = t_1 + \delta t(t_1)$ . Slično važi i za gornju granicu integracije. Promenu dejstva obeležićemo sa  $\delta S$  i ona je razlika dejstva nakon i pre transformacije:

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt . \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

U novom dejstvu  $S'$  napravićemo smenu promenljive: sa integracije po  $t'$  prećićemo na integraciju po  $t$ . Jasno je da je

$$dt' = dt \left( 1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right) , \quad (3.4.34)$$

kao i da je

$$\begin{aligned} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t') &= L(q'(t + \delta t), \dot{q}'(t + \delta t), t + \delta t) \\ &= L(q'(t), \dot{q}'(t), t) + \frac{dL(q'(t), \dot{q}'(t), t)}{dt} \delta t \\ &= L(q'(t), \dot{q}'(t), t) + \frac{dL(q(t), \dot{q}(t), t)}{dt} \delta t . \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

Pri prelazu iz drugog u treći red uklonili smo primeve na koordinatama i brzinama od kojih zavisi lagranđijan u drugom sabirku, jer računamo u prvom redu po malim veličinama. Taj član je infinitezimalno mala veličina prvog reda zbog člana  $\delta t$ . Transformisano dejstvo, s tačnošću do prvog reda po malim varijacijama, je

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( 1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right) \left( L(q'(t), \dot{q}'(t), t) + \frac{dL}{dt} \delta t \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L(q'(t), \dot{q}'(t), t) + \frac{d(L\delta t)}{dt} \right) . \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

Varijaciju forme koordinata je definisana sa

$$\delta_0 q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t) .$$

To je razlika koordinata u istom trenutku vremena. Dalje je

$$L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta_0 q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 \left( \frac{dq_i}{dt} \right) . \quad (3.4.37)$$

Primenom Lagranževih jednačina

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (3.4.38)$$

imamo

$$L(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i \right) . \quad (3.4.39)$$

Kombinujući prethodne formule, dobijamo da je infinitezimalna promena dejstva data sa

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( L \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i \right) \\ &= \left( L \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} . \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

Ako uvedemo notaciju

$$Q = L \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i , \quad (3.4.41)$$

vidimo da je varijacija dejstva jednaka razlici ove veličine u trenucima  $t_2$  i  $t_1$ , tj.

$$\delta S = Q(t_2) - Q(t_1) . \quad (3.4.42)$$

Već smo rekli da transformacija koordinata i vremena je simetrija sistema ako se pri njoj jednačine kretanja prevode ponovo u jednačine kretanja. Taj uslov će biti ispunjen ako se dejstvo ne menja pri transformacijama (3.4.32), tj. ako je  $\delta S = 0$ . Onda iz (3.4.42) sledi da je veličina  $Q$  konstanta kretanja. Veličina  $Q$  se naziva još i integralom kretanja i Neterinim nanelektrisanjem. Dakle, svaka kontinualna transformacija na koju je dejstvo invarijantno daje veličine koje su konstante kretanja. Ovaj iskaz je Neterina teorema. On daje jasnu vezu izmedju simetrije sa jedne strane i integrala kretanja i predstavlja jedan od temelja moderne fizike.

Varijacija forme koordinate  $\delta_0 q_i(t)$  je povezana sa totalnom varijacijom koordinate  $\delta q_i(t)$ . Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \delta q_i(t) &= q'_i(t') - q_i(t) \\ &= q'_i(t') - q_i(t') + q_i(t') - q_i(t) \\ &= \delta_0 q_i(t') + q_i(t + \delta t) - q_i(t) \\ &= \delta_0 q_i(t) + \dot{q}_i(t) \delta t . \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

Gornja formula je tačna u linearnom redu po varijacijama  $\delta t$  i  $\delta q_i$ , zato je  $\delta_0 q_i(t') = \delta_0 q_i(t)$ .

Generalnije, teorija poseduje neku simetriju ako je varijacija dejstva jednaka integralu totalnog diferencijala:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d(\delta F)}{dt} = \delta F \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (3.4.44)$$

Ovakva promena dejstva neće uticati na jednačine kretanja. Promena dejstva, tj. veličina  $\delta F$ , se nalazi eksplisitno zamenom transformacije (3.4.32) u dejstvo. Ako je  $\delta F \neq 0$  onda je veličina

$$Q = L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i - \delta F \quad (3.4.45)$$

konstanta kretanja.

**Primer 1.** Vremenska translacija je

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau \\ q'_i(t') &= q_i(t), \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

gde je  $\tau$  konstanta. Ako lagranžian ne zavisi eksplisitno od vremena onda je

$$\delta S = 0, \quad (3.4.47)$$

tj.  $\delta F = 0$ . Iz  $\delta q_i(t) = 0$  sledi  $\delta_0 q_i(t) = -\tau \dot{q}_i(t)$ . Prema (3.4.45) očuvana veličina je

$$Q = L\tau - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tau = -\tau \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - L \right). \quad (3.4.48)$$

Konstantu  $-\tau$  možemo ignorisati, pa je očuvana veličina generalisana energija.

**Primer 2.** Lagranžian slobodnog izolovanog sistema čestica koje interaguju centralnim konzervativnim silama je

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta=1}^N U_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|). \quad (3.4.49)$$

Pokazati da je on invarijantan na rotacije

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \mathbf{r}'_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

gde je  $\delta\boldsymbol{\theta}$  infinitezimalni ugao rotacije. Naći odgovarajuću očuvanu veličinu.

Rešenje: Lako se vidi da je  $\delta F = 0$ . Očuvana veličina je

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \delta_0 \mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot (\delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_\alpha) \\ &= \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \sum_{\alpha}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{r}}_\alpha \\ &= \delta\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Ugao rotacije  $\delta\theta$  je konstantan, pa je moment impulsa  $\mathbf{L}$  konstanta kretanja. Rotaciona simetrija daje moment impulsa kao očuvanu veličinu.

**Primer 3.** Pokazati da je Lagranžijan iz Primera 2 invarijantan na translacije

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \mathbf{r}'_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

gde je  $\boldsymbol{\epsilon}$  proizvoljan konstantan vektor, kao i da je očuvana veličina impuls sistema.

Rešenje: Očuvana veličina je

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \delta_0 \mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (3.4.52)$$

Iz ovog izraza je jasno da je impuls konstanta kretanja.

**Primer 4.** Ispitati da li je model iz Primera 2 invarijantan na Galilejev bust. Pokažite da je veličina  $m\mathbf{r}_c - t\mathbf{P}$  konstanta kretanja.

Rešenje: Galilejev bust je zadat sa

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \mathbf{r}'_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha - \delta\mathbf{V}t. \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

Uzeli smo da je brzina  $\delta\mathbf{V}$  kojom se kreće sistem  $S'$  infinitezimalno mala. Promena dejstva je

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \delta\mathbf{V})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} (|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) \right] \\ &- \int dt \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} (|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) \right] \\ &= - \int dt \sum_{\alpha} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V} \\ &= \int dt \frac{d}{dt} \left( - \sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V} \right). \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

U gornjoj formuli promenu dejstva smo našli u linearном redu po brzini  $\delta\mathbf{V}$ . Vidimo da je promena dejstva integral izvoda veličine

$$\delta F = - \sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V} \quad (3.4.55)$$

po vremenu. Dakle, Galilejev bust je transformacija simetrije našeg dejstva. Dalje je  $\delta t = 0$  i  $\delta\mathbf{r}_\alpha = -\delta\mathbf{V}t$ , pa je

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \delta_0 \mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V} \\ &= - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V}t + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \cdot \delta\mathbf{V} \\ &= (m\mathbf{r}_c - t\mathbf{P}) \cdot \delta\mathbf{V} \end{aligned} \quad (3.4.56)$$

integral kretanja. Kako je  $\delta\mathbf{V}$  proizvoljno, to je veličina  $m\mathbf{r}_c - t\mathbf{P}$  konstanta kretanja. Ovaj zakon konzervacije omogućava nam da uvek možemo kombinovanjem Galilejevog busta i translacije, izabrati sistem centra mase, tj. partikularnu vrednost radijusa vektora centra mase, npr.  $\mathbf{r}_c = 0$ . U prethodna četiri primera analizirali smo vremenske translacije, rotacije, prostorne translacije i bustove. Ove transformacije čine Galilejeve transformacije. Vidimo da su, zbog invarijantnosti dejstva na Galilejeve transformacije energija, impuls, moment impulsa i veličina  $m\mathbf{r}_c - t\mathbf{P}$  konstante kretanja.

Energija, impuls i moment impulsa nepoznatog fizičkog sistema se nalaze ispitivanjem ponašanje sistema pri vremenskim translacijama, prostornoj translaciji i rotacijama. Slično važi i za druge fizičke veličine.

## 3.5 Zadaci

**3.1.** Lagranđian čestice u gravitacionom polju je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz .$$

Pokazati da ovaj lagranđian nije invarijantan na proizvoljne translacije

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + \epsilon_1 \\ y &\rightarrow y + \epsilon_2 \\ z &\rightarrow z + \epsilon_3 , \end{aligned}$$

ali da jeste invarijantan na translacije u  $xy$  ravni, tj. kad je  $\epsilon_3 = 0$ . Odrediti očuvanu veličinu.

**3.2.** Čestica mase  $m$  kreće se u potencijalu

$$U = U_0 \rho \sin\left(\varphi - \frac{z}{b}\right) ,$$

gde su  $U_0$  i  $b$  konstante. Pokazati da ovaj model poseduje simetriju

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi + \theta , \\ z &\rightarrow z + b\theta , \end{aligned}$$

gde je  $\theta$  konstanta. Naći odgovarajuću očuvanu veličinu primenom Neterine teoreme.

**3.3.** Čestica se kreće po glatkom paraboloidu  $z = k\rho^2$ , gde je  $k$  pozitivna konstanta. Pokazati da je Lagranđian invarijantan na rotacije oko  $z$ -ose i primenom Neterine teoreme pokazati da je  $z$ -komponenta uglovnog momenta konstanta kretanja.

**3.4.** Keplerov problem je kretanje čestice u potencijalu  $U = k/r$ . Lagranđian je dat sa

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} .$$

- (a) Pokazati da je Lagranžijan invarijantan na infinitezimalne transformacije

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + 2(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\boldsymbol{\alpha} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\alpha})\mathbf{r},$$

gde je  $\boldsymbol{\alpha}$  konstantan infinitezimalni parametar.

- (b) Primenom Neterine teoreme pokazati da je očuvana veličina

$$\mathcal{R} = m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + mk\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Vektor  $\mathcal{R}$  je tzv. Runge-Lencov vektor.

### 3.5. Lagranžijan nekog sistema sa dva stepena slobode ima oblik

$$L = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x^2 + y^2} + \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}.$$

Pokazati da je on invarijantan na transformacije:  $x \rightarrow e^\theta x, y \rightarrow e^\theta y$ . Ove transformacije se nazivaju skaliranjem, tj. promenom skale. Pokazati, primenom Neterine teoreme, da je veličina

$$Q = \frac{y\dot{x} + x\dot{y}}{x^2 + y^2}$$

integral kretanja.

### 3.6. Lagranžijan relativističke jednodimenzione čestice je

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}.$$

Sa  $c$  je obeležena brzina svetlosti.

- (a) Naći jednačinu kretanja čestice.  
 (b) Pokazati da je dejstvo invarijantno na transformacije

$$\begin{aligned} t' &= x \sinh(\theta) + t \cosh(\theta) \\ x' &= t \sinh(\theta) + x \cosh(\theta), \end{aligned}$$

gde je  $\theta$  konstantan parametar.

- (c) Odrediti integral kretanja koji odgovara ovoj simetriji.



# Glava 4

## Male oscilacije

Ova glava posvećena je malim oscilacijama konzervativnih sistema. Prvo ćemo definisati ravnotežnu konfiguraciju, a zatim ćemo analizirati kretanje ovih sistema oko položaja stabilne ravnoteže. U aproksimaciji malih oscilacija lagranžijan sistema je kvadratan po malim odstupanjima od ravnotežnog položaja. Pogodnim izborom koordinata, lagranžijan sistema može se napisati kao zbir lagranžijana harmonijskih oscilatora koji medjusobno ne interaguju. Kretanje sistema se svodi na superpoziciju harmonijskih oscilacija. U poslednjem delu ove glave, analizira se prelazak sa diskretnih na kontinualne sisteme. Oscilovanje sistema velikog broja tačkastih čestica prelazi, u ovom limesu, u talasno kretanje u neprekidnoj sredini.

### 4.1 Ravnotežna konfiguracija

Razmatraćemo idealne holonomne sisteme čestica sa stacionarnim vezama i konzervativnim silama. Generalisane koordinate ćemo obeležiti sa  $q_1, \dots, q_n$ . Intuitivno je jasno da je mehanički sistem u ravnoteži ukoliko proizvoljno dugo ostaje u fiksnoj konfiguraciji. U ravnotežnoj konfiguraciji sve generalisane koordinate su konstantne. Preciznije, konfiguracija  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  je ravnotežna ukoliko sistem koji se u početnom trenutku nalazio u toj konfiguraciji sa nultim početnim generalisanim brzinama ostaje proizvoljno dugo u toj konfiguraciji. Dakle, ako početni uslovi

$$q_i(t=0) = q_i^{(0)}, \quad \dot{q}_i(t=0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1.1)$$

daju jednačine kretanja

$$q_i(t) = q_i^{(0)} \quad (4.1.2)$$

za svako  $i = 1, \dots, n$ , konfiguracija  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  je ravnotežna. Čestice u ravnotežnoj konfiguraciji miruju. Sistem može da nema ili da ima više ravnotežnih konfiguracija.

Kako su veze u sistemu stacionarne, to kinetička energija sadrži samo kvadratni član po generalisanim brzinama, pa je lagranžijan ovakvih sistema dat sa

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q). \quad (4.1.3)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_l} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_l}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^n M_{lj} \dot{q}_j,\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

pa Lagranževe jednačine imaju oblik

$$\sum_{j=1}^n M_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_{lj}}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_l} = 0. \quad (4.1.5)$$

Lagranževe jednačine čine sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

U ravnotežnoj konfiguraciji važe uslovi (4.1.2), što zamenom u jednačine kretanja daje

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_l} \right|_0 = 0, l = 0, \dots, n. \quad (4.1.6)$$

Dakle, ako su prethodni uslovi zadovoljeni onda je konfiguracija (4.1.2) ravnotežna. Iz (4.1.6) vidimo da su sve generalisane sile u ravnotežnoj konfiguraciji jednake nuli.

Energija konzervativnih sistema je stalna. Sistem može da se nadje samo u onim konfiguracijama čija je potencijalna energija manja od ukupne energije. Dakle, ukupna energija sistema određuje oblast u konfiguracionom prostoru u kojoj sistem može da se nadje. Ravnotežna konfiguracija  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  je stacionarna tačka potencijala. Stacionarna tačka može biti lokalni minimum ili maksimum potencijala, mada može da se desi da stacionarna tačka nije ni minimum ni maksimum potencijala. Neka ravnotežna konfiguracija odgovara minimumu potencijala. Tada, zbog zakona ordžanja energije, sistem malo izveden iz ravnoteže, ostaje u okolini ove ravnotežne konfiguracije. Za ovaku ravnotežu kažemo da je stabilna. Sa druge strane ako ravnotežna konfiguracija nije lokalni mimimum potencijala, sistem će moći da predje u konfiguraciju koja je proizvoljno daleko od položaja ravnoteže. U ovom slučaju radi se o nestabilnoj ravnoteži. Recimo na kraju, da ukoliko potencijal ne zavisi od neke koordinate, onda ravnoteža može biti ostvarena za proizvoljnu vrednost te koordinate. Takva ravnoteža se naziva indiferentnom.

Možemo da zaključimo da ako potencijalna energija  $U(q_1, \dots, q_n)$  ima minimum u tački  $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$  onda je ta tačka stabilna ravnotežna konfiguracija. Ovaj iskaz je poznat pod imenom Lagranž-Dirišleova teorema. Kriterijum za određivanje ekstremnih vrednosti funkcija više promenljivih je dat u dodatu C.

Potencijalna energija klatna mase  $m$  i dužine  $l$  je  $U = mgl(1 - \cos \varphi)$ , gde je  $\varphi$  otklon klatna od vertikalnog pravca. Stacionarne tačke potencijala se dobijaju iz

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0. \quad (4.1.7)$$

Konfiguracije  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \pi$  su ravnotežne. U  $\varphi = 0$  potencijalna energija ima minimum, pa je ta konfiguracija stabilna. Za  $\varphi = \pi$  ravnoteža je nestabilna.

## 4.2 Jednačine kretanja

U ovom poglavlju analiziraćemo kretanje konzervativnih sistema sa stacionarnim vezama oko položaja stabilne ravnoteže. Uvešćemo smenu koordinata

$$q_i(t) = q_i^{(0)} + \eta_i(t), \quad (4.2.8)$$

gde su  $\eta_i$  mala odstupanja od stabilnog ravnotežnog položaja. Zadatak nam je da linearizujemo teoriju po malim odstupanjima na nivou jednačina kretanja. To znači da lagranžijan treba da razvijemo do kvadratnih članova po malim odstupanjima. Potencijalnu energiju i koeficijente  $M_{ij}$  ćemo razviti u Tejlorov red oko ravnotežne konfiguracije

$$\begin{aligned} U(q_1, \dots, q_n) &= U(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}) + \frac{\partial U}{\partial q_l} \Big|_0 \eta_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 \eta_i \eta_j + O(\eta^3), \\ M_{ij}(q_1, \dots, q_n) &= M_{ij}(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}) + O(\eta) \equiv m_{ij} + O(\eta). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Prvi član u razvoju potencijalne energije je konstanta koju ćemo odbaciti, jer ne utiče na jednačine kretanja. Drugi član je jednak nuli, zbog uslova (4.1.6). U trećem članu koeficijente ćemo obeležiti sa  $k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0$ . Jasno je da je  $m_{ij} = m_{ji}$  i  $k_{ij} = k_{ji}$ , tj. ovi koeficijenti su simetrični. Lagranžijan u ovoj aproksimaciji onda postaje

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - k_{ij} \eta_i \eta_j \right). \quad (4.2.10)$$

Parcijalni izvodi lagranžijana po generalisanim brzinama su

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_l} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( m_{ij} \frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial \dot{\eta}_l} \dot{\eta}_j + m_{ij} \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_l} \dot{\eta}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( m_{ij} \delta_{il} \dot{\eta}_j + m_{ij} \delta_{jl} \dot{\eta}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n m_{lj} \dot{\eta}_j + \sum_{j=1}^n m_{jl} \dot{\eta}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n m_{jl} \dot{\eta}_j. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Slično je i

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_l} = - \sum_{j=1}^n k_{jl} \eta_j. \quad (4.2.12)$$

Zamenom (4.2.11) i (4.2.12) u Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_l} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_l} = 0 \quad (4.2.13)$$

dobijamo jednačine

$$\sum_{j=1}^n \left( m_{lj} \ddot{\eta}_j + k_{lj} \eta_j \right) = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (4.2.14)$$

Jednačine kretanja su spregnute (kuplovane) diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Partikulatno rešenje prethodnih jednačina prepostavimo u obliku

$$\eta_j = A_j \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.2.15)$$

gde je  $\omega$  frekvenca,  $A_j$  su amplitude, a  $\varphi$  početna faza. Zamenom ovog rešenja u jednačine kretanja dobijamo sistem homogenih jednačina po amplitudama

$$\sum_{j=1}^n (-m_{lj}\omega^2 + k_{lj}) A_j = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (4.2.16)$$

Da bi ovaj sistem imao netrivijalna rešenja potrebno je i dovoljno da njegova determinanta bude jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & \dots & k_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ k_{n1} - \omega^2 m_{n1} & \dots & k_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2.17)$$

Leva strana prethodne jednačine je polinom  $n$ -toga stepena po  $\omega^2$ . Nule tog polinoma su karakteristične frekvence  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Iz fizičkih razloga je jasno da su frekvence realne. Formalniji dokaz ove tvrdnje daćemo u poglavlju 4.4.

Partikularno rešenje (4.2.15) je harmonijsko oscilovanje sistema kao celine sa jednom od karakterističnih frekvenci. Za frekvencu  $\omega = \omega_k$  partikularno rešenje jednačina kretanja je

$$\eta_j^{(k)} = A_j^{(k)} \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

Amplitude  $A_j^{(k)}$ ,  $j = 1, \dots, n$  za fiksnu frekvencu  $\omega_k$  nisu medjusobno nezavisne. Njihov odnos se dobija zamenom frekvence  $\omega = \omega_k$  u homogen sistem jednačina (4.2.16).

Opšte rešenje jednačina kretanja je superpozicija partikularnih rešenja

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n C_k A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (4.2.18)$$

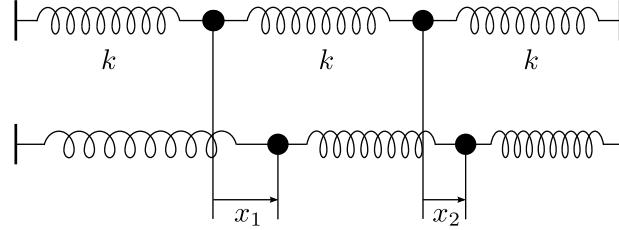
gde su  $C_k$  konstante. Ako uvedemo tzv. normalne koordinate (mode) sa

$$Q_k = C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (4.2.19)$$

onda imamo

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} Q_k. \quad (4.2.20)$$

Male oscilacije idealnog holonomnog sistema sa stacionarnim vezama i konzervativnim silama oko položaja stabilne ravnoteže predstavljaju superpoziciju čisto harmonijskog oscilovanja sistema



Slika 4.1: Longitudinalne oscilacije dve čestice spojene oprugama.

kao celine. Jednačine (4.2.20) možemo shvatiti kao smenu promenljivih kojom prelazimo sa  $\eta$ -koordinata na  $Q$ -koordinate. Normalne koordinate zadovoljavaju sledeće jednačine

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = 0 , k = 1, \dots, n . \quad (4.2.21)$$

To su ujedno i jednačine kretanja sistema koji razmatramo u normalnim koordinatama. Vidimo da su ove jednačine dekuplovane. Dakle, polazni sistem u pogodno izabranim generalisanim koordinatama smo predstavili kao sistem neinteragujućih oscilatora. Kasnije ćemo pokazati da se lagranžijan može prepisati kao zbir lagranžijana harmonijskih oscilatora bez medjusobne interakcije

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2) . \quad (4.2.22)$$

## 4.3 Primer

Dve čestice masa  $m$  vezane su oprugama konstanti elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l$ , kao na slici 4.1. Neka su opruge nedeformisane. Ako sistem izvedemo iz položaja ravnoteže on će početi da osciluje. Odredimo sopstvene frekvence oscilovanja ovog sistema.

Sistem ima dva stepena slobode. Generalisane koordinate su rastojanja  $x_1$  i  $x_2$  prikazana na slici (4.1). Potencijalna energija je

$$U = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (4.3.23)$$

pa je lagranžijan

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 . \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Lagranžijan možemo prepisati u eksplicitnijem obliku

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 - kx_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - kx_2^2 + kx_1 x_2 . \quad (4.3.25)$$

Prva dva, kao i naredna dva člana u lagranžijanu su lagranžijani slobodnih oscilatora. Poslednji član,  $kx_2x_1$  predstavlja interakciju, tj. kuplovanje ova dva oscilatora. Iz

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\quad (4.3.26)$$

sledi da je tačka  $x_1 = x_2 = 0$  ravnotežni položaj. Jednačine kretanja su

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 &= 0.\end{aligned}\quad (4.3.27)$$

Zamenom

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}\quad (4.3.28)$$

u jednačine kretanja dobijamo homogen sistem

$$\begin{aligned}(-m\omega^2 + 2k)A_1 - kA_2 &= 0, \\ -kA_1 + (-m\omega^2 + 2k)A_2 &= 0.\end{aligned}\quad (4.3.29)$$

Iz

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.30)$$

sledi da su karakteristične frekvence

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.3.31)$$

Za  $\omega = \omega_1$  iz (4.3.30) sledi

$$A_1^{(1)} = -A_2^{(1)} = A, \quad (4.3.32)$$

dok za  $\omega = \omega_2$  sledi

$$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = B. \quad (4.3.33)$$

Opšte rešenje jednačina kretanja je

$$\begin{aligned}x_1 &= AC_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + BC_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= -AC_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + BC_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (4.3.34)$$

odnosno

$$\begin{aligned}x_1 &= AQ_1 + BQ_2 \\ x_2 &= -AQ_1 + BQ_2,\end{aligned}\quad (4.3.35)$$

gde su  $Q_i$  normalne koordinate. Kretanje sistema kao celine je superpozicija dva oscilatorna kretanja. Jedno je sa frekvencom  $\omega_1$ , a drugo sa frekvencom  $\omega_2$ . Za prvu frekvencu čestice osciluju sa suprotnom fazom, a za drugu osciluju u fazi. Iz rešenja (4.3.35) vidimo da postoje četiri neodredjene konstante  $AC_1, BC_2, \varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Konstante  $A$  i  $B$  su nebitne i možemo uzeti da je  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pa se preostale konstante  $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$  odredjuju iz početnih uslova. Ako ove vrednosti za  $A$  i  $B$  zamenimo u (4.3.35), lagranžijan (4.3.24) postaje

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 - \frac{k}{2}(3Q_1^2 + Q_2^2). \quad (4.3.36)$$

Vidimo da je on zbir lagranžijana dva slobodna oscilatora, tj. lagranžijan izražen u normalnim koordinatama ne sadrži interakcioni član.

## 4.4 Normalne mode i svojstveni problem

Obeležimo simetrične matrice čiji su elementi  $m_{ij}$ , odnosno  $k_{ij}$  sa  $M$ , odnosno  $K$ . Uvedimo vektor  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)^T$  sastavljen od amplituda oscilovanja. Sistem jednačina koje zadovoljavaju amplitude (4.2.16) možemo prepisati u matričnom obliku  $K\mathbf{A} = \omega^2 M\mathbf{A}$ , odnosno

$$M^{-1}K\mathbf{A} = \omega^2 \mathbf{A}. \quad (4.4.37)$$

Iz zadnjeg izraza vidimo da su karakteristične frekvence i amplitude svojstvene vrednosti, odnosno svojstveni vektori matrice  $M^{-1}K$ . Množenjem svojstvene jednačine (4.4.37) sa  $\mathbf{A}^T$  sa leve strane, dobijamo

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{A}^T K \mathbf{A}}{\mathbf{A}^T M \mathbf{A}}. \quad (4.4.38)$$

Matrični elementi matrice  $M$  su vrednosti drugih izvoda potencijala u ravnotežnoj konfiguraciji. Pošto je ova konfiguracija stabilna, to je po Silvesterovom kriteriju, matrica  $M$  pozitivno definitna<sup>1</sup>. Kinetička energija je takodje pozitivna, pa zaključujemo da su i brojilac i imenilac u (4.4.38) pozitivni. Prema tome, svojstvene vrednosti  $\omega^2$  su pozitivne, a to znači da su karakteristične frekvence realne.

Već smo naglasili da lagranžijan (4.2.10) sadrži mešovite članve. Pokažimo sada da je moguće, smenom koordinata, tj. prelaskom na normalne koordinate transformisati ovaj lagranžijan u oblik gde su mešoviti članovi odsutni. Lagranžijan (4.2.10) postaje

$$L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T M \dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T K \eta, \quad (4.4.39)$$

gde je  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ . Matrica  $M$  je simetrična, pa je možemo ortogonalnom matricom  $S$  dijagonalizovati, tj.  $S^T M_d S = M$ . Dijagonalnu matricu smo obeležili sa  $M_d$ . Kinetički član u lagranžijanu postaje

$$T = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T M \dot{\eta} = \frac{1}{2}(S\dot{\eta})^T M_d (S\dot{\eta}) = \frac{1}{2}\dot{x}^T M_d \dot{x}, \quad (4.4.40)$$

---

<sup>1</sup>Vidi Dodatak C

gde smo uveli nove koordinata  $x = S\eta$ . Matrica  $M_d$  ima nenegativne realne brojeve na dijagonalni, jer je kinetička energija sistema nenegativna. To znači da postoji kvadratni koren iz matrice  $M_d$ . Zato možemo uvesti nove generalisane koordinate  $y$  sa  $y = \sqrt{M_d}x$ , u kojima kinetička energija ima jednostavan oblik

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}^T\dot{y} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 . \quad (4.4.41)$$

Veza izmedju  $\eta$  i  $y$  koordinata je  $y = \sqrt{M_d}S\eta$ . Pri ovoj smeni koordinata potencijal postaje

$$U = \frac{1}{2}\eta^T K \eta = \frac{1}{2}y^T (\sqrt{M_d})^{-1} SKS^{-1} (\sqrt{M_d})^{-1} y . \quad (4.4.42)$$

Matrica  $\mathcal{M} = (\sqrt{M_d})^{-1} SKS^{-1} (\sqrt{M_d})^{-1}$  je takođe simetrična, pa je možemo dijagonalizovati ortogonalnom matricom  $R$ :  $V_d = R\mathcal{M}R^T$ . Matrica  $V_d$  ima nenulte elemente samo na dijagonalni. Potencijal postaje

$$U = \frac{1}{2}y^T R^T V_d R y = \frac{1}{2}(Ry)^T V_d (Ry) = \frac{1}{2}Q^T V_d Q , \quad (4.4.43)$$

gde smo uveli nove koordinate  $Q = Ry = R\sqrt{M_d}S\eta$ . Poslednja ortogonalna transformacija  $R$  deluje trivijalno u kinetičkom članu. Dakle, na kraju smo dobili

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\dot{Q}^T \dot{Q} - \frac{1}{2}Q^T V_d Q \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left( \dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 \right) . \end{aligned} \quad (4.4.44)$$

Lagranžijan je suma medjusobno neinteragujućih lagranžijana harmonijskih oscilatora;  $Q_i$  su normalne koordinate ili normalne mode.

U primeru oscilovanja dve tačkaste mase, izloženom u poglavlju 4.3, matrice koeficijenata u lagranžijanu su

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad (4.4.45)$$

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} . \quad (4.4.46)$$

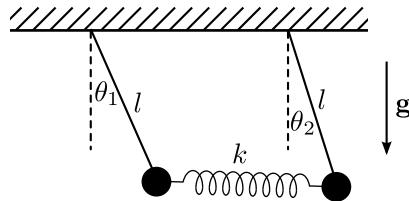
Masena matrica  $M$  je dijagonalna, pa je  $S = I$ ; matrica  $\mathcal{M}$  je

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} . \quad (4.4.47)$$

Svojstvene vrednosti ove matrice su  $\omega_1^2 = \frac{3k}{m}$  i  $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$ , što su karakteristične frekvence.

### Primer 1.

Na svaku od dve lake neistegljive niti dužine  $l$ , okačena je po jedna kuglica. Mase kuglica su  $m_1$  i  $m_2$ . Kuglice su medjusobno povezane oprugom konstante elastičnosti  $k$ , kao na slici 4.2. Rastojanje izmedju tačaka u kojima su zakačene niti,  $d$ , jednako je nominalnoj dužini opruge.



Slika 4.2: Spegnuta klatna

- (a) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja. Za generealisane koordinate uzeti uglove  $\theta_1$  i  $\theta_2$  koje klatna zaklapaju sa vertikalom.
- (b) Na osnovu rezultata (a) naći jednačine kretanja u aproksimaciji malih oscilacija. Odrediti sopstvene frekvence.
- (c) Naći lagranžijan u aproksimaciji malih oscilacija. Proveriti da on daje jednačine kretanja dobijene u delu (b).
- (d) Naći matricu  $\mathcal{M}$ , njene svojstvene vrednosti i odrediti matricu rotacije koja dijagonalizuje ovu matricu.
- (e) Na osnovu rezultata (d) odrediti normalne koordinate i izraziti lagranžijan iz dela (c) preko normalnih koordinata.

Rešenje:

- (a) Uzećemo da je koordinatni početak u tački vešanja prvog klatna,  $x$ -osa je usmerena vertikalno na dole, a  $y$ -osa u horizontalnom pravcu na desno. Koordinate prve kuglice su

$$x_1 = l \cos \theta_1, \quad y_1 = l \sin \theta_1,$$

dok su koordinate druge kuglice

$$x_2 = l \cos \theta_2, \quad y_2 = d + l \sin \theta_2.$$

Kvadrat brzine prve kuglice je

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l^2 \theta_1^2.$$

a drugu kuglicu je

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2 \theta_2^2.$$

Potencijalna elastična energija je

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}k((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) \quad (4.4.48)$$

$$= \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + 2l^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} - d)^2, \quad (4.4.49)$$

dok je gravitaciona potencijalna energija

$$U_g = -m_1 gl \cos \theta_1 - m_2 gl \cos \theta_2 .$$

Lagranđian je

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 gl \cos \theta_1 + m_2 gl \cos \theta_2 \\ &- \frac{1}{2} k \left( \sqrt{d^2 + 2l^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} - d \right)^2 . \end{aligned} \quad (4.4.50)$$

Jednačine kretanja se dobijaju pravolinijski:

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 gl \sin \theta_1 - kl \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{X}} \right) (d \cos \theta_1 + l \sin(\theta_2 - \theta_1)) &= 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 gl \sin \theta_2 + kl \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{X}} \right) (d \cos \theta_2 + l \sin(\theta_2 - \theta_1)) &= 0 , \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

gde je

$$X = d^2 + 2l^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) .$$

(b) Jednačine kretanja u aproksimaciji malih oscilacija su

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 gl \theta_1 - kl^2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 gl \theta_2 + kl^2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

Uvedeći kolonu koordinata

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

jednačina kretanja je

$$M\theta + K\theta = 0 ,$$

gde su matrice  $M$  i  $K$  date sa

$$M = \begin{pmatrix} m_1 l & 0 \\ 0 & m_2 l \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} m_1 g + kl & -kl \\ -kl & m_2 g + kl \end{pmatrix} .$$

Rešenje ćemo pretpostaviti u obliku  $\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$ , gde je  $A$  kolona amplituda

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} .$$

Zamenom u jednačine kretanja dobijamo sekularnu jednačinu

$$\begin{vmatrix} m_1 g + kl - m_1 l \omega^2 & -kl \\ -kl & m_2 g + kl - m_2 l \omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

odakle se dobijaju karakteristčne frekvence

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} . \quad (4.4.53)$$

(c) Za male uglove otklona je

$$\sqrt{d^2 + 2l^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)} - d \approx l(\theta_2 - \theta_1) ,$$

pa je lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 + m_1gl(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2) + m_2gl(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2) - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 .$$

Iz njega direktno slede jednačine (4.4.52).

(d) Matrica  $M$  je dijagonalna, pa je  $S = I$ . Dalje je

$$\mathcal{M} = (\sqrt{M_d})^{-1}SKS^{-1}(\sqrt{M_d})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{\sqrt{m_1m_2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{m_1m_2}} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m_2} \end{pmatrix} .$$

Svojstvene vrednosti ove matrice su  $\omega_1^2$  i  $\omega_2^2$ . Svojsveni vektori su

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} \\ \sqrt{m_2} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1} \end{pmatrix} .$$

od kojih formiramo matricu

$$R = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2} \\ -\sqrt{m_2} & \sqrt{m_1} \end{pmatrix}$$

koja dijagonalizuje matricu  $\mathcal{M}$ , tj.

$$V = R\mathcal{M}R^T = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} .$$

(e) Normalne koordinate su odredjene prema

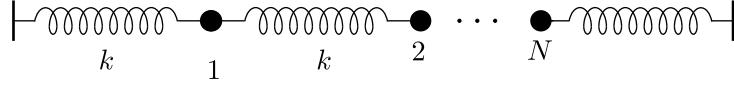
$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = R\sqrt{M_d}S \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} m_1l & m_2l \\ -\sqrt{m_1m_2}l & \sqrt{m_1m_2}l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} ,$$

odakle je

$$\begin{aligned} l\theta_1 &= \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}}(Q_1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}Q_2) \\ l\theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}}(Q_1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}Q_2) . \end{aligned} \tag{4.4.54}$$

Prelaskom na normalne koordinate lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{Q}_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2Q_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2Q_2^2 .$$



Slika 4.3: Lanac tačkastih masa.

## 4.5 Longitudinalne oscilacije lanca tačkastih masa

Neka je  $N$  tačkastih čestica masa  $m$  spojeno oprugama konstanti elastičnosti  $k$ , kao na slici 4.3. Pretpostavimo da je rastojanje izmedju susednih čestica  $a$  i neka su tada sve opruge nedeformisane. Sa  $\eta_i$  obeležićemo odstupanje  $i$ -te čestice od položaja ravnoteže. Lagranžijan ovog sistema je

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^N \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (4.5.55)$$

Uzeli smo  $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$ , jer su nulta i  $N+1$ -va čestica nepokretne. Ova dva uslova predstavljaju granične uslove. Lagranževe jednačine kretanja se lako dobijaju iz lagranžijana. One su

$$m\ddot{\eta}_l + k(2\eta_l - \eta_{l+1} - \eta_{l-1}) = 0, \quad l = 0, \dots, N+1. \quad (4.5.56)$$

Rešenje prethodnog sistema jednačina pretpostavljamo u obliku

$$\eta_l = A_l \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.5.57)$$

Zamenom (4.5.57) u sistem jednačina (4.5.56) dobijamo

$$\left(2 - \frac{m\omega^2}{k}\right)A_l - A_{l+1} - A_{l-1} = 0. \quad (4.5.58)$$

Dobili smo sistem homogenih linearnih jednačina za amplitudu. Jedan način da odredimo karakteristične frekvence je da nadjemo determinantu ovog sistema jednačina i da je izjednačimo sa nulom. Međutim, mi ćemo krenuti drugim putem. Rešenje jednačina (4.5.58) tražićemo u obliku

$$A_l = Ae^{i(l\theta-\delta)}, \quad (4.5.59)$$

gde su  $A, \theta$  i  $\delta$  realne neodredjene konstante. Zamenom u (4.5.58) dobijamo

$$2 - \frac{m\omega^2}{k} = 2 \cos \theta, \quad (4.5.60)$$

odakle je

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.5.61)$$

Odmah vidimo da je i  $B e^{-i(l\theta+\delta)}$  takodje partikularno rešenje jednačina (4.5.58). Dakle, opšte rešenje za amplitudu je

$$A_l = Ae^{i(l\theta-\delta)} + Be^{-i(l\theta+\delta)}. \quad (4.5.62)$$

Granični uslov  $A_0 = 0$  daje  $B = -A$ , dok uslov  $A_{N+1} = 0$  daje  $\sin(N+1)\theta = 0$  odnosno

$$\theta_n = \frac{n\pi}{N+1} . \quad (4.5.63)$$

U prethodnoj formuli indeks  $n$  bi mogao da bude bilo koji ceo broj. Mi ćemo uzeti  $n = 1, \dots, N$ , jer za  $n = N+1, N+2, \dots$  ne dobijamo nove uslove. Prema tome, karakteristične frekvence oscilovanja su

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right), \quad n = 1, \dots, N . \quad (4.5.64)$$

Indeks  $n$  prebrojava modove oscilovanja. Vidimo da postoji  $N$  modova oscilovanja. Uzimanjem  $\delta = \pi/2$  partikularno rešenje za amplitudu  $A_l$  je dato sa

$$A_l^{(n)} = 2A \sin\left(\frac{ln\pi}{N+1}\right) . \quad (4.5.65)$$

Opšte rešenje jednačina kretanja je

$$\eta_l = \sum_{n=1}^N A_{(n)} \sin\left(\frac{ln\pi}{N+1}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) , \quad l = 1, \dots, N , \quad (4.5.66)$$

gde se amplitude  $A_{(n)}$  i faze  $\varphi_n$  određuju iz  $2n$  početnih uslova.

### Kontinualni limes. Talasna jednačina

Uzmimo sada da je broj čestica u lancu veliki, tj.  $N \rightarrow \infty$ . Takodje neka rastojanje izmedju susednih čestica,  $a$  teži nuli, ali tako da je  $(N+1)a = L$ , gde je  $L$  ukupna dužina lanca. Dalje ćemo uzeti da  $m \rightarrow 0$ , ali tako da je odnos  $m/a = \mu$  konstantan i jednak masi lanca po jedinici dužine. Orijentisimo osu  $x$  duž lanca tako da se  $l$ -ta čestica nalazi poziciji  $x = la$ . U limesu koji smo opisali, veličina  $\eta_l(t)$  postaje  $\eta(t, x)$ , tj. elongacija delića kontinualnog lanca u tački  $x$  u trenutku  $t$ . Jednačine (4.5.56) ćemo prepisati na sledeći način

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_l - k \left( \frac{\eta_{l+1} - \eta_l}{a} - \frac{\eta_l - \eta_{l-1}}{a} \right) = 0 , \quad (4.5.67)$$

odnosno

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - ka \left( \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x-a}}{a} \right) = 0 . \quad (4.5.68)$$

U limesu  $a \rightarrow 0$  izraz u velikoj zagradi je drugi parcijalni izvod elongacije  $\eta(t, x)$  po koordinati  $x$ , pa dobijamo

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{Y}{\mu} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 , \quad (4.5.69)$$

gde je  $Y = ka$  Jungov moduo. Dobili smo talasnu jednačinu. Fazna brzina longitudinalnih talasa u žici data je sa

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} . \quad (4.5.70)$$

Rešimo gornju talasnu jednačinu uz granične uslove  $\eta(t, x = 0) = \eta(t, x = L) = 0$ . Partikularno rešenje talasne jednačine tražićemo u obliku proizvoda dve funkcije

$$\eta = T(t)X(x)$$

od kojih jedna zavisi od vremena, a druga od  $x$ . Zamenom u talasnu jednačinu dobijamo

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (4.5.71)$$

Leva strana gornje jednačine je funkcija vremena, a desna koordinate  $x$ . Obe funkcije moraju biti konstante i obeležićemo ih sa  $-\omega^2$ . Tako dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T &= 0, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.72)$$

Rešenja za funkcije  $T(t)$  i  $X(x)$  su onda

$$\begin{aligned} T(t) &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ X(x) &= E \cos(kx) + F \sin(kx), \end{aligned} \quad (4.5.73)$$

gde je  $\omega = kv$  tzv. disperziona relacija, a  $k$  je talasni broj. Granični uslovi  $\eta(t, x = 0) = \eta(t, x = L) = 0$  daju  $E = 0$  i diskretizuju talasni broj  $k = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Partikularno rešenje talasne jednačine dato je sa

$$\eta^{(n)}(t, x) = C \cos(\omega_n t + \varphi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (4.5.74)$$

gde je

$$\omega_n = vk_n = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} \frac{n\pi}{L}. \quad (4.5.75)$$

Ovo rešenje je stojeći talas.

Kontinualni limes u izrazu (4.5.64) daje

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi n a}{2L} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\pi n a}{L} \rightarrow \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (4.5.76)$$

Dobili smo rezultat (4.5.75).

Pokazali smo da jednačina kretanja i disperziona relacija u diskretnom slučaju prelaze u kontinualnom limesu utalasnu jednačinu, odnosno u uslov (4.5.75). Kinetička energija u kontinualnom limesu postaje

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m \dot{\eta}_i^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L m \frac{dx}{a} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^L dx \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2. \quad (4.5.77)$$

Potencijana energija na sličan način postaje

$$U = \frac{1}{2}Y \int_0^L dx \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \quad (4.5.78)$$

pa je lagranžian

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[ \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4.5.79)$$

Variranjem ovog lagranžijana dobijamo jednačinu (4.5.69). Detalje ovog izvodjenja možete naći u [1].

## 4.6 Transverzalne oscilacije lanca tačkastih masa

U ovom poglavlju razmatraćemo transverzalne oscilacije lanca tačkastih masa. Neka su  $N$  kuglica, svaka mase  $m$  spojene nitima zanemarljive mase. Rastojanje izmedju susednih kuglica je  $a$ . Sile zatezanja u nitima su konstantne i iznose  $T$ . Čestice se izvedu iz ravnotežnih položaja u pravcu normalnom na strunu, kao što je prikazano na slici 4.4. Elongaciju  $i$ -te kuglice u trenutku  $t$  obeležićemo sa  $\psi_i(t)$ . Na  $i$ -tu kuglicu deluje transverzalna sila

$$F_i = -T \left( \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\sqrt{(\psi_i - \psi_{i-1})^2 + a^2}} + \frac{\psi_i - \psi_{i+1}}{\sqrt{(\psi_i - \psi_{i+1})^2 + a^2}} \right). \quad (4.6.80)$$

Kao i u prethodnoj lekciji uzimamo  $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$ . U aproksimaciji malih oscilacija  $|\psi_i - \psi_{i-1}| \ll a$ , gornji izraz za silu postaje

$$F_i = -\frac{T}{a}(2\psi_i - \psi_{i-1} - \psi_{i+1}). \quad (4.6.81)$$

Ova sila je konzervativna i možemo uvesti potencijalnu energiju sa

$$U = \frac{T}{2a} \sum_{i=0}^N (\psi_{i+1} - \psi_i)^2. \quad (4.6.82)$$

Lako se proverava da je  $F_i = -\frac{\partial U}{\partial \psi_i}$ . Lagranžian sistema čestica koji razmatramo je

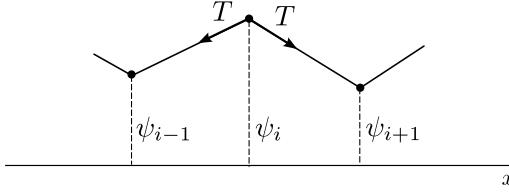
$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^N \dot{\psi}_i^2 - \frac{T}{2a} \sum_{i=0}^N (\psi_{i+1} - \psi_i)^2. \quad (4.6.83)$$

Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0 \quad (4.6.84)$$

su

$$m\ddot{\psi}_l + \frac{T}{a}(2\psi_l - \psi_{l+1} - \psi_{l-1}) = 0, \quad l = 1, \dots, N. \quad (4.6.85)$$



Slika 4.4: Transverzalne oscilacije lanca tačkastih masa

Ove jednačine su ekvivalentne sa jednačinama kretanja (4.5.56) za slučaj longitudinalnih oscilacija do na zamenu  $k \rightarrow T/a$ . Rešenje jednačina kretanja je analogno sa slučajem longitudinalnih oscilacija. Sopstvene frekvencе su

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right), n = 1, \dots, N . \quad (4.6.86)$$

Rešenje jednačina kretanja je superpozicija transverzalnih oscilacija sistema sa frekvencama  $\omega_1, \dots, \omega_N$  i dato je sa

$$\psi_l = \sum_{n=1}^N A_{(n)} \sin\left(\frac{ln\pi}{N+1}\right) \cos(\omega_n t + \varphi_n) , \quad (4.6.87)$$

gde se amplitude  $A_{(n)}$  i faze  $\varphi_n$  određuju iz početnih uslova.

### Kontinualni limit. Transverzalne oscilacije strune

Analogno longitudinalnim oscilacijama i u slučaju transverzalnih oscilacija ćemo napraviti kontinualni limes. Uzećemo da je broj čestica u niti  $N$  veliki, ali tako da je  $(N+1)a = L$ , kao i da je masa čestice  $m$  mala, tj. teži nuli, ali tako da je  $m/a = \mu$  konačna veličina koja predstavlja masu žice po jedinici dužine. U ovom limesu model tačkastih masa opisan u prethodnom poglavljiju postaje model transverzalnih oscilacija žice, koja je fiksirana na krajevima i zategnuta stalnom silom zatezanja  $T$ . Elongacije  $i$ -te čestice  $\psi_i(t)$  prelaze u polje  $\psi(t, x)$ . Jednačine (4.5.56) u kontinualnom limesu prelaze u talasnu jednačinu

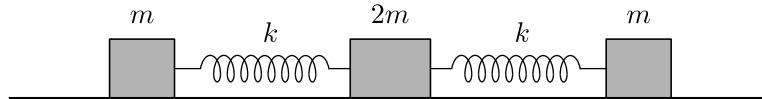
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 , \quad (4.6.88)$$

potpuno analogno kao u slučaju longitudinalnih oscilacija. Iz talasne jednačine vidimo da je brzina transverzalnih oscilacija u žici data sa

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} . \quad (4.6.89)$$

Naredni zadatak je da nadjemo rešenje talasne jednačine (4.6.88) uz granične uslove  $\psi(t, x = 0) = \psi(t, x = L) = 0$ . Partikularna rešenja su data sa

$$\psi(t, x) = A \cos(\omega_n t + \varphi) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) , \quad (4.6.90)$$



Slika 4.5: Slika uz zadatak 4.4.

gde su sopstvene frekvence talasa u žici

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} . \quad (4.6.91)$$

Ova rešenja su stojeći talasi, odnosno harmonici.

## 4.7 Zadaci

- 4.1.** (a) Odrediti ravnotežne konfiguracije dvostrukog matematičkog klatna. Mase čestica su  $m_1$  i  $m_2$ , a dužine klatna su  $l_1$  i  $l_2$ . Ispitati stabilnost ovih konfiguracija.  
 (b) Ako je  $l_1 = l_2 = l$  i  $m_1 = m_2 = m$  odrediti normalne frekvence dvostrukog matematičkog klatna i predstaviti lagranžijan preko normalnih koordinata.

- 4.2.** Čestica mase  $m$  može da se kreće bez trenja po krugužnom obruču, poluprečnika  $R$ . Obruč rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko vertikalne ose u gravitacionom polju.

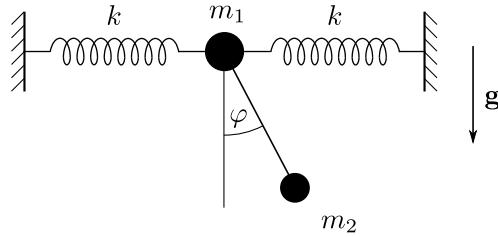
- (a) Odrediti ravnotežni položaj čestice. Kako je veza nestacionarna, pod ravnotežnom se podrazumeva ravnoteža u odnosu na vezu. Pokazati da ako je  $g/(R\omega^2) < 1$  ravnoteža je stabilna, a ako je  $g/(R\omega^2) > 1$  ravnoteža je nestabilna.  
 (b) Naći frekvencu malih oscilacija oko položaja stabilne ravnoteže.

- 4.3.** Naći normalne frekvence oscilovanja za sistem iz zadatka 2.8.

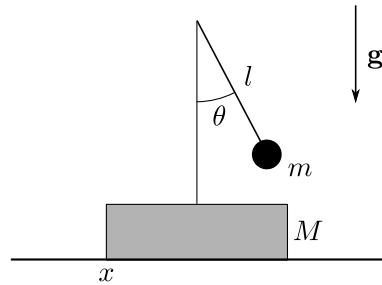
- 4.4.** Tri čestice masa  $m$ ,  $2m$  i  $m$  spojene su oprugama istih konstanti elastičnosti  $k$  i nominalnih dužina  $l_0$ , kao što je prikazano na slici 4.5. Sistem se nalazi na horizontalnoj idealno glatkoj podlozi i čestice mogu da se kreću duž jedne prave. Odrediti normalne frekvence i normalne koordinate.

- 4.5.** Dva klatna, oba dužine  $l$ , sa jednakim masama  $m$  spojena su oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ , kao na slici 4.2. Rastojanje izmedju tačaka u kojima su klatna učvršćena je takodje  $l_0$ . Odrediti frekvence malih oscilacija sistema i naći normalne koordinate.

- 4.6.** Za sistem prikazan na slici 4.6 naći lagranžijan i jednačine kretanja. Odrediti takođe normalne frekvence ovog sistema. Mase tela su  $m_1$  i  $m_2$ . Koeficijenti elastičnosti opruga su jednaki i iznose  $k$ . Nominalne dužine opruga su  $l_0$ . Rastojanje izmedju zidova gde su opruge učvršćene je  $2l_0$ . Dužina klatna je  $l$ .



Slika 4.6: Slika uz zadatak 4.6.



Slika 4.7: Slika uz zadatak 4.7.

**4.7.** Klatno mase  $m$  i dužine  $l$  nalazi se na bloku mase  $M$  koji se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi.

- (a) Pokazati da je lagranžijan dat sa

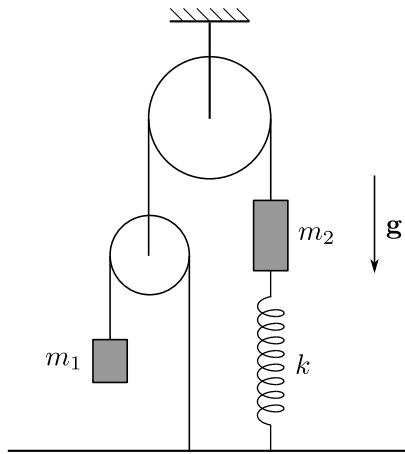
$$L = \frac{M+m}{2} \dot{x}^2 + ml \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta .$$

- (b) Naći lagranžijan u aproksimaciji malih oscilacija.  
 (c) Odrediti frekvencu malih oscilacija.

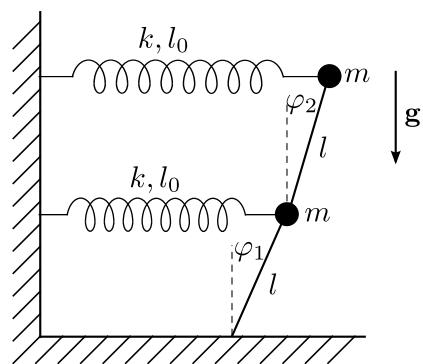
**4.8.** Dva tela mase  $m_1$  i  $m_2$  spojena su preko dva kotura zanemarljivih masa kao na slici 4.8.

- (a) Odrediti ravnotežnu konfiguraciju sistema.  
 (b) Neka su  $x_1$  i  $x_2$  odstupanja tela mase  $m_1$ , odnosno  $m_2$  od ravnotežne konfiguracije. Naći lagranžijan sistema preko ovih koordinata.  
 (c) Eliminisati koordinatu  $x_2$  preko koordinate  $x_1$  u lagranžijanu.  
 (d) Odrediti frekvencu malih oscilacija sistema.

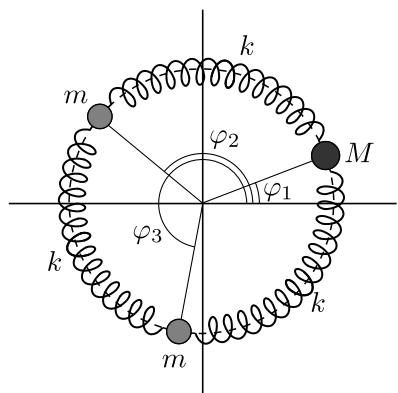
**4.9.** Naći sopstvene frekvencije malih oscilacija dvojnog izvrnutog klatna sa slike 4.9. Štapovi imaju dužine  $l$  i zanemarljive su mase.



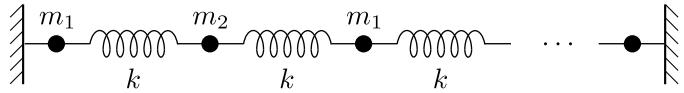
Slika 4.8: Slika uz zadatak 4.8.



Slika 4.9: Slika uz zadatak 4.9.



Slika 4.10: Slika uz zadatak 4.10.



Slika 4.11: Slika uz zadatak 4.11.

**4.10.** Tri mala tela masa  $m$ ,  $m$  i  $M$  spojena su oprugama konstanti  $k$  kao na slici 4.10. Tela se kreću se po krugu radijusa  $R$ . Nominalne dužine opruga su jednake i iznose  $2\pi R/3$ . Naći sopstvene frekvencije ovog sistema.

**4.11.** Linearni lanac je sastavljen naizmenično od čestica masa  $m_1$  i  $m_2$ , kao na slici 4.11. Sve opruge imaju nominalnu dužinu  $l_0$  i konstantu elastičnosti  $k$ . Naći disperziju relaciju longitudinalnih oscilacija ovog lanca.

# Glava 5

## Centralno kretanje

U ovoj glavi analiziraćemo jedan važan primer kretanja, a to je kretanje u polju centralne sile. Planete se oko Sunca kreću pod dejstvom centralne sile obrnuto proporcionalne kvadratu rastojanja izmedju Sunca i planete. Elektrostatička sila je takodje primer centralne sile. Do konačnih jednačina kretanja doćićemo rešavanjem odgovarajućih Lagranževih jednačina, ali i polazeći od prvih integrala kretanja. To je sadržaj prva dva poglavlja. U trećem poglavlju kvalitativno, bez rešavanja jednačina kretanja, diskutujemo moguće orbite čestica u centralnom polju. Naredna tri poglavlja se odnose na Keplerov problem. Na kraju ove glave analiziraćemo rasejanja čestica.

### 5.1 Kretanje u polju centralne sile. Lagranževe jednačine

Centralno kretanje je kretanje čestice pod dejstvom centralne sile. Centralna sila, kako joj samo ime kaže, usmerena je ka jednoj tački, koju zovemo centrom sile. Centralna sila ima oblik

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

Vidimo da intenzitet centralne sile zavisi od rastojanja  $r$ . Lako se vidi da je  $\text{rot} \mathbf{F} = 0$ , što znači da je centralna sila konzervativna. Iz

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r) = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} , \quad (5.1.1)$$

potencijalna energija  $U$  je

$$U = - \int f(r) dr . \quad (5.1.2)$$

Za česticu koja se kreće u polju centralne sile, moment impulsa  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , je integral kretanja, jer je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{f(r)}{r} \mathbf{r} = 0 . \quad (5.1.3)$$

Sektorska brzina predstavlja površinu koju radijus vektor čestice prebriše u jedinici vremena, tj.

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{L}}{2m} . \quad (5.1.4)$$

Vidimo da je sektorska brzina kolinearna sa momentom impulsa čestice. Kako je moment impulsa čestice konstanta kretanja, to je i sektorska brzina konstanta kretanja. Ovo znači da radijus vektor čestice u polju centralne sile prebriše za jednaka vremena jednake površine. Ovaj iskaz je poznat kao drugi Keplerov zakon.

Iz

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (5.1.5)$$

sledi da je radijus vektor čestice ortogonalan na vektor momenta impulsa. U polju centralne sile čestica se kreće u ravni ortogonalnoj na moment impulsa, koji je kao što smo već rekli, konstantan vektor. Ako je moment impulsa duž  $z$ -ose, čestica se kreće u  $xy$  ravni. Centralno kretanje ima dva stepena slobode. Redukcija broja stepeni slobode čestice, od tri do dva, je posledica zakona održanja momenta impulsa, odnosno simetrije sistema. Za generalisane koordinate izabraćemo polarne koordinate  $\rho$  i  $\varphi$ .

Lagranđijan za česticu koja se kreće u centralnom potencijalu je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho) . \quad (5.1.6)$$

Da bismo izveli jednačine kretanja potrebno je da nadjemo odgovarajuće parcijalne izvode lagranđijana (5.1.6) po generalisanim koordinatama i brzinama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\rho^2\dot{\varphi} , \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho} , \\ \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\varphi}^2 - U'(\rho) . \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Jednačine kretanja postaju

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + U'(\rho) &= 0 , \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) &= 0 . \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Da bismo našli rešenje jednačina kretanja moramo zadati početne uslove, tj. vrednosti generalisanih koordinata i brzina u početnom trenutku:  $\rho_0, \varphi_0, \dot{\rho}_0$  i  $\dot{\varphi}_0$ .

Lagranđijan (5.1.6) ne zavisi od  $\varphi$  koordinate. Koordinate od kojih lagranđijan ne zavisi nazivaju se cikličnim koordinatama. Iz jednačina kretanja sledi da su odgovarajući generalisani impulsi konstante kretanja. Konkretno, u našem slučaju iz druge Lagranževe jednačine u (5.1.8) sledi da je generalisani impuls  $p_\varphi$  pridružen koordinati  $\varphi$ , konstanta kretanja. Ovaj generalisani impuls je

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} . \quad (5.1.9)$$

Moment impulsa čestice je

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \rho\mathbf{e}_\rho \times (\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = m\rho^2\varphi\mathbf{e}_z = p_\varphi\mathbf{e}_z .$$

Dakle, generalisani impuls  $p_\varphi$  jednak je projekciji momenta impulsa na  $z$  osu,  $p_\varphi = L_z$ .

Vratimo se sada na jednačine kretanja. Lako se vidi da je

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L_z}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) ,$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right) = -\frac{L_z^2}{m^2\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) .$$

Zamenom prethodne formule u prvu jednačinu u (5.1.8) dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{m\rho^2}{L_z^2} f(\rho) , \quad (5.1.10)$$

čijim rešavanjem odredjujemo trajektoriju čestice u eksplicitnom obliku  $\rho = \rho(\varphi)$ . Ova jednačina je poznata pod imenom Bineova formula.

**Primer 1.** Čestica mase  $m$  kreće se u polju centralne sile po logaritamskoj spirali,  $\rho = ke^{\alpha\varphi}$ , gde su  $k$  i  $\alpha$  konstante. Odrediti silu i potencijal, kao i jednačinu kretanja čestice u parametarskom obliku,  $\rho = \rho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . U početnom trenutku je  $\varphi(t=0) = \varphi_0$ . Moment impulsa čestice je  $L_z$ .

Rešenje: Zamenom

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\alpha^2}{\rho}$$

u Bineovu formulu, (5.1.10) dobija se

$$f = -\frac{(1+\alpha^2)L_z}{m\rho^3} .$$

Vidimo da je sila privlačna. Potencijalna energija je

$$U = - \int d\rho f = \frac{(1+\alpha^2)L_z}{2m\rho^2} .$$

Iz

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{m\rho^2} ,$$

i jednačine trajektorije dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$e^{2\alpha\rho} d\varphi = \frac{L_z}{mk^2} dt ,$$

odakle je

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha} \ln \left( \frac{2\alpha L_z}{mk^2} t + C \right) .$$

Integraciona konstanta  $C$  određuje se iz početnog uslova. Rezultat je  $C = e^{2\alpha\varphi_0}$ . Zamenom zavisnosti polarnog ugla od vremena u jednačinu trajektorije dobijamo

$$\rho = k \sqrt{\frac{2\alpha L_z}{mk^2} t + C} .$$


---

## 5.2 Prvi integrali kretanja

Za česticu koja se kreće u polju centralne sile energija i moment impulsa su integrali kretanja. U prethodnom poglavlju smo to videli na osnovu oblika centralne sile. U Lagranževom formalizmu održanje ovih veličina se vidi direktno iz lagranžijana. Lagranžijan (5.1.6) ne zavisi eksplisitno od vremena, tj. invarijantan je na vremenske translacije, pa je energija konstanta kretanja. Pored toga lagranžijan (5.1.6) je invarijantan na rotacije oko  $z$ -ose, pa je moment impulsa  $L_z$  očuvan. Energija čestice je

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) , \quad (5.2.11)$$

dok je moment impulsa

$$m\rho^2\dot{\varphi} = L_z . \quad (5.2.12)$$

Ako izrazimo  $\dot{\varphi}$  iz (5.2.12) i zamenimo u (5.2.11) dobijamo

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = E , \quad (5.2.13)$$

gde je

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} \quad (5.2.14)$$

tzv. efektivni potencijal. Jednačina (5.2.13) daje

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))} , \quad (5.2.15)$$

što je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive, pa je

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\rho)}} . \quad (5.2.16)$$

Prethodna jednačina daje zavisnost radikalne koordinate od vremena,  $\rho = \rho(t)$ . Zamenom ovog rešenja u jednačinu (5.2.12) dobijamo

$$\varphi = \frac{L_z}{m} \int_0^t \frac{dt}{\rho^2(t)} + \varphi_0 . \quad (5.2.17)$$

Jednačinu trajektorije čestice našli smo u parametarskom obliku. Ako podelimo jednačine (5.2.15) i (5.2.12) dobijamo

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho^2}{L_z} \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))} . \quad (5.2.18)$$

Dobijena jednačina razdvaja promenljive, a integracija daje

$$\varphi = L_z \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}} + \varphi_0 . \quad (5.2.19)$$

Izraz (5.2.19) je eksplicitan oblik jednačine kretanja čestice,  $\rho = \rho(\varphi)$ . Jednačine kretanja čestice u polju centralne sile našli smo u parametarskom, odnosno u eksplicitnom obliku. Rešenja su data u integralnom obliku, tj. u kvadraturama. U konačnim jednačinama kretanja figurišu četiri integracione konstante  $\rho_0, \varphi_0, E$  i  $L_z$ . Umesto početnih generalisanih brzina  $\dot{\rho}_0$  i  $\dot{\varphi}_0$  koristimo energiju i moment impulsa.

Dakle, da zaključimo. Jednačina trajektorije čestice u polju centralne sile može se dobiti rešavanjem Bineove formule, što smo izložili u prethodnom poglavljiju. Pored toga jednačina kretanja može biti dobijena iz prvih integrala kretanja.

**Primer 1.** Čestica mase  $m$  kreće se u potencijalu

$$U = -U_0 \left( \frac{a}{\rho} \right)^2 \ln \left( \frac{\rho}{a} \right) ,$$

gde su  $U_0$  i  $a$  pozitivne konstante. Naći jednačinu trajektorije čestice ako je njena energija  $E = 0$ , a moment impulsa  $L_z$ .

Rešenje: Primenom (5.2.19) imamo

$$\varphi = \frac{L_z}{\sqrt{2m}} \int \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{\sqrt{U_0 a^2 \ln \left( \frac{\rho}{a} \right) - \frac{L_z^2}{2m}}} .$$

Gornji integral se lako rešava smenom

$$z = U_0 a^2 \ln \left( \frac{\rho}{a} \right) - \frac{L_z^2}{2m} .$$

Rezultat je

$$\rho = ae^{\frac{L_z^2}{2ma^2U_0} + \frac{a^2mU_0}{2L_z^2}(\varphi - C)^2} ,$$

gde je  $C$  integraciona konstanta koju odredujemo iz početnih uslova.

**Primer 2.** Čestica mase  $m$ , nalazi se na rastojanju  $\rho_0$  od centra sile, čiji je potencijal

$$U = \frac{\kappa \rho^3}{3} ,$$

gde je  $\kappa$  pozitivna konstanta. Početna brzina čestice zaklapa ugao  $\pi/2$  sa radijus vektorom. Naći vrednost početne brzine za koju će se čestica kretati po krugu.

Rešenje: Čestica se kreće po krugu ukoliko je  $U'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Ovaj uslov daje

$$\rho = \rho_0 = \left( \frac{L_z^2}{m\kappa} \right)^{1/5}.$$

Vrednost momenta impulsa je  $L_z = mv_0\rho_0$ , pa je

$$v_0 = \sqrt{\frac{\kappa\rho_0^3}{m}}.$$


---

### 5.3 Kvalitativna analiza centralnog kretanja

Uvodjenjem efektivnog potencija kretanje čestica u polju centralne sile svodi se na kvazi-jednodimenziono kretanje, ali u efektivnom potencijalu. Čestica se može kretati u oblasti prostora u kojoj radijalna koordinata ispunjava uslov  $E \geq U_{\text{eff}}(\rho)$ . U suprotnom,  $\dot{\rho}$  bi bilo imaginarno. Prema tome, jednačina  $E = U_{\text{eff}}(\rho)$  određuje granice oblasti u kojoj se čestica može kretati. Koreni ove jednačine se nazivaju povratnim tačkama. Iz (5.2.15) vidimo da je  $\dot{\rho}$  u povratnim tačkama jednak nuli, tj. radijalna brzina čestice je jednak nuli. Pošto je  $\dot{\varphi}$  u ovim tačkama različito od nule, čestica se u povratnim tačkama ne zaustavlja. Ako je oblast prostora u kojoj se kreće čestica data sa  $\rho \geq \rho_{\min}$ , čestica može da ode u beskonačnost. Kretanje je infinitno. Sa druge strane ako jednačina  $E = U_{\text{eff}}(\rho)$  ima dva različita konačna korena:  $\rho_{\min}$  i  $\rho_{\max}$ , onda se ona kreće u ograničenoj oblasti  $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$ . U ovom slučaju kretanje čestice je finitno, odnosno vezano. Povratna tačka  $\rho = \rho_{\min}$  se naziva pericentrom, a  $\rho = \rho_{\max}$  apocentrom. U ovim tačkama čestica je najbliže, odnosno najdalje od centra sile. Pri kretanju planeta oko Sunca ove tačke se nazivaju afelom, odnosno perihelom. Za vreme za koje čestica od minimalnog rastojanja dodje u položaj kada je rastojanje maksimalno, i ponovo dodje u tačku trajektorije kada je rastojanje najmanje, radijus vektor čestice opiše ugao

$$\Delta\varphi = 2L_z \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}. \quad (5.3.20)$$

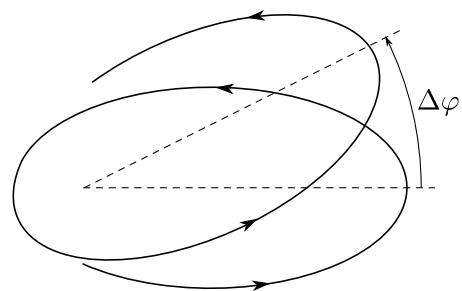
Ovo je ilustrovano na slici 5.1. Orbita čestice će biti zatvorena, ako ovaj ugao zadovoljava uslov

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{p}{q}, \quad (5.3.21)$$

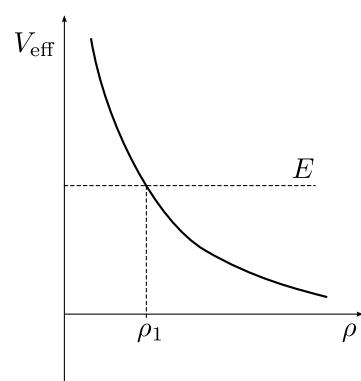
gde su  $p$  i  $q$  celi brojevi. Ako ovaj uslov nije ispunjen trajektorija nije zatvorena.

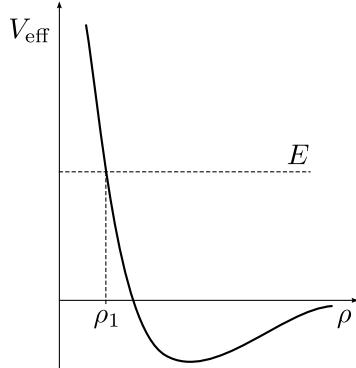
U daljoj kvalitativnoj analizi kretanja čestice u polju centralne sile uzećemo da je potencijal obrnuto proporcionalan rastojanju čestice od centra sile, tj.  $U = k/\rho$ . Kretanje čestice u ovakovom potencijalu je Keplerov problem. Razlikovaćemo dva slučaja. Prvo ćemo uzeti da je potencijal odbojan, tj.  $k > 0$ . Tada je efektivni potencijal

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{\rho} + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} \quad (5.3.22)$$

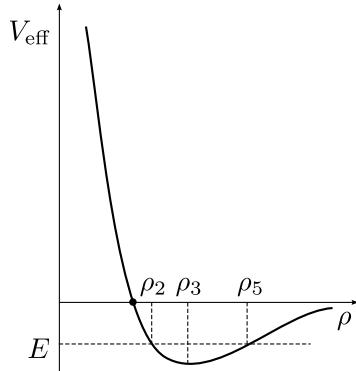


Slika 5.1: Precesija pericentra.

Slika 5.2: Efektivni potencijal za obojnu silu proporcionalnu sa  $1/r^2$ .



Slika 5.3: Efektivni potencijal za privlačnu silu proporcionalnu sa  $1/r^2$ , slučaj  $E > 0$ .



Slika 5.4: Efektivni potencijal za privlačnu silu proporcionalnu sa  $1/r^2$ , slučaj  $E < 0$ .

pozitivan i prikazan je na slici 5.2. Ako je energija čestice pozitivna,  $E > 0$ , onda vidimo da je kretanje moguće u oblasti  $\rho \geq \rho_1$ , gde je  $\rho_1$  povratna tačka. Ovakvo kretanje je infinitno. Čestica može da ode u beskonačnost, a sa druge strane može da se približi centru sile najviše do rastojanja  $\rho_1$ .

Drugi slučaj je privlačan potencijal oblika  $U = -\frac{|k|}{\rho}$ . Ukoliko je energija čestice  $E$  pozitivna, ona se kreće u oblasti  $\rho > \rho_1$  na slici 5.3. Kretanje je infinitno, jer čestica može beskonačno da se udalji od centra sile. Ukoliko je  $E = 0$  čestica takođe može da ode u beskonačnost. Ako je  $0 < E < (U_{\text{eff}})_{\min}$  čestica se kreće u ograničenoj oblasti  $\rho_2 < \rho < \rho_5$ . Sa  $(U_{\text{eff}})_{\min}$  obeležili smo minimum efektovnog potencijala. Tačke  $\rho_2$  i  $\rho_5$  su povratne tačke. Za ovakvo kretanje kažemo da je finitno ili vezano. Ako je  $E = (U_{\text{eff}})_{\min}$  onda je  $\rho = \rho_3$ . Čestica se kreće po krugu poluprečnika  $\rho_3$ . Ako je  $(U_{\text{eff}})_{\min} > E$  kretanje čestice nije moguće.

## 5.4 Keplerov problem

Keplerov problem je nalaženje jednačina kretanja čestice mase  $m$  u polju centralne sile koja je obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja

$$\mathbf{F} = \frac{k}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho , \quad (5.4.23)$$

gde je  $k$  konstanta. Ovo je vrlo važan primer centralnih sila. Njutnova sila gravitacije je primer ovakve sile. Tada je  $k = -G_N Mm$ , gde je  $M$  masa čestice koja se nalazi u koordinatnom početku, a  $G_N$  Njutnova gravitaciona konstanta. Ako je  $k = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}$  dobijamo Kulonovu silu izmedju nealektrisanja  $q$  i  $Q$ .

Bineova formula (5.1.10), za slučaj Keplerovog kretanja, postaje

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{mk}{L_z^2} . \quad (5.4.24)$$

Ako uvedemo smenu  $u = 1/\rho$ , onda prethodna diferencijalna jednačina ima oblik

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{mk}{L_z^2} . \quad (5.4.25)$$

Ovo je nehomogena diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Rešenje ove jednačine je zbir homogenog i partikularnog rešenja,  $u = u_h + u_p$ . Homogeno rešenje je

$$u_h = A \cos(\varphi + \varphi_0) , \quad (5.4.26)$$

gde su  $A$  i  $\varphi_0$  konstante. Partikularno rešenje je konstanta  $u_p = C$ , koju lako odredujemo iz same diferencijalne jednačine. Rezultat je

$$u_p = -\frac{mk}{L_z^2} . \quad (5.4.27)$$

Dakle, rešenje je

$$\frac{1}{\rho} = A \cos(\varphi + \varphi_0) - \frac{mk}{L_z^2} . \quad (5.4.28)$$

Uzećemo da je  $\varphi_0 = 0$ . Ovim izborom ugao koji odgovara minimalnom rastojanju  $\rho$  je  $\varphi = 0$ , tj.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 . \quad (5.4.29)$$

Dakle, u polarnim koordinatama jednačina trajektorije je

$$\rho = \frac{1}{A \cos \varphi - \frac{mk}{L_z^2}} . \quad (5.4.30)$$

Konstantu  $A$  izrazićemo preko energije čestice, date sa (5.2.11) i njenog momenta impulsa. Vezu izmedju  $A$  i  $E$  je najjednostavnije odrediti ako energiju izračunamo za  $\varphi = 0$ , tj.  $\dot{\rho}|_{\varphi=0} = 0$ . Odavde je

$$E = \frac{L_z^2 A^2}{2m} - \frac{mk^2}{2L_z^2}, \quad (5.4.31)$$

odnosno

$$A = \sqrt{\frac{2m}{L_z^2} \left( E + \frac{mk^2}{2L_z^2} \right)}. \quad (5.4.32)$$

Jednačina trajektorije čestice je

$$\rho = \frac{p}{-\frac{k}{|k|} + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (5.4.33)$$

gde su parametri  $p$  i  $\varepsilon$  dati sa

$$p = \frac{L_z^2}{m|k|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_z^2 E}{mk^2}}. \quad (5.4.34)$$

### Privlačan potencijal

Analizirajmo prvo slučaj privlačnog potencijala, kada je konstanta  $k$  negativna. Jednačina trajektorije (5.4.33) je

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (5.4.35)$$

U Dekartovim koordinatama ona postaje

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2. \quad (5.4.36)$$

Za  $\varepsilon = 0$ , što odgovara minimalnoj energiji čestice  $E_{\min} = -\frac{mk^2}{2L_z^2}$ , gornja jednačina postaje jednačina kruga  $x^2 + y^2 = p^2$ .

Prepostavimo sada da je  $0 < \varepsilon < 1$ , odnosno  $E_{\min} < E < 0$ . Tada jednačina (5.4.36) postaje

$$\left( x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}. \quad (5.4.37)$$

Posle jednostavnih algebarskih transformacija gornja jednačina ima standardni oblik jednačine elipse u Dekartovim koordinatama:

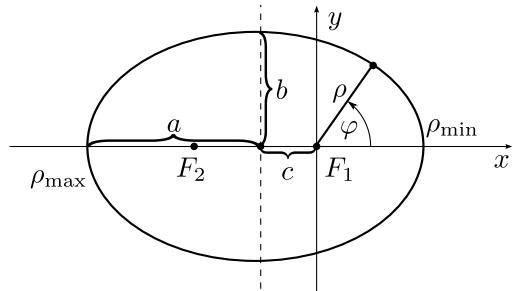
$$\frac{(x + x_c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.4.38)$$

Poluose elipse su date sa

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{k}{2E}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{L_z}{\sqrt{-2mE}}, \quad (5.4.39)$$

a  $x_c$  je dato sa

$$x_c = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}. \quad (5.4.40)$$

Slika 5.5: Trajektorija čestice za  $E_{\min} < E < 0$ .

Ekscentricitet elipse je  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ . Odmah vidimo da je  $x_c = c$ , što znači da je jedna žiža elipse u koordinatnom početku, tj. u centru sile (vidi sliku 5.5). U slučaju eliptičnog kretanja planeta našeg Sunčevog sistema, Sunce se nalazi u jednoj u žiži elipse. Ovo je tzv. prvi Keplerov zakon.

Lako se vidi da u ovom slučaju povratne tačke odgovaraju uglovima  $\varphi = 0$ , odnosno  $\varphi = \pi$  i one su  $\rho_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$ , odnosno  $\rho_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$ .

Sektorska brzina u slučaju eliptičke orbite je

$$v_s = \frac{\pi ab}{\tau} = \frac{|L_z|}{2m}, \quad (5.4.41)$$

gde je  $\tau$  period kretanja. Kvadiranjem dobijamo

$$\tau^2 = 4m^2\pi^2 \frac{a^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)L_z^2} = 4m^2\pi^2 a^3 \frac{p}{L_z^2}. \quad (5.4.42)$$

Zamenom vrednosti  $p$  u poslednji izraz konačno dobijamo

$$\tau^2 = \frac{4m\pi^2}{|k|} a^3. \quad (5.4.43)$$

Kvadrat perioda obilaska planeta oko Sunca proporcionalan je trećem stepenu velike poluose elipse. Ovo je treći Keplerov zakon.

Dalje ćemo analizirati slučaj  $\varepsilon = 1$ , tj.  $E = 0$ . Trajektorija čestice u ovom slučaju,

$$y^2 = p^2 - 2px, \quad (5.4.44)$$

je parabola prikazana na slici 5.6.

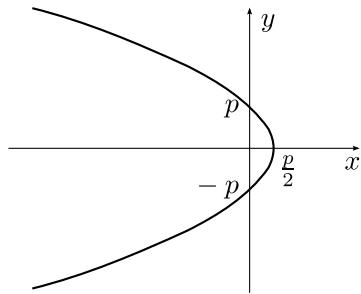
Konačno ukoliko je energija čestice pozitivna, tj. ako je  $\varepsilon > 1$  jednačina (5.4.36) postaje

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.4.45)$$

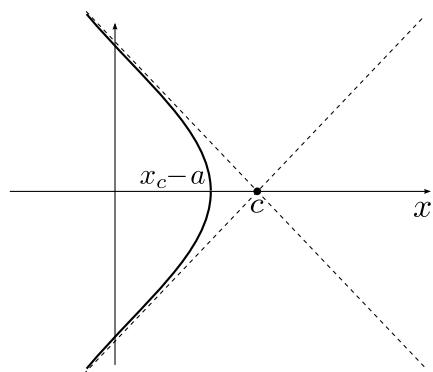
gde su

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (5.4.46)$$

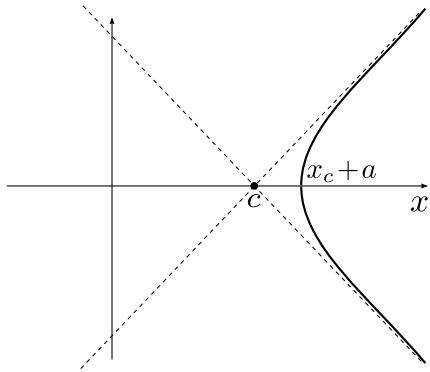
i  $x_c = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$ . Dobili smo jednačinu hiperbole. Čestica se u ovom slučaju kreće po grani hiperbole prikazanom na slici 5.7.



Slika 5.6: Čestica nulte energije kreće se po paraboli.



Slika 5.7: Trajektorija čestice pozitivne energije—hiperbola.



Slika 5.8: Trajektorija čestice u odbojnom potencijalu–hiperbola.

### Odbojan potencijal

Ukoliko je sila odbojna,  $k > 0$  jednačina trajektorije u polarnim koordinatama je

$$\rho = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (5.4.47)$$

U Dekartovim koordinatama to je jednačina hiperbole (5.4.45). Čestica se sada kreće po grani hiperbole prikazanoj na slici 5.8. Uporedite grane hiperbole po kojima se čestica kreće za privlačan i odbojan potencijal.

Rezimirajmo na kraju ovog paragrafa da trajektorija čestice u potencijalu proporcionalnom sa  $1/\rho$  može biti parabola, hiperbola, krug ili elipsa, zavisno od znaka konstante proporcionalnosti,  $k$  i vrednosti energija čestice.

## 5.5 Runge-Lencov vektor

U prethodnom poglavlju analizirali smo Keplerov problem, tj. kretanju čestice u potencijalu  $U = \frac{k}{r}$ . Videli smo da su energija i moment impulsa čestice konstante kretanja. Međutim, postoji još jedan integral kretanja, tzv. Runge-Lencov vektor. On je definisan sa

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + mk \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.5.48)$$

Sada ćemo pokazati da je ovaj vektor konstanta kretanja. U zadatku 3.4 to je bilo pokazano primenom Neterine teoreme. Diferenciranjem (5.5.48) po vremenu dobijamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + mk \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - mkr \frac{\mathbf{r}}{r^2} \\ &= km \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + mk \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - mkr \frac{\mathbf{r}}{r^2}. \end{aligned} \quad (5.5.49)$$

Razvijanjem dvostukog vektorskog prizvoda lako se vidi da je  $\dot{\mathbf{R}} = 0$ . Dakle, Runge-Lenov vektor je integral kretanja. Runge-Lencov vektor je ortogonalan na moment impulsa,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{L} = 0$ , pa leži

u ravni kretanja. Skalarni proizvod Runge-Lencovog vektora i vektora položaja čestice je

$$\mathcal{R} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) + mkr . \quad (5.5.50)$$

Kako je  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = L^2$  to imamo

$$\mathbf{r} \cdot \mathcal{R} = L^2 + mkr . \quad (5.5.51)$$

Ako ugao izmdju Runge-Lencovog vektora i vektora položaja obeležimo sa  $\varphi$ , to gornja jednačina, posle preuređenja, postaje

$$r = \frac{\frac{L^2}{m|k|}}{-\frac{k}{|k|} + \frac{\mathcal{R}}{m|k|} \cos \varphi} . \quad (5.5.52)$$

Dobili smo jednačinu trajektorije čestice iz koje vidimo da je  $\mathcal{R} = m|k|\epsilon$  odnosno

$$\mathcal{R}^2 = m^2 k^2 + 2mL^2E . \quad (5.5.53)$$

Kretanje jedne čestice odredjeno je sa tri stepena slobode. Da bismo našli konačnu jednačinu kretanja moramo znati šest integracionih konstanti (npr. početni položaj i početna brzina čestice). Kod konzervativnih sistema, zbog vremenske translacione invarijantnosti, početni trenutak je proizvoljan, pa je broj nezavisnih integrala kretanja pet<sup>1</sup>. Kod Keplerovog kretanja konstante kretanja su: energija, moment impulsa i Runge-Lencov vektor. To je ukupno sedam skalarnih veličina. Dakle, dve više nego što treba. Izmedju ovih sedam veličina postoje dve relacije. Jedna je da je projekcija Runge-Lencovog vektora na pravac momenta impulsa jednak nuli, a druga je relacija (5.5.53). Dakle, ipak imamo pet nezavisnih integrala kretanja.

## 5.6 Problem dva tela

U ovom poglavlju razmatraćemo kretanje dve izolovane čestice masa  $m_1$  i  $m_2$ , koje medjusobno interaguju centralnom silom. Potencijalna energija je funkcija rastojanja izmedju čestica  $U = U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ . Sila koja deluje na prvu česticu je  $\mathbf{F}_{21} = -\nabla_1 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ , dok je sila koja deluje na drugu česticu  $\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ .

Lagranđijan ovog dvočestičnog sistema je

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) . \quad (5.6.54)$$

Sa promenljivih  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  prećićemo na nove promenljive, date sa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} , \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 . \end{aligned} \quad (5.6.55)$$

---

<sup>1</sup>Generalno, za zatvoren sistem sa  $n$  stepeni slobode postoji  $2n$  intervala kretanja; ukoliko je sistem konzervativan taj broj je  $2n - 1$ .

$\mathbf{r}_c$  je radijus vektor centra mase, a  $\mathbf{r}$  relativan radijus vektor jedne čestice u odnosu na drugu. Invertovanjem gornjih jednačina sledi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_c - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_c + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.\end{aligned}\quad (5.6.56)$$

Nakon smene promenljivih lagranžijan je

$$L = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{r}}_c^2}{2} + \frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(|\mathbf{r}|), \quad (5.6.57)$$

gde je

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

redukovana masa.

U novim promenljivim lagranžijan je zbir dva nezavisna lagranžijana. Prvi sadrži samo koordinate centra mase, a drugi varijable  $\mathbf{r}$  i  $\dot{\mathbf{r}}$ . Radijus vektor centra mase je ciklična koordinata, pa je  $\dot{\mathbf{r}}_c$  konstanta kretanja. Jednačine kretanja u novim promenljivim su

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_c} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= 0,\end{aligned}\quad (5.6.58)$$

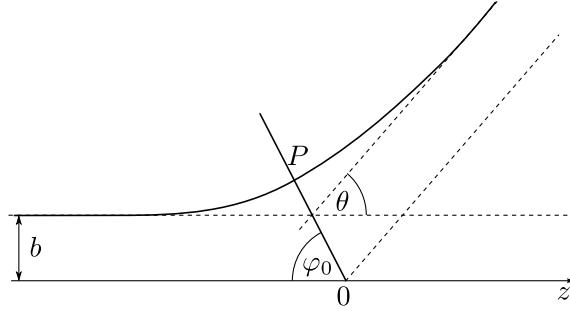
odnosno

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{r}}_c &= 0 \\ \mu\ddot{\mathbf{r}} &= -\nabla U(r).\end{aligned}\quad (5.6.59)$$

Razdvajanje promenljivih vidimo i na nivou jednačina kretanja. U jednoj jednačini figuriše centar mase čestica, a u drugoj relativni radijus vektor. Čestica mase  $\mu$  je fiktivna, tzv. relativna čestica. Iz prve jednačine vidimo da se centar mase kreće konstantnom brzinom ili miruje, a druga da se relativna čestica kreće pod dejstvom sile  $-\nabla U(r)$ . Ako predjemo u sistem centra mase problem dva tela sveli smo na kretanje jedne fiktivne tzv. relativne čestice.

Pri kretanju Zemlje oko Sunca možemo zanemariti uticaj drugih tela. U sistemu centra mase kretanje je ekvivalentno kretanju relativne čestice. Konstanta  $k$  u ovom slučaju je  $k = G_N m M$ , gde smo sa  $m$  obeležili masu Zemlje, a sa  $M$  masu Sunca. U trećem Keplerovom zakonu potrebno je da  $m$  zamenimo sa  $\mu$ . Tako dobijamo

$$\tau^2 = \frac{4m\pi^2}{G_N(m+M)} a^3. \quad (5.6.60)$$

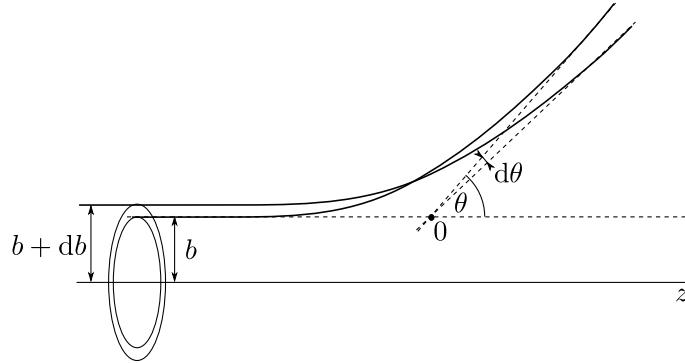
Slika 5.9: Trajektorija čestice u odbojnom potencijalu  $U(r)$ .

## 5.7 Rasejanje čestica na centralno simetričnom potencijalu

Razmatraćemo kretanje čestica u sferno-simetričnom potencijalu  $U(r)$ , koji na velikim rastojanjima od centra sile teži nuli, tj.  $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Uzećemo da čestice dolaze iz beskonačnosti. Zavisno od vrednosti energije i momenta impulsa one mogu da budu rasejane ili zahvaćene. Ukoliko je minimalno rastojanje do kojeg čestice mogu da se približe centru sile različito od nule, čestica se rasejava na potencijalu. Ona naime dolazi iz beskonačnosti, približava se centru do minimalnog rastojanja i zatim nastavlja da se udaljava. Za odbojnu Keplerovu silu trajektorija čestice ima dve asymptote, kao što se vidi sa slike 5.9. Ugao između ove dve asymptote,  $\theta$  zvaćemo uglom rasejanja. Promena pravca kretanja čestice je rasejanje čestice. Ako čestica može da dodje do centra sile govorimo o zahvatu. Mi ćemo analizirati samo rasejanje čestica. Rasejanja se intenzivno koriste u skoro svim granama fizike, jer pružaju značajnu informaciju o sistemima na kojima se vrši rasejanje. U atomskoj, nuklearnoj fizici kao i u fizici čestica, čestice mete se bombarduju projektilima i na osnovu njihovog rasejanja dolazimo do informacija o strukturi mete. U spektroskopiji analizira se rasejanje elektromagnetskih talasa poznatih karakteristika na meti koja se ispituje.

Neka je brzina čestice na velikom rastojanju od centra sile jednaka  $v_0$ . Rastojanje između pravca brzine čestice  $\mathbf{v}_0$  i  $z$ -ose je  $b$ , tzv. parametar sudara. Energija čestice  $E = mv_0^2/2$  i njen moment impulsa  $L = mv_0 b$  su konstante kretanja. Trajektorija čestice je simetrična u odnosu na pravac  $OP$ , slika 5.9. Ovaj pravac je pravac  $x$ -ose koordinatnog sistema u kojem smo u jednom od prethodnih poglavlja analizirali kretanje čestice u centralnom potencijalu. Ugao između asymptota i pravca  $OP$  obeležimo sa  $\varphi_0$ , što je maksimalna vrednost azimutalnog ugla. Na slici 5.9 prikazan je slučaj rasejanja u slučaju odbojnog potencijala. Vidimo da je  $2\varphi_0 + \theta = \pi$ . U slučaju privlačnog potencijala bilo bi  $2\varphi_0 - \theta = \pi$ , tako da generalno važi  $\theta = |\pi - 2\varphi_0|$ . Uglu  $\varphi_0$  odgovara beskonačna udaljenost čestice od centra sile, pa primenom (5.2.19) dobijamo

$$\varphi_0 = mv_0 b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{mv_0^2 b^2}{2r^2}}} . \quad (5.7.61)$$



Slika 5.10: Geometrija rasejanja za odbojan potencija.

Ugao rasejanja onda je dat sa

$$\theta = \left| \pi - 2mv_0 b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{mv_0^2 b^2}{2r^2}}} \right|. \quad (5.7.62)$$

Dakle, za česticu koja dolazi iz beskonačnosti sa datom brzinom, ugao skretanja je kompletno određen parametrom sudara. Neka sada umesto jedne čestice imamo monoenergetski snop čestica. Čestice u snopu će se rasejavati u funkciji parametra sudara. Broj čestica koji u jedinici vremena prodje kroz površ normalnu na pravac kretanja čestica je fluks, odnosno intenzitet snopa. Ako obračunamo ovaj fluks po jedinici površine, onda se ova veličina naziva gustinom fluksa. Dakle, gustina fluksa,  $n_0$  snopa je broj čestica snopa koje u jedinici vremena prodju kroz jediničnu površinu normalnu na pravac kretanja čestica. Broj čestica u jedinici vremena koje se raseju u pravcu orta  $\mathbf{n}$  u prostorni ugao  $d\Omega$  obeležićemo sa  $dn$ . Podrazumeva se da daleko od centra sile imamo detektor koji broji ove čestice. Diferencijalni efikasni presek je količnik broja rasejanih čestica u prostorni ugao  $d\Omega$  u jedinici vremena i gustine fluksa upadnih čestica, tj.

$$d\sigma = \frac{dn}{n_0}. \quad (5.7.63)$$

Kako je trajektorija čestica jednoznačno određena, znamo da će se čestice u prstenu sa slike 5.10 izmedju  $b$  i  $b + db$  upadnog snopa rasejati u segmentu  $(\theta, \theta + d\theta)$ . Broj rasejanih čestica u jedinici vremena je onda  $dn = n_0 2\pi b db$ . Prema tome, presek za rasejanje je

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi b db \frac{d\Omega}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\Omega. \quad (5.7.64)$$

Prostori ugao je određen sa  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Kako zbog geometrije problema ništa ne zavisi od azimutalnog ugla  $\varphi$ , po njemu ćemo integraliti, pa je  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ .

Prema tome, dobili smo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (5.7.65)$$

Funkcija  $b = b(\theta)$  je opadajuća, pa da bi presek za rasejanje bio pozitivan stavili smo apsolutnu vrednost u prethodnoj formuli. Integracijom diferencijalnog preseka po svim pravcima dobijamo totalni presek za rasejanje

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega . \quad (5.7.66)$$

Presek za rasejanje ima dimenzije površine.

### Raderfordovo rasejanje

Važan primer rasejanja na potencijalu je rasejanje na Kulonovom potencijalu, poznatom kao Raderfordovo rasejanje. Ernest Raderford je alfa česticama bombardovao tanke listiće zlata i na osnovu tih rezultata došao je do zaključaka o strukuri atoma. Interakcija izmedju alfa čestica i jezgra atoma je Kulonova.

Neka je nanelektrisanje projektila  $q$ , dok je nanelektrisanje mete, koja je nepokretna i nalazi se u centru,  $Q$ . Potencijal je oblika  $U = k/r$ , gde je  $k = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$ . Jednačina trajektorije nanelektrisanja  $q$  je

$$r = \frac{p}{-\frac{k}{|k|} + \epsilon \cos \varphi} , \quad (5.7.67)$$

iz koje vidimo da je

$$\cos \varphi_0 = \frac{k}{|k|\epsilon} . \quad (5.7.68)$$

Koristeći vezu izmedju ugla rasejanja i  $\varphi_0$  dobijamo

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon} . \quad (5.7.69)$$

Iz ove formule sledi

$$\cot^2 \frac{\theta}{2} = \epsilon^2 - 1 = \frac{m^2 v_0^4 b^2}{k^2} , \quad (5.7.70)$$

odakle je

$$b = \left| \frac{k}{mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \right| . \quad (5.7.71)$$

Primenom (5.7.65) dobijamo efikasni presek za rasejanje

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{k}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} , \quad (5.7.72)$$

koji je poznat kao Raderfordov presek. Totalni presek za rasejanje koji se dobija integracijom gornjeg izraza je divergentan. Razlog za ovu beskonačnost totalnog preseka je činjenica da je Kulonova interakcija dugodometna.

## 5.8 Zadaci

**5.1.** Čestica mase  $m$  pod dejstvom centralne sile kreće se po spirali  $\rho = k\varphi^2$ , gde je  $k$  konstanta. Naći silu koja deluje na česticu.

**5.2.** Brzina čestice koja se kreće u centralnom polju je  $v = k/\rho^3$ , gde je  $k$  konstanta. Ako je angularni moment čestice  $L_z$  odrediti trajektoriju i naći silu koja deluje na česticu.

**5.3.** Čestica se kreće po kružnici koja prolazi kroz tačku koja je centar sile. Pokazati da je sila koja deluje na česticu obrnuto proporcionalna petom stepenu rastojanja od centra sile.

**5.4.** Čestica se kreće u potencijalu

$$U = \frac{k}{\rho} + \frac{C}{\rho^3},$$

gde su  $k$  i  $C$  konstante. Pokazati da će se čestica kretati po stabilnoj kružnoj orbiti  $\rho = \rho_0$  ako je ispunjen uslov  $C > \frac{k\rho_0^2}{3}$ .

**5.5.** Čestica mase  $m$  kreće se u centralnom potencijalu

- (a)  $U = \frac{1}{2}kr^2$ ,
- (b)  $U = -\frac{k}{r^2}$ ,
- (c)  $U = -\frac{k}{r^4}$ ,
- (d)  $U = -k\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ ,

gde su  $k$  i  $\alpha > 0$  konstante. Za svaki od ovih potencijala skicirati efektivni potencijal i analizirati moguće orbite.

**5.6.** Čestica mase  $m$  kreće se u centralnom potencijalu  $U = U_0 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$ , gde su  $U_0$  i  $a$  pozitivne konstante. Moment impulsa čestice je  $L$ .

- (a) Skicirati efektivni potencijal.
- (b) Naći poluprečnik kružne orbite,  $\rho_0$ . Da li je ova orbita stabilna?
- (c) Prepostaviti da se čestica kreće po trajektoriji koja malo odstupa od kružnice, tj. da je  $\rho(t) = \rho_0 + \eta(t)$ . Naći diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava  $\eta(t)$ . Pokazati da je period radijalnog kretanja čestice

$$T_r = \frac{\sqrt{2}\pi L}{U_0}.$$

- (d) Pokazati da pericentar precesira za ugao  $(2 - \sqrt{2})\pi$  po jednom krugu.

**5.7.** Čestica mase  $m$  kreće se u potencijalu

$$U = -\frac{k}{\rho} + \frac{h}{\rho^2},$$

gde su  $k$  i  $h$  pozitivne konstante.

- (a) Pokazati da je trajektorija čestice

$$\rho = \frac{1 + e \cos(\alpha\phi)}{a(1 - e^2)},$$

gde konstante  $a$ ,  $e$  i  $\alpha$  treba odrediti.

- (b) Odrediti period precesije velike poluose elipse.

**5.8.** Odrediti presek za rasejanje čestice na potencijalu

$$U = \begin{cases} -U_0, & \text{za } \rho < R \\ 0, & \text{za } \rho > R \end{cases},$$

gde je  $U_0$  pozitivna konstanta.

**5.9.** Čestica se kreće u odbojnom potencijalu  $V = k/r^2$ . Masa čestice je  $m$ , a energija i moment impulsa su  $E$ , odnosno  $L_z$ .

- (a) Pokazati da je trajektorija čestica

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\alpha\rho)},$$

gde konstante  $\rho_0$  i  $\alpha$  treba odrediti.

- (b) Pokazati da je veza izmedju parametra sudara i ugla rasejanja data sa

$$b^2 = \frac{k(\pi - \theta)^2}{E\theta(2\pi - \theta)}.$$

- (c) Pokazati da je presek za rasejanje na potencijalu  $V = k/r^2$ , gde je  $k$  pozitivna konstanta, dat sa

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi^2 k}{E} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2 \sin \theta}.$$

# Glava 6

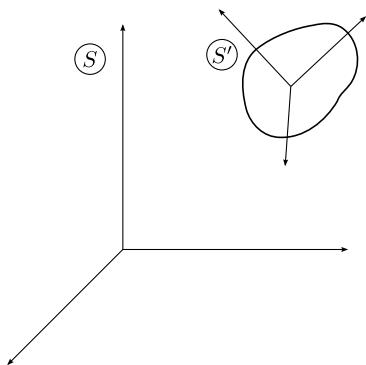
## Kretanje krutog tela

Ova glava je posvećena kretanju krutog tela. Analizirana je prvo kinematika, a zatim dinamika ovog kretanja. Dinamičke jednačine kretanja krutog tela su prvo izvedene u okviru Njutnovog, odnosno vektorskog metoda. Zatim su jednačine kretanja krutog tela dobijene Lagranževom tehnikom.

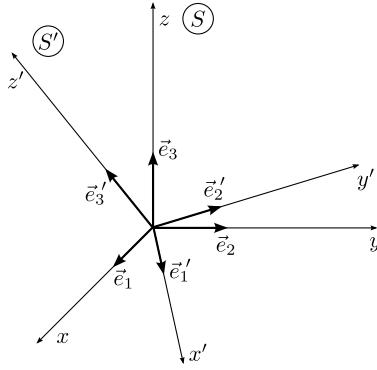
### 6.1 Definicija krutog tela

Apsolutno kruto telo (ili kraće: kruto telo) je telo kod koga se rastojanje izmedju bilo koje dve tačke ne menja. Skup konačno mnogo čestica na stalnom medjusobnom rastojanju je primer krutog tela. Neprekodno rasporedjena masa u nekoj zapremini kod koje je ispunjen uslov ne-promenljivosti rastojanja izmedju bilo koje dve tačke je takodje kruto telo. Prema tome, kruto telo može biti diskretan ili kontinualan sistem. Kruto telo je idealizacija, jer su sva tela u prirodi deformabilna.

Položaj krutog tela je potpuno određen sa tri tačke krutog tela:  $A$ ,  $B$  i  $C$  koje ne leže na jednoj pravoj. Dekartove koordinate te tri tačke su  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  i  $C(x_3, y_3, z_3)$ .



Slika 6.1: Laboratorijski i sopstveni sistem krutog tela.



Slika 6.2: Dva koordinatna sistema sa zajedničkim polom.

Nepromenljivost rastojanja izmedju njih daje tri jednačine veze:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= AB^2, \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 &= AC^2, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 &= BC^2. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Kruto telo je odredjeno sa  $3 \cdot 3 - 3 = 6$  stepeni slobode. Naravno, broj stepeni slobode krutog tela može biti i manji ukoliko je kretanje ograničeno dopunskim vezama. Npr. kruto telo koje rotira oko fiksne ose ima samo jedan stepen slobode.

Za kruto telo vezaćemo koordinatni sistem  $S'$ , tzv. sopstveni sistem, slika 6.1. Koordinatni početak tog sistema je pol i on može biti proizvoljno izabran. Kretanje krutog tela u inercijalnom sistemu  $S$  ekvivalentno je kretanju saopstvenog sistema krutog tela.

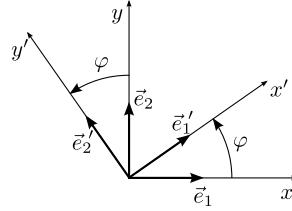
## 6.2 Rotacije

Neka su  $S$  i  $S'$  dva koordinatna sistema čiji se koordinatni počeci poklapaju. Transformacija koja jedan sistem prevodi u drugi je rotacija. Ovaj iskaz je poznat pod nazivom Ojlerova teorema. Uvešćemo dva skupa bazisnih vektora. Vektori  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  i  $\mathbf{e}_3$  su usmereni duž  $x$ ,  $y$  odnosno  $z$  ose sistema  $S$ , dok su ortovi primovanog sistema  $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$  i  $\mathbf{e}'_3$  usmereni duž Dekartovih osa  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$ , što je predstavljeno na slici 6.2. Primovane ortove možemo razviti po bazisu  $\{\mathbf{e}_i\}$  sistema  $S$ :

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (6.2.2)$$

gde su  $R_{ij}$  koeficijenti koji čine jednu  $3 \times 3$  realnu matricu

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}.$$

Slika 6.3: Rotacija za ugao  $\varphi$  oko  $z$ -ose.

Bazisni vektori su ortonormirani, tj.  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  i  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ . Množenjem (6.2.2) skalarno sa  $\mathbf{e}_k$  dobijamo

$$R_{ik} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i = \cos \angle(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}'_i), \quad (6.2.3)$$

pa se koeficijenti  $R_{ik}$  nazivaju i kosinusima pravaca. Primenom relacija ortonormiranosti i (6.2.2) imamo

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{il} R_{jk} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 R_{il} R_{jk} \delta_{lk} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^3 R_{ik} (R^T)_{kj} \\ &= (RR^T)_{ij}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Vidimo da matrica  $R$  nije proizvoljna realna  $3 \times 3$  matrica, već mora da zadovoljava uslov

$$RR^T = R^T R = I. \quad (6.2.5)$$

Ovakve matrice se nazivaju ortogonalnim matricama. One čine grupu koja se obeležava sa  $O(3)$ . Definicija grupe je data u Dodatku B.

Uzimanjem determinante od (6.2.5) dobijamo da determinanta matrice  $R$  može biti ili 1 ili  $-1$ . Transformacije (6.2.5) za koje je  $\det R = 1$  su rotacije. One čine podgrupu specijalnih (S) ortogonalnih matrica (O) matrica ortogonalne grupe. Ova podgrupa se obeležava sa  $SO(3)$ . Slovo  $S$  u prethodnoj oznaci označava da je determinanta ovih matrica 1. Proizvoljna realna  $3 \times 3$  matrica ima devet koeficijenata. Ortogonalnost matrice  $R$  (6.2.5) nameće šest uslova na ovih devet koeficijenata, pa su samo tri koeficijenta nezavisna. Rotacije su odredjene sa tri parametra.

Razmatrimo jednostavan primer. Neka je sistem  $S'$  dobijen rotacijom sistema  $S$  oko  $\mathbf{e}_3$  ose za ugao  $\varphi$ . Sa slike 6.3 je jasno da je

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

pa je matrica  $R$  u ovom slučaju

$$R_{\mathbf{e}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (6.2.7)$$

Lako se vidi da je ovo ortogonalna matrica jedinične determinante, dakle rotacija.

Proizvoljan vektor položaja  $\mathbf{r}$  može biti razložen bilo u sistemu  $S$  bilo u sistemu  $S'$

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i . \quad (6.2.8)$$

Dekartove projekcije vektora  $\mathbf{r}$  u sistemu  $S$  su  $x_1, x_2, x_3$ , a u primovanom sistemu su  $x'_1, x'_2, x'_3$ . Vektor  $\mathbf{r}$  je nepromjenjen. Promenom bazisa, tj. prelaskom iz jednog u drugi sistem, projekcije vektora se menjaju. Ovakva interpretacija transformacije je pasivna. Sada ćemo lako naći zakon promene koordinata. Zamenom (6.2.2) u (6.2.8) dobijamo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x'_i R_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j , \quad (6.2.9)$$

odakle sledi

$$\sum_{i=1}^3 x'_i R_{ij} = x_j . \quad (6.2.10)$$

Množenjem prethodne relacije sa  $R_{jk}^{-1}$  i sumiranjem po  $j$  dobijamo

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 ((R^T)^{-1})_{ij} x_j , \quad (6.2.11)$$

što zbog uslova ortogonalnosti matrice  $R$  postaje

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j . \quad (6.2.12)$$

Dakle, koordinate se pri rotacijama transformišu na isti način kao i bazisni vektori.

Dužina vektora  $\mathbf{r}$  je ista u oba sistema, tj.

$$\sum_{i=1}^3 (x'_i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i)^2 . \quad (6.2.13)$$

Uslov ortogonalnosti matrice  $R$  izveli smo iz uslova ortonormiranosti bazisa. Medjutim možemo ga dobiti iz uslova da je dužina vektora ista u oba sistema, tj. iz relacije (6.2.13). Rotacije su linearne transformacije koordinata

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j , \quad (6.2.14)$$

za koje važi uslov (6.2.13). Uslov (6.2.13) možemo prepisati u matričnom obliku kao

$$\mathbf{r}_S^T \mathbf{r}_S = \mathbf{r}_{S'}^T \mathbf{r}_{S'} , \quad (6.2.15)$$

gde je

$$\mathbf{r}_S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.2.16)$$

vektor  $\mathbf{r}$  u sistemu  $S$ , a

$$\mathbf{r}_{S'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (6.2.17)$$

isti vektor u sistemu  $S'$ . Veza izmedju koordinata (6.2.14) je

$$\mathbf{r}_{S'} = R\mathbf{r}_S . \quad (6.2.18)$$

Transformišući desnu stranu izraza (6.2.15) dobijamo

$$\mathbf{r}_{S'}^T \mathbf{r}_{S'} = \mathbf{r}_S^T R^T R \mathbf{r}_S = \mathbf{r}_S^T \mathbf{r}_S , \quad (6.2.19)$$

odakle sledi uslov ortogonalnosti

$$R^T R = I . \quad (6.2.20)$$

U slučaju rotacije oko  $z$  ose za ugao  $\varphi$  imamo

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

U prethodnom izrazu primovane i neprimovane  $x$ -koordinate su koordinate vektora  $\mathbf{r}$  u dva sistema.

Transformacija

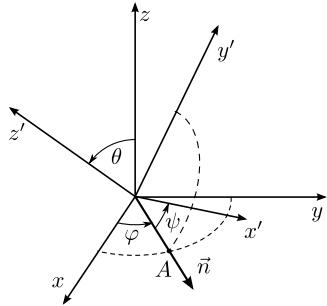
$$I_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zadovoljava uslov ortogonalnosti (6.2.2), ali njena determinanta je  $-1$ . Ona na koordinate deluje prema

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3 . \quad (6.2.21)$$

Transformacija  $I_p$  nije rotacija, već inverzija prostora. Kao što smo ranije rekli ortogonalne matrice jedinične determinante su rotacije. Ortogonalne transformacije čija determinanta je  $-1$  sadrže inverziju prostora.

Do sada smo rotacije razmatrali kao pasivne transformacije. Vektor položaja je fiksiran; koordinatni sistem smo rotirali i zbog toga su se komponente vektora menjale. Potpuno je



Slika 6.4: Ojlerovi uglovi

ekvivalentno da koordinatni sistem držimo fiksnim, a da rotacija deluje na vektor transformišući ga u primovani vektor

$$\mathbf{r}' = \mathcal{R}\mathbf{r} . \quad (6.2.22)$$

Ovo je tzv. aktivna transformacija. Jasno je da je rotacija koordinatnog sistema oko neke ose za ugao  $\varphi$  (pasivna rotacija) odgovara rotaciji vektora oko iste ose za ugao  $-\varphi$  u fiksnom koordinatnom sistemu (aktivna rotacija). Aktivne rotacije česticu 'pomere' iz jednog položaja u drugi, one aktivno deluju na objekte.

### Parametrizovanje matrice rotacije. Ojlerovi uglovi

Proizvoljnu rotaciju  $R_{\mathbf{n}}(\varphi)$  možemo zadati: uglom rotacije  $\varphi$  i osom oko koje telo rotira. Osa rotacije je definisana ortom  $\mathbf{n}$ , čiji je pravac duž ose rotacije, a smer ovog vektora se određuje pravilom desne ruke. Ort je određen sa dva parametra, pa je ukupan broj parametara potrebnih da jednoznačno definišemo rotaciju tri. Međutim, češće se za parametre rotacije uzimaju Ojlerovi uglovi  $\psi, \theta, \varphi$ . Na slici 6.4 su nacrtana dva sistema  $S$  i  $S'$ , koji imaju zajednički koordinatni početak.

Presek ravni  $xOy$  i  $x'Oy'$  je linija  $OA$ , koja se naziva čvornom linijom. Da bismo sistem  $S$  preveli u sistem  $S'$  treba da izvršimo sledeće tri sukcesivne rotacije:

- Rotacija oko orta  $\mathbf{e}_3$  za ugao  $\varphi$ . Nakon ove rotacije  $x$  osa će se poklopiti sa čvornom linijom. Matrica ove rotacije je

$$R_{\mathbf{e}_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Rotacija oko orta  $\mathbf{n}$  za ugao  $\theta$ . Ova transformacija je

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

- Rotacija oko  $\mathbf{e}'_3$  za ugao  $\psi$ . Matrica ove rotacije je

$$R_{\mathbf{e}'_3}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dakle rotacija koja sistem  $S$  transformiše u  $S'$  je

$$R(\theta, \varphi, \psi) = R_{\mathbf{e}'_3}(\psi)R_{\mathbf{n}}(\theta)R_{\mathbf{e}_3}(\varphi) . \quad (6.2.23)$$

Posle dužeg, ali pravolinijskog računa, dobijamo

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} . \quad (6.2.24)$$

## 6.3 Tenzori u euklidskom prostoru

Tenzori su veličine koje se transformišu po nekom pravilu u odnosu na transformacijama. Za tenzore u euklidskom prostoru te transformacije su rotacije. Tenzori različitog tipa se razlikuju po pravilu po kome se transformišu pri rotacijama. Rotacija koordinatnog sistema je ortogonalna transformacija jedinične determinante koja povezuje bazisne Dekartove ortove prema (6.2.2). Neka je  $F = F(x_1, x_2, x_3)$  funkcija tri Dekartove koordinate. Nakon rotacije koordinatnog sistema ova veličina u drugom sistemu je  $F' = F'(x'_1, x'_2, x'_3)$ . Ako se ova veličina ne menja pri rotacijama, tj.

$$F'(x') = F(x) , \quad (6.3.25)$$

onda je ona skalar ili invariјanta. U prethodnoj formuli sa  $x$  smo obeležili sve tri Dekartove koordinate, a sa  $x'$  odgovarajuće primovane Dekartove koordinate.

Vektorsko polje, ili kraće vektor,  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$  je takođe definisano prema načinu na koji se menja pri rotacijama. Dekartove projekcije vektora pri rotaciji se menjaju prema

$$V'_i(x') = \sum_{j=1}^3 R_{ij} V_j(x) , \quad (6.3.26)$$

gde su  $V_i$ , odnosno  $V'_i$ , projekcije vektora na ose sistema  $S$ , odnosno  $S'$ . To je definicija vektora. Vektor je tenzor sa jednim indeksom. Na isti ovaj način se transformišu Dekartove koordinate radijus vektora, što se vidi iz (6.2.12). Tenzor drugog reda  $T_{ij}(x)$  ima dva indeksa i on je tenzor ako se pri rotacijama transformiše po sledećem pravilu

$$T'_{ij}(x') = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_{ik} R_{jl} T_{kl}(x) . \quad (6.3.27)$$

Uskoro ćemo uvesti tenzor inercije i pokazati da je on stvarno tenzor drugog reda. Tenzori višeg reda definišu se analogno.

## 6.4 Šalova teorema

Kretanje krutog tela može biti predstavljeno kao kombinacija jedne translacije i jedne rotacije. Ovo je tzv. Šalova teorema. Ovo ne znači da se kruto telo stvarno kreće tako da se prvo translira za vektor  $\mathbf{a}$ , a zatim rotira oko ose  $\mathbf{n}$  za odgovarajući ugao, već da se njegov krajnji položaj iz početnog dobija jednom translacijom i jednom rotacijom.

## 6.5 Koriolisova teorema

Uzećemo da je  $S$  nepokretni sistem, a  $S'$  sistem koji rotira i neka se polovi oba sistema poklapaju. Dekartova baza sistema  $S$  je  $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3\}$ , a sistema  $S'$  je  $\{\mathbf{e}'_i, i = 1, 2, 3\}$ . Neka je  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  vektorska funkcija koja zavisi od vremena. Vektor  $\mathbf{A}$  možemo razložiti po bazi sistema  $S$ , kao i sistema  $S'$ :

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^3 A_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 A'_i(t) \mathbf{e}'_i , \quad (6.5.28)$$

gde su  $A_i(t)$ , odnosno  $A'_i(t)$  koordinate vektora  $\mathbf{A}$  u bazi  $S$ , odnosno  $S'$ . Vremenski izvod vektora  $\mathbf{A}$  u sistemu  $S'$  je

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{S'} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i . \quad (6.5.29)$$

Diferenciranjem vektora u  $\mathbf{A}$  u sistemu  $S$  dobijamo

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_S = \sum_{i=1}^3 \frac{dA'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \sum_{i=1}^3 A'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \Big|_S . \quad (6.5.30)$$

Iz izraza (3.2.9), dobijamo infinitezimalnu promenu vektora  $\mathbf{e}'_i$ :

$$d\mathbf{e}'_i = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}'_i , \quad (6.5.31)$$

gde je  $d\boldsymbol{\varphi}$  infinitezimalno mali ugao rotacije. Iz gornje formule dobijamo

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \Big|_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i , \quad (6.5.32)$$

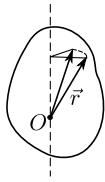
gde je

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \quad (6.5.33)$$

ugaona brzina rotacije sistema  $S'$ . Prema tome, dobijamo

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_S = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} . \quad (6.5.34)$$

Dobijeni rezultat je poznat kao Koriolisova teorema. Ona povezuje vremenski izvod vektora u rotirajućem i nepokretnom sistemu.



Slika 6.5: Infinitezimalna rotacija krutog tela.

## 6.6 Ugaona brzina krutog tela

Neka kruto telo za vreme  $dt$  rotira za infinitezimalno mali ugao  $d\varphi$  oko ose odredjene ortom  $\mathbf{n}$ , slika 6.5. Ova osa je tzv. trenutna osa rotacije. Smer orta  $\mathbf{n}$  određuje se na osnovu pravila desne ruke. Vektor položaja  $\mathbf{r}(t)$  proizvoljne tačka krutog tela za vreme  $dt$  predje u  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . Jasno je da je  $d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$ , gde je  $d\varphi = d\varphi \mathbf{n}$  infinitezimalni ugao rotacije. Ako izraz za  $d\mathbf{r}$  podelimo sa  $dt$  dobijamo

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (6.6.35)$$

Veličina

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.6.36)$$

je ugaona brzina rotacije krutog tela. Rezultat (6.6.35) se može dobiti i direktnom primenom Korioloisove teoreme:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_s = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{s'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (6.6.37)$$

Izvod vektora  $\mathbf{r}$  po vremenu u sistemu krutog tela je nula.

U prethodnoj analizi infinitezimalne rotacije razmatrali smo kao aktivne transformacije, jer vektor  $\mathbf{r}$  prelazi u  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . Infinitezimalne rotacije opisuju vektorom rotacije,  $d\varphi$ . Pri rotaciji za mali ugao  $d\varphi_1$ , radijus vektor  $\mathbf{r}$  prelazi u

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\varphi_1 \times \mathbf{r} . \quad (6.6.38)$$

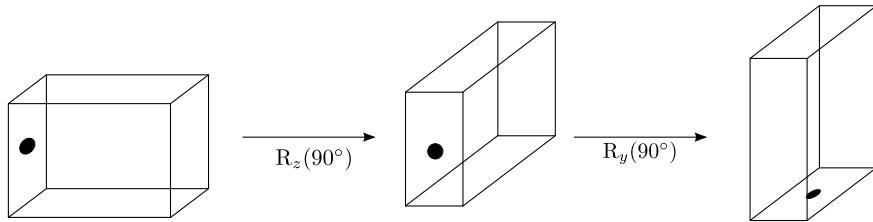
Ako sada izvršimo drugu rotaciju za infinitezimalni ugao  $d\varphi_2$ , onda po istom pravilu, vektor  $\mathbf{r}_1$  prelazi u

$$\mathbf{r}_1 + d\varphi_2 \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\varphi_1 \times \mathbf{r} + d\varphi_2 \times (\mathbf{r} + d\varphi_1 \times \mathbf{r}) . \quad (6.6.39)$$

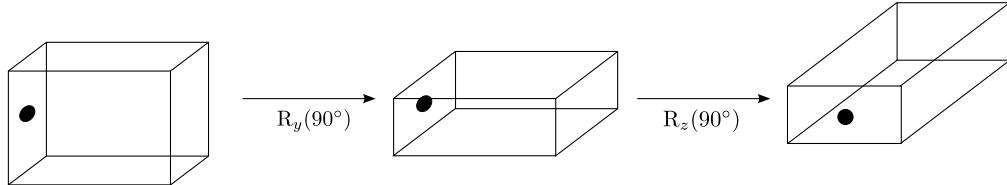
Zadržavajući samo infinitezimalno male članove prvog reda, dve sucesivne infinitezimalne rotacije vektor  $\mathbf{r}$  prevode u vektor

$$\mathbf{r} + (d\varphi_1 + d\varphi_2) \times \mathbf{r} . \quad (6.6.40)$$

Dakle, ukupni efekat dve infinitezimalne rotacije  $d\varphi_1$  i  $d\varphi_2$  je kao da smo napravili rotaciju za ugao  $d\varphi_1 + d\varphi_2$ . Pored toga infinitezimalne rotacije komutiraju. Ako neko telo rotiramo oko ose  $\mathbf{n}$  za ugao  $\pi/3$  ovu rotaciju ne možemo opisati vektorom  $\pi\mathbf{n}/3$ . Konačne rotacije opisuju matricama, a ne vektorima. Množenje matrica, za razliku od sabiranja vektora, je nekomutativno. Ako kutiju rotiramo oko  $z$  ose za  $90^\circ$ , a zatim oko  $y$  ose ponovo za  $90^\circ$  kutija će peći u položaj prikazan na slici 6.6. Ukoliko sada prvo rotiramo oko  $y$  za  $90^\circ$ , a potom oko  $z$  ose ponovo za  $90^\circ$  kutija prelazi u položaj prikazan na slici 6.7. Vidimo da krajnji položaji kutije u ova dva slučaja nisu isti. Ovaj primer jasno pokazuje da konačne rotacije ne komutiraju.



Slika 6.6:



Slika 6.7:

## 6.7 Ugaona brzina i matrica rotacije

U prethodnom poglavlju ugaonu brzinu krutog tela smo dobili razmatranjem infinitezimalnih rotacija. U ovom poglavlju ugaonu brzinu ćemo odrediti iz matrice rotacije.

Neka je  $S$  nepokretan laboratorijski sistem i neka sistem  $S'$  rotira. Koordinatni počeci ova dva sistema se poklapaju. Kao što smo rekli, bazisni vektori sistema  $S'$  su linearne kombinacije neprimovanih ortova

$$\mathbf{e}'_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(t) \mathbf{e}_j . \quad (6.7.41)$$

Diferenciranjem po vremenu gornje jednačine imamo

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^3 \dot{R}_{ij}(t) \mathbf{e}_j . \quad (6.7.42)$$

Kako je

$$\mathbf{e}_j = \sum_{m=1}^3 (R^T)_{jm}(t) \mathbf{e}'_m , \quad (6.7.43)$$

to dobijamo

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \dot{R}_{ij}(R^T)_{jm} \mathbf{e}'_m , \quad (6.7.44)$$

odnosno

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \sum_{m=1}^3 (\dot{R}R^T)_{im} \mathbf{e}'_m . \quad (6.7.45)$$

Uvedimo matricu  $\Omega(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$ . Diferenciranjem jednakosti  $RR^T = I$  po vremenu dobijamo

$$\dot{R}(t)R^T(t) = -R(t)\dot{R}^T(t) . \quad (6.7.46)$$

Dalje je

$$\dot{R}R^T = -R\dot{R}^T = -(\dot{R}R^T)^T , \quad (6.7.47)$$

odakle zaključujemo da je matrica  $\Omega$  antisimetrična,  $\Omega^T = -\Omega$ . Dijagonalni elementi antisimetrične matrice su jednaki nuli, pa ona ima ukupno tri nezavisne realne komponente. Od ove tri komponente možemo formirati vektor na sledeći način:

$$\omega'_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} , \quad (6.7.48)$$

tj.  $\omega'_1 = \Omega_{23}$ ,  $\omega'_2 = \Omega_{31}$  i  $\omega'_3 = \Omega_{12}$ . U (6.7.48)  $\varepsilon_{ijk}$  je simbol Levi-Čivita. Definicija i neke osobine su date u Dodatku A. Iz (6.7.48) sledi

$$\Omega_{ij} = \sum_{m=1}^3 \epsilon_{imj} \omega'_m . \quad (6.7.49)$$

Zamenom ovog izraza u

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \sum_{m=1}^3 \Omega_{im}(t) \mathbf{e}'_m(t) \quad (6.7.50)$$

dobijamo

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{imj} \mathbf{e}'_m(t) \omega'_j . \quad (6.7.51)$$

Sa druge strane vektorski proizvod ugaone brzine i ortova rotirajućeg sistema je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i &= \sum_{m=1}^3 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i)_m \mathbf{e}'_m \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{mji} \omega'_j \mathbf{e}'_m . \end{aligned} \quad (6.7.52)$$

Prema tome dobili smo

$$\frac{d\mathbf{e}'_i(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i , \quad (6.7.53)$$

što je poznat rezultat:  $\omega'_i$  su projekcije ugaone brzine u pokretnom sistemu, tj. u sistemu krutog tela. Recept za njihovo nalaženje je prost. Prvo formirati antisimetričnu matricu  $\Omega$  koristeći matricu rotacije, a zatim iz nje pročitati projekcije ugaone brzine u sistemu  $S'$ .

**Primer 1.** Matrica rotacije oko  $z$  ose data je sa (6.2.7). Odrediti ugaonu brzinu.

Rešenje: Matrica  $\Omega$  je data sa

$$\begin{aligned}\Omega &= \dot{R}R^T = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi & \dot{\varphi} \cos \varphi & 0 \\ -\dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.7.54)$$

odakle je  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$ .

---

## 6.8 Komponente ugaone brzine u sistemu krutog tela

Dekartove ortove sopstvenog sistema krutog tela obeležićemo sa  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ , a laboratorijskog (ovaj sistem je inercijalan) sa  $\tilde{\mathbf{e}}_i, i = 1, 2, 3$ . Položaj sopstvenog sistema  $S$  u odnosu na sistem  $\tilde{S}$  odredjen je sa tri Ojlerova ugla. Infinitezimalni ugao rotacije krutog tela je  $d\psi \mathbf{e}_3 + d\varphi \tilde{\mathbf{e}}_3 + d\theta \mathbf{n}$ , pa je ugaona brzina data sa

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n}. \quad (6.8.55)$$

Da bismo našli komponente ugaone brzine u sopstvenom sistemu krutog tela potrebno je da vektore  $\mathbf{n}$  i  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  razvijemo u sopstvenom bazisu krutog tela. Jasno je da je

$$\mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2. \quad (6.8.56)$$

Formulu (6.2.12) prepisaćemo u obliku

$$x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \tilde{x}_j, \quad (6.8.57)$$

u skladu sa promjenjenom notacijom. Sa  $x_i$  i  $\tilde{x}_i$  obeležili smo projekcije vektora položaja u sistemu  $S$ , odnosno  $\tilde{S}$ . Projekcije vektora  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  na Dekartove ose sistema  $\tilde{S}$  su  $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 1$ . U sistemu  $S$  koordinate ovog vektora su

$$R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.8.58)$$

gde je matrica  $R$  data sa (6.2.24). Rezultat ovog množenja je

$$\begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.8.59)$$

Dakle,

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \sin \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3. \quad (6.8.60)$$

Konačno dobijamo

$$\boldsymbol{\omega} = (\sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\theta}) \mathbf{e}_1 + (\cos \psi \sin \theta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta}) \mathbf{e}_2 + (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \mathbf{e}_3 . \quad (6.8.61)$$

Komponente ugaone brzine možemo odrediti i direktno iz matrice rotacije

$$R = R_{e'_3}(\psi) R_n(\theta) R_{e_3}(\varphi).$$

Napomenimo da je u novim oznakama veza izmedju ortova laboratorijskog sistema i sistema krutog tela data sa

$$\mathbf{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(t) \tilde{\mathbf{e}}_j .$$

Matrica  $\Omega$  je data sa

$$\Omega = \dot{R}R^T = \dot{R}_{e'_3} R_{e'_3}^T + R_{e'_3} \dot{R}_n R_n^T R_{e'_3}^T + R_{e'_3} R_n \dot{R}_{e_3} R_{e_3}^T R_n^T R_{e'_3}^T . \quad (6.8.62)$$

Posle malo dužeg, ali jednostavnog računa, dobija se

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} & -\cos \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \sin \psi \dot{\theta} \\ -\cos \theta \dot{\varphi} - \dot{\psi} & 0 & \sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \cos \psi \sin \theta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta} & -\sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} - \cos \psi \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.8.63)$$

Iz matrice  $\Omega$  se dobijaju projekcije ugaone brzine u sistemu krutog tela:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega_{23} = \sin \psi \sin \theta \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 &= \Omega_{31} = \cos \psi \sin \theta \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 &= \Omega_{12} = \cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi} . \end{aligned} \quad (6.8.64)$$

## 6.9 Komponente ugaone brzine u laboratorijskom sistemu

Odredimo sada projekcije ugaone brzine u nepokretnom laboratorijskom sistemu. Potrebno je vektore  $\mathbf{e}_3$  i  $\mathbf{n}$  razložiti u bazisu laboratorijskog sistema,  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Rezultat je

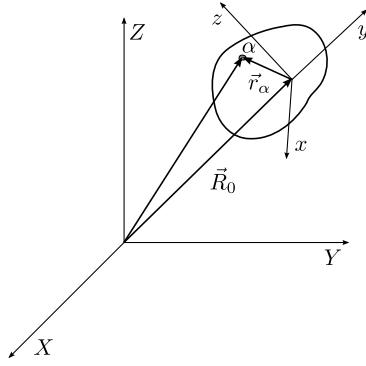
$$\boldsymbol{\omega} = (\sin \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta}) \tilde{\mathbf{e}}_1 + (-\cos \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \sin \varphi \dot{\theta}) \tilde{\mathbf{e}}_2 + (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\varphi}) \tilde{\mathbf{e}}_3 . \quad (6.9.65)$$

Do ovih komponenti možemo doći koristeći matricu  $\Omega$ . Komponente matrice  $\Omega$  se transformišu po tenzorskom zakonu pri rotacijama, tj.

$$\Omega_{ij} = R_{im} R_{jn} \tilde{\Omega}_{mn} ,$$

gde smo sa tildom obeležili komponente tenzora u laboratorijskom sistemu. Iz ove relacije uz  $\Omega = \dot{R}R^T$  je

$$\tilde{\Omega}_{ij} = R_{im}^T R_{jn}^T \Omega_{mn} = R_{im}^T R_{jn}^T \dot{R}_{mp} R_{np} = (R^T \dot{R})_{ij} . \quad (6.9.66)$$



Slika 6.8: Brzina tačke krutog tela.

Ovaj rezultat možemo pokazati na još jedan način. Iz sistema krutog tela labaratorijski sistem rotira. Drugim rečima, uzećemo da je sistem krutog tela nepokretan, a da laboratorijski rotira. Veza izmedju ortova ova dva sistema je

$$\tilde{\mathbf{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij}^{-1}(t) \mathbf{e}_j .$$

Da bismo odredili  $\tilde{\Omega}$  u izrazu (6.7.46) matricu  $R$  ćemo zamenimo sa matricom  $R^{-1}$ . Pored toga moramo dodati jedan znak minus, jer ako jedan sistem rotira ugaonom brzinom  $\omega$  u odnosu na drugi, onda taj drugi rotira ugaonom brzinom  $-\omega$  u odnosu na prvi. Prema tome

$$\tilde{\Omega} = -\dot{R}^T R = R^T \dot{R} . \quad (6.9.67)$$

Ponovo smo dobili rezultat (6.9.66).

Nakon jednostavnog računa nalazimo

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} + \cos \theta \dot{\psi} & \cos \varphi \sin \theta \dot{\psi} - \sin \varphi \dot{\theta} \\ -\cos \theta \dot{\psi} - \dot{\varphi} & 0 & \sin \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta} \\ -\cos \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \sin \varphi \dot{\theta} & -\sin \varphi \sin \theta \dot{\psi} - \cos \varphi \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} . \quad (6.9.68)$$

Projekcije ugaone brzine u nepokretnom sistemu su

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \tilde{\Omega}_{23} = \sin \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \cos \varphi \dot{\theta} \\ \tilde{\omega}_2 &= \tilde{\Omega}_{31} = -\cos \varphi \sin \theta \dot{\psi} + \sin \varphi \dot{\theta} \\ \tilde{\omega}_3 &= \tilde{\Omega}_{12} = \cos \theta \dot{\psi} + \dot{\varphi} . \end{aligned} \quad (6.9.69)$$

## 6.10 Brzina tačke krutog tela

Radius vektor  $\mathbf{R}_\alpha$  tačke krutog tela indeksa  $\alpha$  u laboratorijskom inercijalnom sistemu je

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_\alpha , \quad (6.10.70)$$

gde je  $\mathbf{R}_0$  vektor položaja pola sopstvenog koordinatnog sistema krutog tela, a  $\mathbf{r}_\alpha$  radijus vektor tačke indeksa  $\alpha$  u sopstvenom sistemu krutog tela, slika 6.8. Diferenciranjem gornje formule po vremenu dobijamo

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha , \quad (6.10.71)$$

gde je  $\mathbf{V}_0$  brzina pola, a  $\boldsymbol{\omega}$  trenutna ugaona brzina rotacije krutog tela. Pokažimo sada da je ugaona brzina krutog tela nezavisna od izbora pola. Neka je  $A$  pol drugog koordinatnog sistema i neka je  $\mathbf{a}$  radijus vektor tačke  $A$  u odnosu na pol  $O$ . Tada je brzina tačke krutog tela indeksa  $\alpha$

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}'_\alpha , \quad (6.10.72)$$

gde je  $\boldsymbol{\omega}_A$  ugaona brzina vezana za pol  $A$ . Zamenom  $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a}$  u prethodni izraz dobijamo

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a}) \quad (6.10.73)$$

odnosno

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_\alpha , \quad (6.10.74)$$

jer je

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times (-\mathbf{a}) . \quad (6.10.75)$$

Poredjenjem (6.10.71) sa (6.10.74) sledi

$$\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega} . \quad (6.10.76)$$

Ugaona brzina je karakteristika tela koje rotira i nije vezana za neku specijalnu tačku, pol koordinatnog sistema, niti za sam sistem.

## 6.11 Impuls krutog tela

Impuls krutog tela je zbir impulsa njegovih delića, tj.

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} , \quad (6.11.77)$$

gde je  $\mathbf{V}_\alpha$  brzina delića indeksa  $\alpha$  u laboratorijskom sistemu. Za kruto telo sa neprekidno rasporedjenom masom gornja suma ima beskonačno puno sabiraka. Tada suma prelazi u integral

$$\mathbf{P} = \int dm \mathbf{V} . \quad (6.11.78)$$

U daljem ćemo koristiti sumu, jer to obuhvata i diskretne i kontinualne sisteme. Impuls krutog tela se lako dobija

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= m(\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) \\ &= m\mathbf{V}_c , \end{aligned} \quad (6.11.79)$$

gde je  $\mathbf{V}_c$  brzina centra mase. Impuls krutog tela jednak je impulsu centra mase krutog tela u kome se nalazi mase tela.

## 6.12 Moment impulsa krutog tela. Tenzor inercije

U ovom poglavlju odredićemo angularni moment, tj. moment impulsa krutog tela u laboratorijskom sistemu. To je ukupni moment impulsa krutog tela i on je zbir momenata impulsa njegovih pojedinačnih delića

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{R}_{\alpha} \times \mathbf{V}_{\alpha} . \quad (6.12.80)$$

Zamenom (6.10.71) i (6.10.70) u prethodni izraz, imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_{\alpha}) \times (\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{R}_0 \times \mathbf{V}_0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{R}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &\quad + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{V}_0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \end{aligned} \quad (6.12.81)$$

U prvom članu ćemo iskoristiti da je  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} = m$  masa krutog tela; a u drugom i trećem ćemo uvesti radujus vektor centra mase tela u odnosu na sopstveni sistem

$$m \mathbf{r}_c = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} . \quad (6.12.82)$$

Tako dolazimo do

$$\mathbf{L} = m \mathbf{R}_0 \times \mathbf{V}_0 + m \mathbf{R}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + m \mathbf{r}_c \times \mathbf{V}_0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (6.12.83)$$

Kako je brzina centra mase u laboratorijskom sistemu

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c , \quad (6.12.84)$$

to je

$$\mathbf{L} = m \mathbf{R}_0 \times \mathbf{V}_c + m \mathbf{r}_c \times \mathbf{V}_0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (6.12.85)$$

Prva dva člana se odnose na translatorno kretanje krutog tela, a zadnji na rotaciono kretanje. Poslednji član je moment impulsa krutog tela u odnosu na pol sopstvenog koordinatnog sistema. To je rotacioni ili unutrašnji moment impulsa.

Ako izaberemo da se pol sopstvenog sistema poklapa sa centrom mase krutog tela ( $\mathbf{r}_c = 0$ ) tada je moment impulsa krutog tela

$$\mathbf{L} = m \mathbf{R}_c \times \mathbf{V}_c + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) . \quad (6.12.86)$$

Prvi sabirak je moment impulsa centra mase krutog tela pod uslovom da je sva masa krutog tela skoncentrisana u centru mase. Rotacioni (unutrašnji) moment impulsa krutog tela <sup>1</sup> je

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (6.12.87)$$

---

<sup>1</sup>Moment impulsa krutog tela u odnosu na centar mase naziva se sopstvenim momentom impulsa.

Razvijajući dvostruki vektorski proizvod prema (A.0.5), dobijamo

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\mathbf{r}_{\alpha}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \mathbf{r}_{\alpha}] . \quad (6.12.88)$$

Dekartove komponente unutrašnjeg momenta impulsa krutog tela su

$$(L_{\text{rot}})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}] \omega_j , \quad (6.12.89)$$

gde su sa  $x_{\alpha i}$  obeležene koordinate vektora  $\mathbf{r}_{\alpha}$  u sistemu krutog tela. Zadnja relacija je oblika

$$(L_{\text{rot}})_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j , \quad (6.12.90)$$

gde su

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}] \quad (6.12.91)$$

komponente tenzora inercije. Npr.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2] \\ I_{12} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [-x_{\alpha} y_{\alpha}] . \end{aligned} \quad (6.12.92)$$

U slučaju neprekidne raspodele mase gornje formule se lako generalizuju. Komponente tenzora inercije su

$$I_{ij} = \int_V d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) , \quad (6.12.93)$$

gde je  $\rho(\mathbf{r})$  gustina krutog tela. Komponente tenzora inercije su napisane u sistemu krutog tela. Jednačinu (6.12.90) možemo prepisati u obliku  $\mathbf{L}_{\text{rot}} = \hat{I} \boldsymbol{\omega}$ , gde smo sa  $\hat{I}$  obeležili tenzor inercije.

Pri rotaciji koordinatnog sistema, koordinate vektora položaja se transformišu prema (6.2.12). Primenom ove formule imamo

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r'^2 \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - R_{ik} R_{jm} x_{\alpha k} x_{\alpha m}] , \end{aligned} \quad (6.12.94)$$

gde su  $I_{ij}$  i  $I'_{ij}$  komponetne tenzora inercije u polaznom i u sistemu koji je dobijen rotacijom iz polaznog. Primenom  $\delta_{ij} = R_{ik} R_{jm} \delta_{km}$  lako dolazimo do

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jm} I_{km} . \quad (6.12.95)$$

Gornju formulu prepisaćemo u obliku

$$\hat{I}' = R \hat{I} R^T . \quad (6.12.96)$$

Veličine koja se na ovakav način transformiše pri rotacijama nazivaju se tenzorima drugog reda. Ovim smo pokazali da je tenzor inercije doista tenzor.

Tenzor inercije je simetričan  $I_{ik} = I_{ki}$ . Njegovi dijagonalni elementi su momenti, a vandijagonalni proizvodi inercije. Svaki simetričan realan tenzor možemo dijagonalizovati, tj. možemo rotacijom (ortogonalnom transformacijom) preći u koordinatni sistem u kojem je tenzor dijagonalan

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (6.12.97)$$

Dijagonalni elementi  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  se nazivaju glavni momenti inercije, a sistem u kojem je tenzor inercije dijagonalan je sistem glavnih osa inercije.

Kada kruto telo rotira oko fiksne ose, odredjene ortom  $\mathbf{n}$  pogodno je uvesti moment inercije krutog tela u odnosu na ovu osu,  $I_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^T \hat{I} \mathbf{n}$ . Primenom ove definicije dobijamo

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{n}} &= \sum_{i,j=1}^3 n_i I_{ij} n_j \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_a^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a)^2) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha \perp}^2, \end{aligned} \quad (6.12.98)$$

gde je  $r_{\alpha \perp}$  normalno rastojanje delića indeksa  $\alpha$  u odnosu na osu rotacije. Ova formula za moment inercije krutog tela u odnosu na osu je poznata iz Opšte fizike.

**Primer 1.** Valjak poluprečnika osnove  $R$  i visine  $h$  ima masu  $m$  koja je ravnomerno rasporedjena. Naći tenzor inercije valjka u odnosu na sistem čiji je koordinatni početak u centru mase valjka, a  $z$ -osa je usmerena duž ose simetrije valjka.

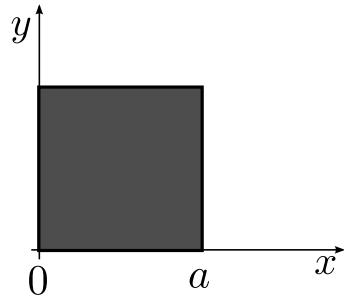
Rešenje: Komponente tenzora inercije se određuju direktno primenom (6.12.93); '11' komponenta tenzora inercije je

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int dm(y^2 + z^2) = \frac{m}{R^2 \pi h} \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \\ &= \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (6.12.99)$$

Slično se dobijaju i preostale komponente tenzora inercije. Rezultat je

$$I = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.12.100)$$

**Primer 2.** Naći komponente tenzora inercije tanke homogene kvadratne ploče stranice  $a$ . Koordinatni početak je u temenu kvadatra, a  $x$  i  $y$  ose su usmerene duž stranica kvadrata (slika 6.9).



Slika 6.9: Kvadratna ploča

Rešenje: Primenom (6.12.93) imamo

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{m}{a^2} \int_0^a dx \int_0^a dy y^2 = \frac{ma^2}{3} \\
 I_{22} &= \frac{m}{a^2} \int_0^a dx \int_0^a dy x^2 = \frac{ma^2}{3} \\
 I_{12} &= I_{21} = -\frac{m}{a^2} \int_0^a dx x \int_0^a dy y = -\frac{ma^2}{4} \\
 I_{33} &= \frac{m}{a^2} \int_0^a dx \int_0^a dy (x^2 + y^2) = \frac{2ma^2}{3}.
 \end{aligned} \tag{6.12.101}$$

Ostali matrični elementi su jednaki nuli. Tenzor inercije je

$$I = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & -\frac{ma^2}{4} & 0 \\ -\frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}. \tag{6.12.102}$$

Svojstvene vrednosti gornje matrice se nalaze iz

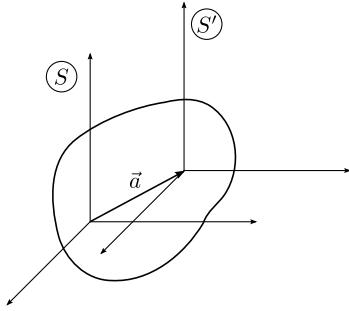
$$\begin{vmatrix} \frac{ma^2}{3} - \lambda & -\frac{ma^2}{4} & 0 \\ -\frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6.12.103}$$

pa su glavni momenti inercije  $\frac{ma^2}{12}, \frac{7ma^2}{12}, \frac{2ma^2}{3}$ . Glavni pravci inercije su

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.12.104}$$

Ovaj koordinatni sistem je dobijen iz polaznog rotacijom za  $45^\circ$ . Tenzor inercije u bazisu glavnih pravaca inercije ima dijagonalan oblik

$$I_d = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}. \tag{6.12.105}$$

Slika 6.10: Sistem  $S'$  je dobijen translacijom sistema  $S$ .

### Štajnerova teorema

Odredimo kako se tenzor inercije menja ako transliramo koordinatni sistem za neki fiksni vektor  $\mathbf{a}$ , slika 6.10. U novom sistemu komponente tenzora inercije i sve druge veličine obeležićemo sa primom. Komponente tenzora inercije u sistemu  $S'$  su

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [r'^2_{\alpha} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{a})^2 \delta_{ij} - (x_{\alpha i} - a_i)(x_{\alpha j} - a_j)] \\ &= I_{ij} + m(\mathbf{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) + m(-2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{a} \delta_{ij} + a_j x_{ci} + a_i x_{cj}) , \end{aligned} \quad (6.12.106)$$

gde su  $I_{ij}$  komponente tenzora inercije u polaznom sistemu. Takodje, uveli smo vektor položaja centra mase  $\mathbf{r}_c$  i njegove Dekartove koordinate  $x_{ci}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Ako se pol polaznog sistema nalazi u centru mase krutog tela, onda se prethodni izraz uprošćava

$$I'_{ij} = I_{ij}^{(cm)} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) . \quad (6.12.107)$$

Ovaj rezultat poznat je kao Štajnerova teorema.

## 6.13 Kinetička energija krutog tela

Odredimo kinetičku energiju krutog tela u laboratorijskom sistemu reference. Ona je suma kinetičkih energija njegovih delića

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}^2 .$$

Primenom izraza za brzinu delića krutog tela indeksa  $\alpha$ , (6.10.71) dobijamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \mathbf{V}_0^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{V}_0^2 + m \mathbf{V}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) + T_{\text{rot}} , \end{aligned} \quad (6.13.108)$$

gde je  $\mathbf{V}_0$  brzina pola u laboratorijskom sistemu,  $\mathbf{r}_c$  radijus vektor centra mase u sopstvenom sistemu krutog tela, a

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 \quad (6.13.109)$$

kinetička energija rotacije krutog tela. Nju ćemo dalje transformisati prema

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{rot}} . \end{aligned} \quad (6.13.110)$$

Primenom (6.12.87) imamo

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (6.13.111)$$

Poslednji izraz možemo prepisati u obliku

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\omega} . \quad (6.13.112)$$

Ako izaberemo da se pol sopstvenog koordinatnog sistema poklapa sa centrom mase krutog tela onda je kinetička energija krutog tela

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (6.13.113)$$

Dakle, kinetička energija krutog tela je zbir kinetičke energije translacije i rotacije. Kinetička energija translacije odgovara kinetičkoj energiji centra mase kao da je sva masa krutog tela u njegovom centru mase. Drugi sabirak, kinetička energija rotacije predstavlja kinetičku energiju rotacije krutog tela oko ose koja prolazi kroz centar mase tela.

Ako kruto telo rotira oko fiksne ose ugaonom brzinom  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$  kinetička energija rotacije je

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \omega^2 . \quad (6.13.114)$$

**Primer 1.** Unutar cilindra radijusa  $R$  kotrlja se bez klizanja valjak radijusa  $r$ , kao što je prikazano na slici 6.11. Masa valjka je  $m$ . Odrediti kinetičku energiju valjka.

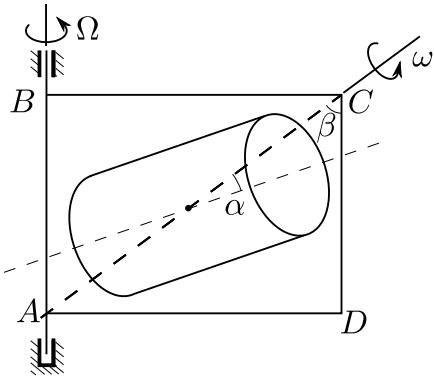
Rešenje: Kinetička energija valjka je

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 , \quad (6.13.115)$$

gde je  $v_c$  brzina centra mase valjka,  $\omega$  njegova ugaona brzina, a  $I$  moment inercije valjka u odnosu na osu simetrije valjka. Ugao izmedju vertikale i prave koja prolazi kroz centar valjka i



Slika 6.11: Slika uz primer 1.



Slika 6.12: Slika uz primer 2.

cilnidra obeležićemo sa  $\varphi$ . Brzina tačaka na omotaču valjka koji su u kontaktu sa cilindrom je nula, jer nema proklizavanja. Ove tačke čine trenutnu osu rotaciju valjka. Iz gornjeg uslova i  $v_c = (R - r)\dot{\varphi}$  sledi

$$\omega = \frac{R - r}{r} \dot{\varphi}, \quad (6.13.116)$$

pa je

$$T = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\varphi}^2. \quad (6.13.117)$$

**Primer 2.**<sup>2</sup> Pravougani ram rotira ugaonom brzinom  $\Omega$  oko ose  $AB$ . Dijagonalna  $AC$  rama prolazi kroz homogeni valjak mase  $m$ , radijusa osnove  $R$  i visine  $h$ . Centar valjka se poklapa sa presekom dijagonalne rame i valjak rotira ugaonom brzinom  $\omega$  oko dijagonale  $AC$  rame. Osa simetrije valjka zaklapa ugao  $\alpha$  sa dijagonalom  $AC$  rame. Odrediti kinetičku energiju valjka, ako je  $AB = a$  i ugao  $\angle ACD = \beta$ .

Rešenje: Kinetičku valjka izaračunaćemo primenom formule (6.13.113). Centar mase valjka ima brzinu  $V_c = \frac{1}{2}\Omega a \tan \beta$ , pa je kinetička energija translacije

$$T_c = \frac{m\Omega^2 a^2 \tan^2 \beta}{8}.$$

Sistem vezan za valjak ćemo postaviti u njegov centar,  $z$ -osa je usmerena duž ose simetrije valjka. Ukupna ugaona brzina valjka je  $\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}$ . Njena projekcija na  $z$ -osu je

$$\omega_{R3} = \omega \cos \alpha + \Omega \cos(\beta + \alpha).$$

---

<sup>2</sup>Ovaj zadatak je iz reference [18].

Rotaciona kinetička energija je

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\omega_{R1}^2 + I_2\omega_{R2}^2 + I_3\omega_{R3}^2) ,$$

gde su  $I_1, I_2 = I_1$  i  $I_3$  glavni momenti inercije valjka nadjeni u primeru 1 iz poglavlja 6.12. Dalje je

$$\omega_{R1}^2 + \omega_{R2}^2 = (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})^2 - \omega_{R3}^2 .$$

Lako se vidi da je

$$\omega_{R1}^2 + \omega_{R2}^2 = (\omega \sin \alpha + \Omega \sin(\alpha + \beta))^2 .$$

Konačno, ukupna kinetička energija valjka je

$$T = \frac{m\Omega^2 a^2 \tan^2 \beta}{8} + \frac{m}{2} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) (\omega \sin \alpha + \Omega \sin(\alpha + \beta))^2 + \frac{mR^2}{4} (\omega \cos \alpha + \Omega \cos(\alpha + \beta))^2 .$$


---

## 6.14 Teorema impulsa za kruto telo

Teorema impulsa za kruto telo u laboratorijskom inercijalnom sistemu je

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} , \quad (6.14.118)$$

gde je  $\mathbf{P}$  ukupni impuls krutog tela, a  $\mathbf{F}^{(\text{ext})}$  ukupna eksterna sila koja deluje na kruto telo.

## 6.15 Kretanje krutog tela oko nepokretne tačke

Razmatrajmo kretanje krutog tela ukoliko je jedna tačka krutog tela nepokretna. Kao što smo već pokazali, ukupni moment impulsa krutog tela je

$$\mathbf{L} = m\mathbf{R}_0 \times \mathbf{V}_c + m\mathbf{r}_c \times \mathbf{V}_0 + \mathbf{L}_{\text{rot}} . \quad (6.15.119)$$

Za pol sistema krutog tela (koji ćemo obeležiti sa  $S$ ) izabraćemo nepokretnu tačku krutog tela, tj.  $\mathbf{V}_0 = 0$ . Ako uzmemo da se pol laboratorijskog (nepokretnog) sistema poklapa sa polom sistema krutog tela, onda je i  $\mathbf{R}_0 = 0$ , pa su prva dva člana u izrazu za moment impulsa jednaki nuli. Prema tome, moment impulsa u laboratorijskom sistemu sadrži samo poslednji član  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{rot}} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$ . Teorema momenta imupulsa u ovom sistemu je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} , \quad (6.15.120)$$

gde je  $\mathbf{M}$  moment sile u odnosu na nepokretnu tačku krutog tela. Diferenciranje po vremenu u formuli (6.15.120) je u laboratorijskom sistemu  $\tilde{S}$ . Primenom Koriolisove teoreme (6.5.34) dobijamo

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{rot}}}{dt} \Big|_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_{\text{rot}} = \mathbf{M} . \quad (6.15.121)$$

Izraz (6.15.121) je Ojlerova jednačina. Projektovanjem jednačine (6.15.121) na glavne ose inercije sopstvenog sistema krutog tela dobijamo

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= M_3 , \end{aligned} \quad (6.15.122)$$

gde su  $I_1, I_2$  i  $I_3$  glavni momenti inercije krutog tela,  $M_1, M_2$  i  $M_3$ , odnosno  $\omega_1, \omega_2$  i  $\omega_3$  projekcije momenta sile u odnosu na nepokretnu tačku odnosno ugaone brzine na glavne pravce inercije krutog tela. Diferenciranje po vremenu u (6.15.122) je u sistemu krutog tela.

### Kretanje slobodne simetrične čigre oko nepokretne tačke

Simetrična čiga je kruto telo za koje važi  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Osa simetrije čigre je  $z$ - osa. Dalje ćemo uzeti da je moment sile koji deluje na čigru jednak nuli. Jednačine (6.15.122) imaju oblik

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 &= 0 , \\ I_1\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 , \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 . \end{aligned} \quad (6.15.123)$$

Iz zadnje jednačine vidimo da je  $\omega_3 = A$ , gde je  $A$  konstanta. Diferenciranjem druge jednačine gornjeg sistema po vremenu, uz primenu prve jednačine, dobijamo

$$\ddot{\omega}_2 + A^2 \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right)^2 \omega_2 = 0 . \quad (6.15.124)$$

Rešenje ove jednačine je

$$\omega_2 = C \cos(\Omega t + \varphi) , \quad (6.15.125)$$

gde su  $C$  i  $\varphi$  integracione konstante, a

$$\Omega = \frac{|I_3 - I_1|A}{I_1} . \quad (6.15.126)$$

Iz druge jednačine sistema (6.15.123) sledi

$$\omega_1 = \pm C \sin(\Omega t + \varphi) , \quad (6.15.127)$$

gde se gornji znak odnosi na slučaj  $I_3 > I_1$ , a donji na  $I_3 < I_1$ . Dakle, vektora ugaone brzine ima konstantnu projekciju  $A$  na  $z$ -osu i njegov vrh opisuje krug poluprečnika  $C$  u  $xy$ -ravni. Vektor ugaone brzine opisuje konus čija se osa poklapa sa osom simetrije krutog tela. Ovakvo kretanje vektora ugaone brzine naziva se precesijom;  $\Omega$  je ugaona brzina precesije.

Vektor momenta impulsa  $\mathbf{L}$  je konstantan u laboratorijskom sistemu, jer je taj sistem inercijalan i jer je moment sile koji deluje na čigru jednak nuli. Uzmimo da je  $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{e}}_3$ . Primenom  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2$  lako se vidi da je  $\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = 0$ . Vektori momenta impulsa, ugaona brzina i  $\mathbf{e}_3$  leže u jednoj ravni. Vektor momenta impulsa u sopstvenom sistemu krutog tela je

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 . \quad (6.15.128)$$

Sa druge strane u laboratorijskom sistemu moment impulsa je  $\mathbf{L} = L\tilde{\mathbf{e}}_3$ . Komponente vektora  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  u bazisu krutog tela su date sa (6.8.60). Primenom ove formule dobijamo

$$\mathbf{L} = L(\sin \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3) . \quad (6.15.129)$$

Poredjenjem sa (6.15.128) dobijamo

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{I_3 A}{L} = \cos \theta_0 \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{I_1} \\ \dot{\psi} &= A \left( 1 - \frac{I_3}{I_1} \right) = -\Omega . \end{aligned} \quad (6.15.130)$$

Uzeli smo da je  $I_3 > I_1$ . Iz prve jednačine sledi da je  $\theta$  konstantan ugao. Iz gornjih jednačina se vidi da su konačne jednačine kretanja date sa

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 , \\ \varphi(t) &= \frac{L}{I_1} t + \varphi_0 , \\ \psi(t) &= -\Omega t + \psi_0 , \end{aligned} \quad (6.15.131)$$

gde su  $\psi_0$  i  $\varphi_0$  konstante odredjene početnim uslovima. Primenom (6.9.65) dobijamo vektor ugaone brzine u laboratorijskom sistemu

$$\boldsymbol{\omega} = A \left( 1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \sqrt{1 - \frac{I_3^2 A^2}{L^2}} \left( \sin \left( \frac{L}{I_1} t \right) \tilde{\mathbf{e}}_1 - \cos \left( \frac{L}{I_1} t \right) \tilde{\mathbf{e}}_2 \right) + \left( \frac{L}{I_1} + \frac{A^2 I_3}{L} \left( 1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \right) \tilde{\mathbf{e}}_3 . \quad (6.15.132)$$

Vektor ugaone brzine precesira oko vektora momenta impulsa, tj  $\tilde{z}$ -ose opisujući pri tome tzv. prostorni konus. Takodje vektor ugaone brzine precesira oko  $z$ -ose, tj. oko ose simetrije krutog tela opisujući pri tome takodje konus. Ovo je ilustrovano na slici 6.13. Neka je  $\alpha$  ugao izmedju  $\tilde{z}$  ose i ugaone brzine, a  $\beta$  ugao izmedju vektora ugaone brzine i ose simetrije krutog tela. Lako se vidi da su oba ugla konstantna

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\tilde{\omega}_3}{\omega} = \frac{\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta_0}{\omega} , \\ \cos \beta &= \frac{\omega_3}{\omega} = \frac{\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0}{\omega} , \end{aligned} \quad (6.15.133)$$

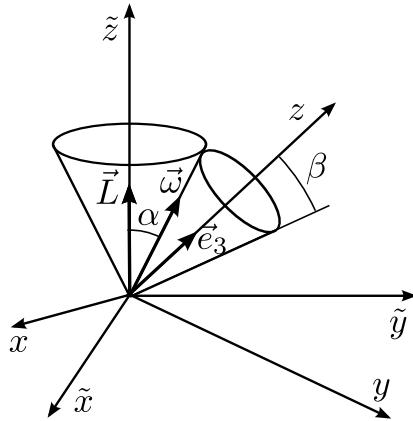
jer su sve veličine sa desnih strana jednakosti konstantne.

Naša Zemlja nije idealna sfera, već je malo spljoštena na polovima. Ona je primer simetrične cigre. Za Zemlju je

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = \frac{1}{300} . \quad (6.15.134)$$

Kako je moment sile koji deluje na Zemlju zanemarljiv, možemo primeniti prethodnu analizu. Vektor ugaone brzine rotacije Zemlje precesira oko njene ose simetrije. Iz  $\omega_3 = \text{dan}^{-1}$  sledi da je ugaona brzina ove precesije

$$\Omega = \frac{1}{300} \text{dan}^{-1} . \quad (6.15.135)$$



Slika 6.13:

Period ove precesije je oko 300 dana. Eksperimentalni rezultat je veći i iznosi oko 435 dana. Glavni razlog za ovo neslaganje sa eksperimentalnom vrednošću leži u činjenici da Zemlja nije kruto telo.

---

**Primer 1.** Planeta sfernog oblika mase  $M$  i radijusa  $R$  rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko ose simetrije. Iznenada je pogodi asteroid mase  $\alpha M$  i čvrsto se slepi sa sferom u tački pod uglom  $\theta$  prema osi rotacije. Novonastalo telo nije više rotaciono simetrično. Naći ugaonu brzinu precesije ose simetrije novonastalog tela.

Rešenje: Centar mase planete posle sudara sa asteroidom je udaljen od centra planete za

$$d = \frac{\alpha R}{1 + \alpha}$$

i nalazi se duž pravca koji spaja asteroid sa centrom. Neka je  $z$  osa postavljena duž ovog pravca. Tenzor inercije u sistemu centra mase je

$$I = MR^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} + \frac{\alpha}{1+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \quad (6.15.136)$$

Ugaona brzina precesije je

$$\Omega = \frac{5\alpha}{2 + 7\alpha} \omega \cos \theta .$$


---

## 6.16 Lagranžev metod za kruto telo

Ako ne postoje nikakva druga ograničenja na kretanje krutog tela sem uslova da je rastojanje izmedju ma koje dve tačke tela nepromenjeno, kruto telo ima šest stepeni slobode. Za generalisane koordinate izabraćemo koordinate pola sopstvenog sistema krutog tela i Ojlerove uglove:

$X_0, Y_0, Z_0, \theta, \varphi, \psi$ . Lagranževe jednačine su oblika

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i , \quad (6.16.137)$$

gde su  $Q_i$  generalisane sile. Polazeći od izraza (6.10.70), vidimo da je virtuelno pomeranje delića krutog tela indeksa  $\alpha$  dato sa

$$\delta \mathbf{R}_\alpha = \delta \mathbf{R}_0 + \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_\alpha . \quad (6.16.138)$$

Kruto telo je idealan sistem, pa je rad aktivnih sila na virtuelnim pomeranjima dat sa

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{R}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{R}_0 + \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha} \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R}_0 + \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{M} , \end{aligned} \quad (6.16.139)$$

gde su  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{M}$  ukupna sila, odnosno moment sile koji deluje na kruto telo. Moment sile se računa u odnosu na pol sopstvenog sistema krutog tela. Kako je  $\delta \boldsymbol{\phi} = \delta \psi \mathbf{e}_3 + \delta \varphi \tilde{\mathbf{e}}_3 + \delta \theta \mathbf{n}$ , to su generalisane sile

$$\begin{aligned} Q_x &= F_x = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{F} , Q_y = F_y = \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{F} , Q_z = F_z = \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{F} , \\ Q_\theta &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \quad Q_\varphi = \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad Q_\psi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (6.16.140)$$

Generalisane sile  $Q_x, Q_y$  i  $Q_z$  su Dekartove projekcije u laboratorijskom sistemu ukupne spoljašnje sile koja deluje na kruto telo. Da bi se formirale Lagranževe jednačine potrebno je da kinetičku energiju krutog tela izrazimo preko generalisanih koordinata. Ako je spoljašnja sila koja deluje na kruto telo potencijalna, možemo je izraziti preko potencijala:

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_0} . \quad (6.16.141)$$

Lagranževe jednačine onda imaju standardni oblik sa lagranžijanom  $L = T - U$ .

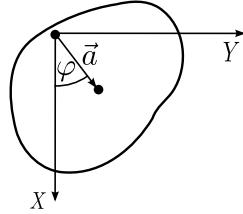
### Fizičko klatno

Neka kruto telo rotira oko fiksne horizontalne ose u gravitacionom polju (slika 6.14). Uzećemo da je ta osa  $Z$ -osa laboratorijskog sistema i da se ona poklapa sa  $z$ -osom sopstvenog sistema. Radijus vektor centra mase krutog tela je  $\mathbf{a}$  i neka je koordinatni sistem izabran tako da se centar mase nalazi u  $OXY$ -ravni. Sistem ima jedan stepen slobode, ugao  $\varphi$  koji gradi radijus vektor centra mase sa  $X$ -osom. Kinetička energija krutog tela u nepokretnom sistemu  $OXYZ$  je

$$T = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 , \quad (6.16.142)$$

gde je  $I_{33}$  moment inercije krutog tela oko  $z$ -ose. Potencijalna gravitaciona energija je  $U = - \int dm g X$ , gde je  $X$  visina na kojoj se nalazi delić mase  $dm$ . Lako se dobija da je

$$U = -mga \cos \varphi . \quad (6.16.143)$$



Slika 6.14: Fizičko klatno

Dakle, lagranžijan je jednak

$$L = T - U = \frac{1}{2}I_{33}\dot{\varphi}^2 + mga \cos \varphi . \quad (6.16.144)$$

Jednačina kretanja je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 , \quad (6.16.145)$$

odnosno

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_{33}} \sin \varphi = 0 . \quad (6.16.146)$$

Za male uglove  $\varphi$  važi  $\sin \varphi \approx \varphi$ , pa se jednačina kretanja svodi na

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_{33}} \varphi = 0 . \quad (6.16.147)$$

Kruto telo koje osciluje u gravitacionom polju je tzv. fizičko klatno. Frekvenca oscilovanja fizičkog klatna je

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I_{33}}} . \quad (6.16.148)$$

### Simetrična čigra u gravitacionom polju

U ovom poglavlju analiziraćemo kretanje simetrične čigre u gravitacionom polju. Uzećemo da je tačka  $O$  nepokretna i da je ona pol laboratorijskog sistema, kao i sistema vezanog za čigru, kao što je prikazano na slici 6.15. Primenom (6.8.61) lako se dobija kinetička energija čigre:

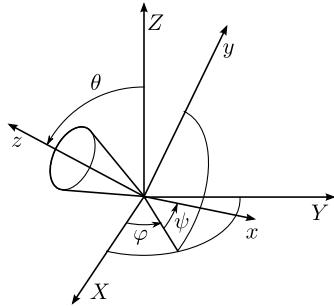
$$\begin{aligned} T &= T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 . \end{aligned} \quad (6.16.149)$$

Potencijalna gravitaciona energija je

$$U = mga \cos \theta , \quad (6.16.150)$$

pa je lagranžijan dat sa

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mga \cos \theta . \quad (6.16.151)$$



Slika 6.15: Kretanje simetrične čigre u gravitacionom polju.

U ovom slučaju postoje tri integrala kretanja. Uglovi  $\psi$  i  $\varphi$  su ciklične koordinate, jer lagranžijan ne zavisi od njih. Njima konjugovani generalisani impulsi su konstante kretanja:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = A , \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = B . \end{aligned} \quad (6.16.152)$$

Konstantne generalisane impulse smo označili sa  $A$ , odnosno  $B$ . Kako lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena, to je energija konstanta kretanja

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + mga \cos \theta . \quad (6.16.153)$$

Ako iz (6.16.152) izrazimo  $\dot{\varphi}$  i  $\dot{\psi}$  i zamenimo u (6.16.153) dobijamo

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = E , \quad (6.16.154)$$

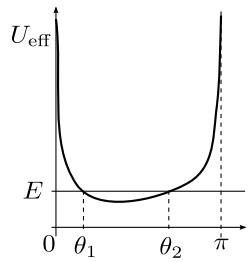
gde je efektivni potencijal dat sa

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(B - A \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{A^2}{2I_3} + mga \cos \theta . \quad (6.16.155)$$

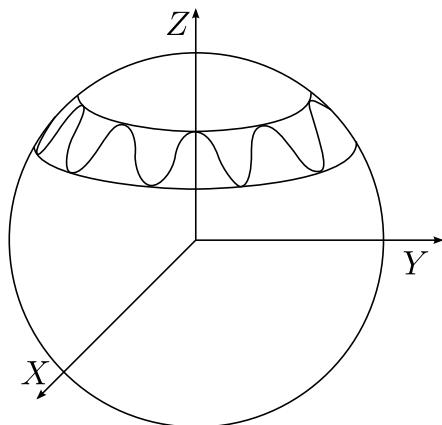
Kretanje čigre je moguće za one uglove  $\theta$  za koje je  $E \geq U_{\text{eff}}(\theta)$ . Efektivni potencijal je prikazan na slici 6.16. Vidimo da su  $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$  vertikalne asymptote funkcije  $U_{\text{eff}}(\theta)$ . Za energiju  $E$  veću od minimuma efektivnog potencijala moguće vrednosti ugla  $\theta$  leže u intervalu  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ . Osa simetrije čigre opisuje krivu prikazanu na slici 6.17. Oscilovanje ose simetrije naziva se nutacijom. Kretanje čigre je kombinacija precesije sa nutacijom, i naziva se pseudoregularnom precesijom.

---

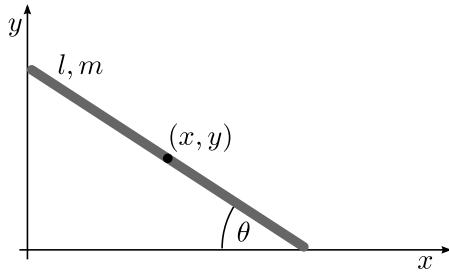
**Primer 1.** Štap dužine  $l$  i mase  $m$  naslonjen je sa svoja dva kraja na vertikali odnosno horizontlni zid kao na slici 6.18. Štap može da klizi bez trenja po zidovima u vertikalnoj ravni. U početnom trenutku štap miruje i zaklapa ugao  $\theta_0$  sa horizontalom.



Slika 6.16: Efektivni potencijal za kretanje simetrične čigre u gravitacionom polju.



Slika 6.17: Trajektorija koju opisuje vrh vektora ugaone brzine.



Slika 6.18: Slika uz primer 1.

- a) Napisati jednačine veza.
- b) Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja uzimajući ugao  $\theta$  kao generalisanu koordinatu.
- c) Naći zavisnost  $\theta = \theta(t)$  u integralnom obliku.
- d) Sastaviti lagranžijan  $\tilde{L}$  koristeći koordinate centra mase i ugao  $\theta$  kao promenljive. U lagranžijan uključiti veze. Naći odgovarajuće jednačine kretanja.
- e) Izraziti Lagranževe množitelje preko ugla  $\theta$  i odrediti pri kojoj vrednosti ugla  $\theta$  se gornji kraj štapa odvaja od zida.

Rešenje:

- a) Koordinate centra mase štapa obeležićemo sa  $(x, y)$ . Jednačine veza su:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv x - \frac{l}{2} \cos \theta = 0, \\ f_2 &\equiv y - \frac{l}{2} \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (6.16.156)$$

- b) Kinetička energija štapa je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (6.16.157)$$

gde je  $I = \frac{1}{12}ml^2$ . Zamenom  $x$  i  $y$  iz jednačina veza dobijamo

$$T = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2. \quad (6.16.158)$$

Potencijalna energija štapa je  $U = \frac{1}{2}mgl \sin \theta$ , tako da je laranžijan dat sa

$$L = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{mlg}{2} \sin \theta. \quad (6.16.159)$$

Lagranževa jednačina kretanja je

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l} \cos \theta. \quad (6.16.160)$$

- c) Primenom

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}, \quad (6.16.161)$$

jednačina kretanja postaje

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{l}(\sin \theta - \sin \theta_0) . \quad (6.16.162)$$

Interacijom gornje jednačine dobijamo

$$t = - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{l}(\sin \theta_0 - \sin \theta)}} . \quad (6.16.163)$$

d) Koordinate  $x, y$  i  $\theta$  tretiraćemo kao nezavisne promenljive. Lagranžian je

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}^2 - mgy + \lambda_1\left(x - \frac{l}{2}\cos \theta\right) + \lambda_2\left(y - \frac{l}{2}\sin \theta\right) , \quad (6.16.164)$$

gde smo članove sa vezama dodali u lagranžian. Jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \lambda_1 &= 0 , \\ m\ddot{y} + mg - \lambda_2 &= 0 , \\ \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} - \lambda_1\frac{l}{2}\sin \theta + \lambda_2\frac{l}{2}\cos \theta &= 0 . \end{aligned} \quad (6.16.165)$$

Variranje po Lagranževim množiteljima daje jednačine veza iz kojih sledi

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\cos \theta , \\ \ddot{y} &= \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin \theta . \end{aligned} \quad (6.16.166)$$

Pokazati da eliminacijom  $x$  i  $y$  koordinata iz jednačina kretanja dobijamo jednačinu kretanja nadjenu u delu b).

e) Lagranževi množitelji su

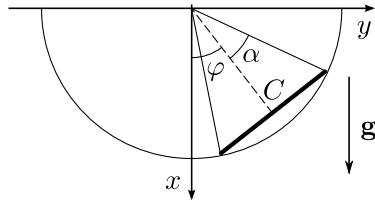
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m\ddot{x} , \\ \lambda_2 &= m\ddot{y} + mg , \end{aligned} \quad (6.16.167)$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{mg}{2}\left(3\sin \theta_0 - \frac{1}{2}\sin \theta\right)\cos \theta , \\ \lambda_2 &= \frac{3mg}{4}\left(\frac{1}{3} - 2\sin \theta_0 \sin \theta + 3\sin^2 \theta\right) . \end{aligned} \quad (6.16.168)$$

Generalisane sile reakcije su

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} , \\ \mathcal{R}_y &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} , \\ \mathcal{R}_\theta &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.16.169)$$



Slika 6.19: Slika uz Primer 2.

odakle konkretno dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x &= \lambda_1 , \\ \mathcal{R}_y &= \lambda_2 , \\ \mathcal{R}_\theta &= \frac{l}{2}(\lambda_1 \sin \theta - \lambda_2 \cos \theta) .\end{aligned}\quad (6.16.170)$$

Uslov odvajanja gornjeg dela štapa je  $\lambda_1 = 0$  što daje kritični ugao  $\theta_k$

$$\sin \theta_k = \frac{2}{3} \sin \theta_0 . \quad (6.16.171)$$

**Primer 2.** Homogena tanka šipka mase  $m$  i dužine  $2a$  kreće se unutar glatke cilindrične površi radijusa  $R$  u vertikalnoj ravni. Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja. Naći frekvencu malih oscilacija šipke.

Rešenje: Sistem ima jedan stepen slobode. Uzećemo ugao  $\varphi$  koji šipka gradi sa horizontalnim pravcem za generalisanu koordinatu. Koordinate centra mase šipke su

$$\begin{aligned}x_c &= \sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi \\ y_c &= \sqrt{R^2 - a^2} \sin \varphi ,\end{aligned}\quad (6.16.172)$$

odakle je brzina centra mase šipke

$$v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = (R^2 - a^2)\dot{\varphi}^2 . \quad (6.16.173)$$

Kinetička energija šipke je

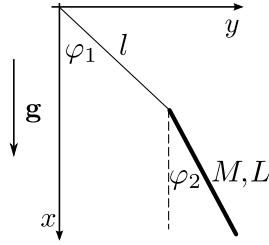
$$T = \frac{1}{2}m(R^2 - \frac{2}{3}a^2)\dot{\varphi}^2 ,$$

dok je potencijalna energija  $U = -mg\sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi$ . Lagranžijan je

$$L = \frac{1}{2}m(R^2 - \frac{2}{3}a^2)\dot{\varphi}^2 + mg\sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi .$$

Lagranževa jednačina kretanja je

$$\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\ddot{\varphi} + g\sqrt{R^2 - a^2} \sin \varphi = 0 . \quad (6.16.174)$$



Slika 6.20: Slika uz Primer 3.

Za male uglove  $\varphi$  gornja jednačina postaje jednačina oscilatora iz koje je frekvenca oscilovanja

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2 - \frac{2}{3}a^2}. \quad (6.16.175)$$

**Primer 3.** Homogeni štap mase  $m$  i dužine  $L$  obešen je jednim svojim krajem za neistegljiv konac dužine  $l$ . Ceo sistem je u vertikalnoj ravni. Naći lagranžijani i karakteristične frekvence malih oscilacija ovog sistema.

Rešenje: Sistem ima dva stepena slobode; uglovi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  su generalisane koordinate. Koordinate centra mase štapa su

$$\begin{aligned} x_c &= l \cos \varphi_1 + \frac{L}{2} \cos \varphi_2 \\ y_c &= l \sin \varphi_1 + \frac{L}{2} \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (6.16.176)$$

odakle se dobija

$$v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + lL \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.16.177)$$

Rotaciona kinetička energija je

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{24} mL^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

Lagranžijan je

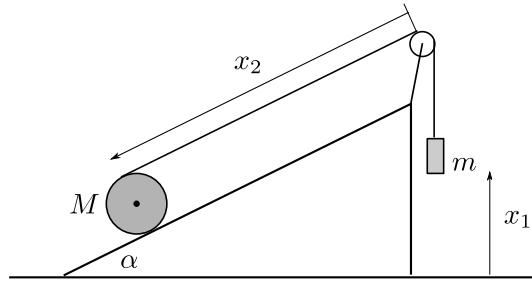
$$L = \frac{1}{2} m \left( l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + lL \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right) + \frac{1}{24} mL^2 \dot{\varphi}_2^2 + mg(l \cos \varphi_1 + \frac{L}{2} \cos \varphi_2).$$

Za male uglove gornji lagranžijan postaje

$$L = \frac{m}{2} \left( l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{L^2}{3} \dot{\varphi}_2^2 + lL \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right) - mg \left( \frac{l \varphi_1^2}{2} + \frac{L \varphi_2^2}{4} \right).$$

Odgovarajuće jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} l \ddot{\varphi}_1 + \frac{L}{2} \ddot{\varphi}_2 &= -g \varphi_1 \\ \frac{l}{2} \ddot{\varphi}_1 + \frac{L}{3} \ddot{\varphi}_2 &= -\frac{g}{2} \varphi_2. \end{aligned} \quad (6.16.178)$$



Slika 6.21: Slika uz Primer 4.

Standardnom procedurom dobijaju se karakteristične frekvence

$$(\omega^2)_{1,2} = g \frac{3l + 2L \pm 3\sqrt{\left(l + \frac{2L}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}lL}}{lL}. \quad (6.16.179)$$

**Primer 4.** Na valjak mase  $M$  i poluprečnika  $R$ , namotana je nit. Za drugi kraj niti zakačen je teg mase  $m$ . Nit je prebačena preko kotura zanemarljive mase, kao na slici 6.21. Valjak se kotrlja po strmoj ravni, nagibnog ugla  $\alpha$ , bez klizanja. Naći Lagranžijan sistema i jednačinu kretanja. Koliko je ubrzanje centra mase valjka, a koliko tega?

Rešenje: Položaj tega je odredjen koordinatom  $x_1$ , a centra mase valjka sa  $x_2$ . Ugao rotacije valjka oko ose simetrije obeležićemo sa  $\theta$ . Kinetička energija sistema je

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2,$$

a potencijalna

$$U = mgx_1 + Mg(l - x_2) \sin \theta,$$

gde je  $l$  dužina strme ravni. Uslov neistegljivosti konca daje vezu  $x_1 = 2x_2$ , a uslov kotrljanja valjka bez klizanja  $\dot{x}_2 = R\dot{\theta}$ . Primenom ovih uslova lagranžijan postaje

$$L = 2m\dot{x}_2^2 + \frac{3M}{4}\dot{x}_2^2 - 2mgx_2 - Mg(l - x_2) \sin \alpha.$$

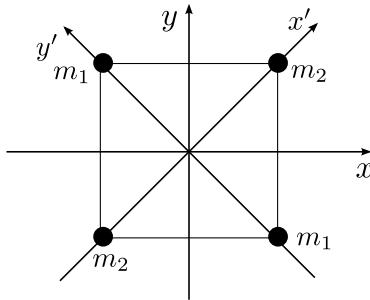
Lagranževa jednačina kretanja je

$$(4m + \frac{3}{2}M)\ddot{x}_2 = Mg \sin \alpha - 2mg.$$

Ubrzanje centra mase diska  $\ddot{x}_2$  je

$$\ddot{x}_2 = 2 \frac{Mg \sin \alpha - 2mg}{8m + 3M}.$$

Ubrzanje tega je  $\ddot{x}_1 = 2\ddot{x}_2$ .



Slika 6.22: Slika uz zadatak 6.4.

## 6.17 Zadaci

**6.1.** Kocka ivice  $a$  rotira za ugao od  $30^0$  oko  $x$ -ose, a zatim za ugao  $45^0$  oko  $y$ -ose. Neka se koordinatni početak nalazi u temenu kocke, i neka su Dekartove ose usmerene duž ivica kocke. Odrediti položaj tačaka  $(0, 0, a)$  i  $(a, a, a)$  nakon rotacije.

**6.2.** Odrediti glavne centralne momente inercije sledećih tela:

- (a) homogen kvadar, mase  $m$  i stranica  $a, b$  i  $c$ ,
- (b) homogena tanka kvadratna ploča, mase  $m$  i stranica  $a$  i  $b$ ,
- (c) homogen kupa mase  $m$ , poluprečnika osnove  $R$  i visine  $h$
- (d) nehomogen valjk, mase  $m$  i poluprečnika  $R$ , ako je gustina valjka proporcionalna sa  $1 - \frac{r}{R}$ , gde je  $r$  rastojanje od ose simetrije,
- (e) homogen elipsoid, mase  $m$  i poluosa  $a, b$  i  $c$ .

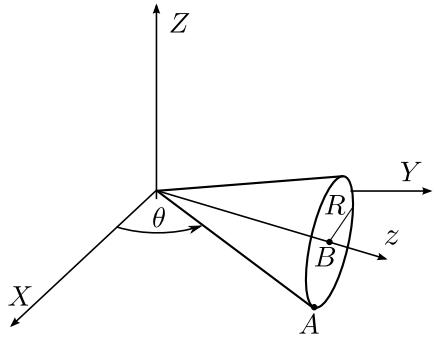
**6.3.** Tri tanka štapa mase  $m$  i dužina  $l$  spojena su u jednoj tački i medjusobno su ortogonalni. Odrediti glavne ose i momente inercije, ako je koordinatni početak u tački u kojoj su tri štapa spojena.

**6.4.** U vrhovima kvadrata stranice  $a$  nalaze se mase  $m_1$  i  $m_2$  naizmenično, kao na slici. Naći komponente tenzora inercije u sistemu  $Oxyz$  i  $O'x'y'z'$ . Proveriti da li važi (6.12.95).

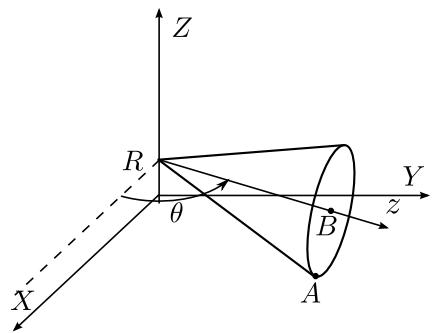
**6.5.** Tanka homogena ploča mase  $m$  ima oblik jednakostraničnog trougla stranice dužine  $a$ . Odrediti tenzor inercije ploče u Dekartovom koordinatnom sistemu čiji se početak poklapa sa jednim od temena trougla dok mu se jedna od osa proteže duž ivice trougla. Potom odrediti glavne momente inercije i glavne ose inercije.

**6.6.** Odrediti centar mase i glavne momente inercije homogenog poluvaljka mase  $m$ , visine  $h$  i poluprečnika osnove  $R$ .

**6.7.** Odrediti glavne momente inercije i kinetičku energiju homogene lopte poluprečnika  $R$  i mase  $m$ , koja rotira konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko jedne od svojih osa simetrije.



Slika 6.23: Slika uz zadatak 6.8.



Slika 6.24: Slika uz zadatak 6.9.

**6.8.** Homogena kupa mase  $m$ , poluprečnika osnove  $R$  i poluugla  $\alpha$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj ravni oko vertikalne ose ugaonom brzinom  $\dot{\theta}$ . Vrh kupe je učvršćen u tački koja pripada horizontalnoj ravni (slika 6.23). Odrediti kinetičku energiju kupe i njen moment impulsa u laboratorijskom sistemu reference.

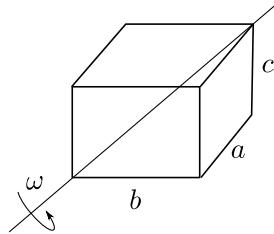
**6.9.** Rešiti prethodni zadatak ako je vrh kupe učvršćen u tački koja je na rastojanju  $R$  od horizontalne ravni (slika 6.24). Kupa ne proklizava po horizontalnoj podlozi.

**6.10.** Homogena kocka stranice  $a$  i mase  $m$  rotira oko jedne od svojih glavnih dijagonala konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$ . Odrediti kinetičku energiju kocke.

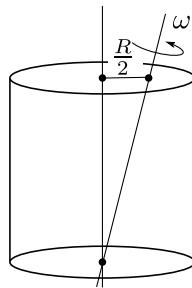
**6.11.** Homogen pravougani kvadar ivica  $a$ ,  $b$  i  $c$  i mase  $m$  rotira oko dijagonale jedne svoje strane čije su dimenzije  $b \times c$ . Ugaona brzina rotacije je  $\omega$ . Odrediti kinetičku energiju kvadra.

**6.12.** Homegen valjak poluprečnika  $R$ , visine  $h$  i mase  $m$  rotira oko ose koja prolazi kroz centar donje osnove i tačku koja pripada gornjoj osnovi i nalazi se na rastojanju  $R/2$  od centra osnove. Ugaona brzina rotacije je  $\omega$ . Odrediti kinetičku energiju valjka.

**6.13.** Homegena pravougaona ploča mase  $m$ , dužine  $a$  i širine  $b$  rotira konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko jedne dijagonale, slika 6.27. Odrediti:



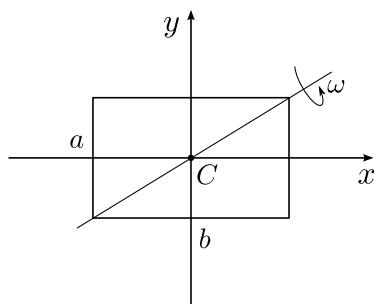
Slika 6.25: Slika uz zadatak 6.10.



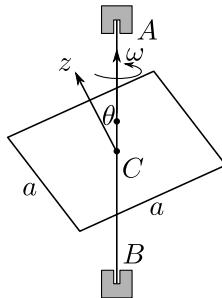
Slika 6.26: Slika uz zadatak 6.12.

- (a) glavne pravce i glavne momente inercije u sistemu čiji je koordinatni početak u centru ploče;
- (b) moment impulsa ploče;
- (c) moment spoljašnjih sila koje deluju na ploču.

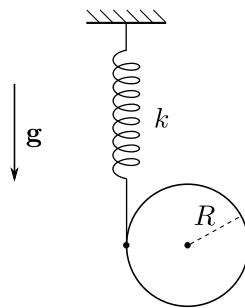
**6.14.** Kroz centar homogene, tanke kvadratne ploče, mase  $m$  i stranice  $a$  prolazi tanak štap, dužine  $l$  i zanemarljive mase. Štap zaklapa ugao  $\theta$  sa normalom na ploču. Štap je učvršćen u tačkama  $A$  i  $B$  kao na slici 6.28. Ploča rotira stalnom ugaonom brzinom  $\omega$ .



Slika 6.27: Slika uz zadatak 6.13.



Slika 6.28: Slika uz zadatak 6.14.



Slika 6.29: Slika uz zadatak 6.15.

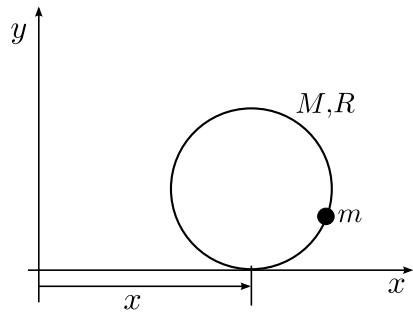
- (a) Naču moment impulsa ploče u sistemu glavnih centralnih osa inercije, i u laboratorijskom sistemu. Koordinatni početak laboratorijskog sistema se poklapa sa centrom mase ploče.
- (b) Odrediti komponente momenta sile koji deluje na sistem da bi se on kretao kako je navedeno. Naći ih u sopstvenom i u laboratorijskom sistemu.
- (c) Odrediti sile reakcije u tačkama A i B.

**6.15.** Na valjak mase  $m$  i poluprečnika  $R$  namotan je konac koji je povezan sa oprugom konstante elastičnosti  $k$ , kao na slici 6.29. Opruga je učvršćena za horizontalni zid. Nominalna dužina opruge je  $l$ . Naći lagranžijan sistema i Lagranževe jednačine.

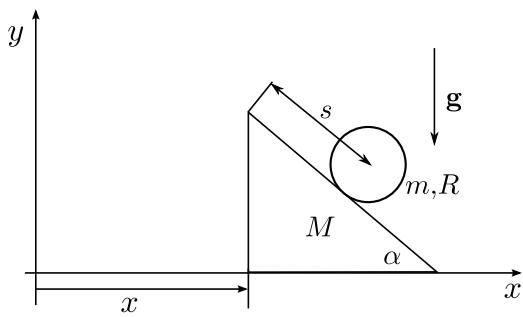
**6.16.** Čestica mase  $m$  klizi sa unutrašnje strane obruča mase  $M$  i radijusa  $R$ . Obruč se kreće bez klizanja po horizontalnom stolu. Naći frekvencu malih oscilacija čestice, kada je u blizini dodira obruča sa stolom.

**6.17.** Obruč mase  $m$  i radijusa  $R$  kotrlja se bez klizanja po strmoj ravni mase  $M$ . Nagibni ugao strme ravni je  $\alpha$ , i ona može da se kreće po horizontalnom glatkom stolu. Naći Lagranževe jednačine kretanja.

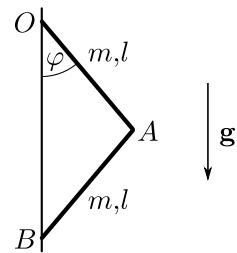
**6.18.** Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja sistema sa slike 6.18; OA i AB su tanki štapovi, oba mase  $m$  i dužine  $L$ , koji su zglobno spojeni u tački A. Štap OA rotira ( $O_{xyz}$  ravni) oko tačke O, dok kraj B štapa AB klizi duž vertikalne ose. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju koje je usmereno vertikalno naniže.



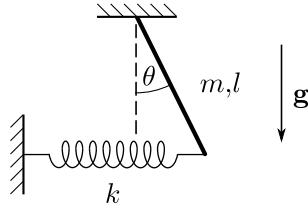
Slika 6.30: Slika uz zadatak 6.16.



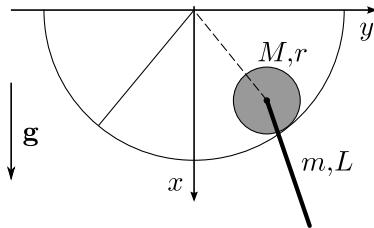
Slika 6.31: Slika uz zadatak 6.17.



Slika 6.32: Slika uz zadatak 6.18.



Slika 6.33: Slika uz zadatak 6.19.



Slika 6.34: Slika uz zadatak 6.20.

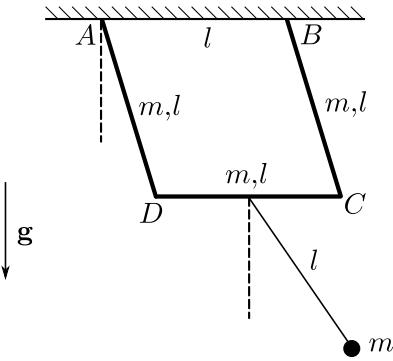
**6.19.** Jedan kraj homogenog štapa mase  $m$  i dužine  $L$  je fiksiran. Drugi kraj štapa povezan je sa vertikalnim zidom elastičnom oprugom zanemarljive mase, konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ ; vidi sliku 6.33. Kada je štap u vertikalnom položaju opruga je neistegnuta. Štap može da rotira u vertikalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz fiksirani kraj štapa. Naći frekvencu malih oscilacija štapa. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

**6.20.** Homogeni štap mase  $m$  i dužine  $L$  fiksiran je jednim svojim krajem za centar diska radijusa  $r$  i mase  $M$ . Disk se kotrlja bez klizanja po unutrašnjosti nepokretnog cilindra radijusa  $R$ . Sastaviti lagranžijan sistem. Ako je  $M = 2m$  i  $R = 2L = 4r$ , odrediti karakteristične frekvence u slučaju malih oscilacija.

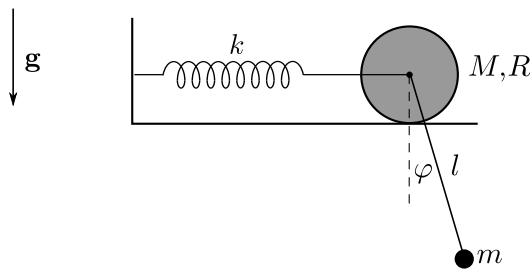
**6.21.** Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja homogene kupe mase  $m$  i visine  $h$  čija se baza, radijusa  $R$ , kotrlja bez klizanja po glatkoj ravnoj horizontalnoj podlozi, dok joj je vrh fiksiran u jednoj tački podloge (u koordinatnom početku). Ugao izmedju ose kupe i ma koje od njenih izvodnica je  $\alpha$ .

**6.22.** Glatka prizma mase  $m$ , visine  $h$  i nagibnog ugla  $\alpha$  može slobodno da klizi po glatkoj horizontalnoj podlozi duž jednog pravca ( $x$ -ose). Tanki homogeni disk mase  $M$  i radijusa  $R$  nalazi se na vrhu prizme (na visini  $h$ ) i iz mirovanje počinje da se kotrlja niz strmu ravan prizme bez klizanja. Naći ubrzanje prizme. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju usmerenom vertikalno naniže.

**6.23.** Homogena polulopta, mase  $m$  i poluprečnika  $R$  nalazi se na glatkoj horizontalnoj podlozi. Naći lagranžijan i Lagranževe jednačine kretanja polulopte. Odrediti frekvencu oscilovanja polulopte u slučaju malih oscilacija.



Slika 6.35: Slika uz zadatak 6.24.



Slika 6.36: Slika uz zadatak 6.25.

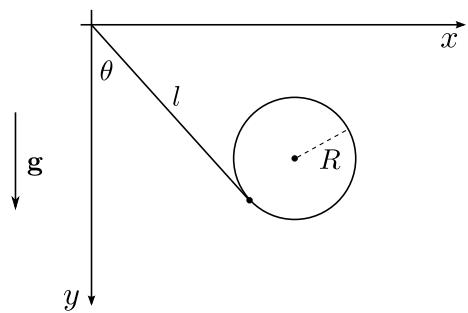
**6.24.** Tri identična štapa masa  $m$  i dužina  $l$  zglobno su spojena kao na slici 6.35. Za sredinu horizontalnog štapa obešeno je matematičko klatno dužine  $l$  i mase  $m$ . Rastojanje između tačaka u  $A$  i  $B$  je takođe  $l$ . Sastaviti lagranžijan i jednačine kretanja. Odrediti sopstvene frekvencije ovog sistema.

**6.25.** Disk mase  $M$  i radijsa  $R$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi, kao što je prikazano na slici 6.36. Za centar diska obešeno je matematičko klatnom mase  $m$  i dužine  $l$ . Ako je konstanta elastičnosti opruge  $k$  odrediti lagranžijan i jednačine kretanja ovog sistema.

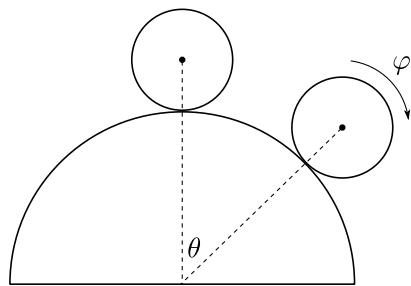
**6.26.** Na obruč mase  $m$  i radijusa  $R$  namotan je konac. Gornji kraj konca je učvršćen i obruč može da se kreće u vertikalnoj ravni, kao što je prikazano na slici 6.37. Naći lagranžijan ovog sistema.

**6.27.** Kugla mase  $m$  i radijusa  $R_1$  kotrlja se bez klizanja po spoljašnjoj strani polusfere radijusa  $R_2$ . U početnom trenutku kugla se nalazila na vrhu polusfere. Naći lagranžijan sa množiteljima veza,  $\tilde{L}$ . Odrediti ugao kada se kugla odvoji od polusfere.

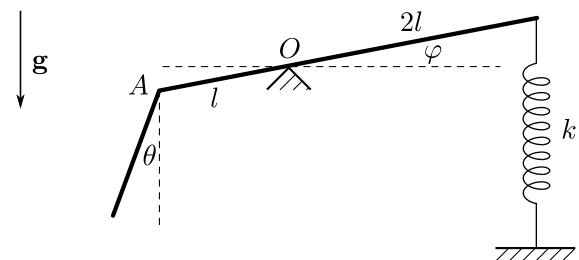
**6.28.** Dva štapa dužina  $3l$  i  $l$  spojena su u zglobu  $A$  kao na slici 6.39. Opruga je nedeformisana kada je veći štap horizontalan. Odrediti frekfence malih oscilacija ovog sistema.



Slika 6.37: Slika uz zadatak 6.26.



Slika 6.38: Slika uz zadatak ??.



Slika 6.39: Slika uz zadatak 6.28.



# Glava 7

## Relativno kretanje

U ovoj glavi analiziraćemo kretanje tela u neinercijalnim sistemima reference u okviru Lagranževog formalizma. U prva dva poglavlja nadjena je veza između brzine i ubrzanja čestice u inercijalnom i neinercijalnom sistemu. Zatim, u narednom poglavlju je određen lagranžijan u neinercijalnom sistemu pomoću koordinatne transformacije. Na kraju je analizirano kretanje Fukovog klatna.

### 7.1 Veza između brzina čestice u dva sistema

Neka je  $S$  nepokretan inercijalni sistem, a  $S'$  sistem koji se na proizvoljan način kreće u odnosu na sistem  $S$ . Kretanje primovanog sistema je u opštem slučaju kombinacija translatornog i rotacionog kretanja. Primovani sistem je neinercijalan referentni sistem. Naš zadatak je da ispitamo dinamiku kretanja čestica posmatrano iz oba sistema. Prvo ćemo naći vezu izmedju brzina čestice u sistemu  $S$  i u  $S'$ . Radijus vektor čestice u sistemu  $S$  obeležićemo sa  $\mathbf{r}$ , dok radijus vektor ove čestice u neinercijalnom sistemu  $S'$  je  $\mathbf{r}'$ . Veza izmedju ovih vektora je

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t), \quad (7.1.1)$$

gde je  $\mathbf{r}_0$  radijus vektor koordinatnog početka sistema  $S'$ . Diferenciranje gornje jednačine po vremenu u sistemu  $S$  daje

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_S = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \Big|_S + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Big|_S. \quad (7.1.2)$$

Primenom Koriolisove teoreme, sa diferenciranja po vremenu u sistemu  $S$  preći ćemo na diferenciranje u sistemu  $S'$ :

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Big|_S = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (7.1.3)$$

gde je  $\boldsymbol{\omega}$  ugaona brzina rotacije sistema  $S'$ . Tako dolazimo do

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (7.1.4)$$

gde je  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_S$  brzina čestice u fiksnom sistemu;  $\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Big|_{S'}$  brzina čestice u sistemu  $S'$ . Brzina  $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \Big|_S$  je brzina pola sistema  $S'$  u sistemu  $S$ . Relacija (7.1.4) je veza izmedju brzina čestice u odnosu na inercijalni i pokretni sistem.

## 7.2 Veza izmedju ubrzanja čestice u dva sistema

Diferencirajmo izraz (7.1.4) po vremenu u fiksnom sistemu. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_S &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}\Big|_S + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}\Big|_S + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\Big|_S \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_S \\ &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}\Big|_S + \frac{d\mathbf{v}'}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right).\end{aligned}\quad (7.2.5)$$

Primenili smo Koriolisovu teoremu. Ubrzanje čestice u sistemu  $S$  je  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_S$ , a u sistemu  $S'$  je  $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}\Big|_{S'}$ , dok je  $\mathbf{a}_0$  ubrzanje pola sistema  $S'$ . Prema tome veza izmedju ubrzanja čestice je

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (7.2.6)$$

Član  $\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$  je Koriolisovo ubrzanje, dok je  $\mathbf{a}_{\text{cf}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  centrifugalno ubrzanje.

## 7.3 Dinamika relativnog kretanja

Neka se čestica kreće u potencijalu  $V(\mathbf{r})$  za posmatrača u inercijanom sistemu sistemu  $S$ . Lagranžian je dat sa

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (7.3.7)$$

Već smo ranije rekli da je Hamiltonov princip nezavistan od izbora koordinatnog sistema; drugim rečima Lagranževe jednačine važe u proizvoljnom sistemu koordinata. To znači da smenom promenljivih

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'\end{aligned}\quad (7.3.8)$$

u lagranžijanu (7.3.7) prelazimo u neinercijalni sistem. Tako dobijamo lagranžian u sistemu  $S'$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}'^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}' + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\right) - U(\mathbf{r}'), \quad (7.3.9)$$

gde je  $V(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}') = U(\mathbf{r}')$ . Dalje ćemo transformisati tri člana u lagranžijanu (7.3.9) koja sadrže brzinu pola primovanog sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}' + 2\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= 2\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_0^2 \\ &= \mathbf{v}_0 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 + 2\mathbf{r}')\Big|_S \\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{r}_0 + 2\mathbf{r}')\right)\Big|_S - \mathbf{a}_0 \cdot (\mathbf{r}_0 + 2\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (7.3.10)$$

U zadnjem redu dobili smo član koji je totalni vremenski izvod funkcije koja zavisi od primovanih koordinata. Ovaj član ćemo odbaciti, jer takvi članovi ne utiči na jednačine kretanja. Dakle lagranžian postaje

$$L = \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}'^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 + 2\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}'\right) - U(\mathbf{r}'). \quad (7.3.11)$$

Ranije smo pokazali da je

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 &= \mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\omega}^2 - (\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \\ &= \boldsymbol{\omega}^2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 - \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j x'_i x'_j . \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

Slično je i

$$\mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \sum_{i=1}^3 v'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i = \sum_{i=1}^3 x'_i (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega})_i . \quad (7.3.13)$$

Primenom gornjih formula, lako se nalaze parcijalni izvodi lagranžijana po Dekartovim koordinatama čestice u primovanom sistemu odnosno po odgovarajućim brzinama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v'_i} &= m v'_i + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')_i \\ \frac{\partial L}{\partial x'_i} &= m \boldsymbol{\omega}^2 x'_i - m(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \omega'_i + m(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega})_i - m \mathbf{a}_{0i} - \frac{\partial U}{\partial x'_i} . \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

Lagranževe jednačine

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x'_i} = 0 \quad (7.3.15)$$

onda postaju

$$m \mathbf{a}' = -m \mathbf{a}_0 - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') + 2m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} + m \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'} . \quad (7.3.16)$$

Dobili smo jednačinu kretanja čestice u neinercijalnom sistemu. Ovaj rezultat je poznat iz kursa Opšte fizike. Na česticu u neinercijalnom sistemu pored prave sile  $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}$  deluju i tzv. inercijalne odnosno fiktivne sile. Inercijalne sile nisu uzrokovane interakcijom čestice sa drugim telima, već su posledica neinercijalnosti koordinatnog sistema. Sila

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} = 2m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

naziva se Koriolisovom silom i deluje na česticu koja se kreće brzinom  $\mathbf{v}'$  u odnosu na sistem koji rorira ugaonom brzinom  $\boldsymbol{\omega}$ . Inercijalna sila

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -m((\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}') \quad (7.3.17)$$

se naziva centrifugalnom silom. Iz jednačine (7.3.16) vidimo da u neinercijalnim sistemima ne važi  $m \mathbf{a}' = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}'}$ , jer se na desnoj strani ove jednačine pojavljuju inercijalne sile. Ako pored stvarnih sile dodamo još i inercijane sile onda drugi Njutnov zakon zadržava istu formu kao u inercijanim sistemima. Ovo znači da je neinercijalnost sistema poništена uvodjenjem inercijalnih sila.

## 7.4 Fukovo klatno

U inercijalnim sistima klatno osciluje u jednoj ravni. U ovoj lekciji analiziraćemo kretanje klatna u sistemu vezanom za Zemlju. Videćemo da ravan oscilovanja klatna u sistemu vezanom za Zemlju, usled delovanja Koriolisove sile, rotira. Neka je klatno učvršćeno u tački  $P$  koja je na  $z$  osi. Koordinatni početak je na površini Zemlje, a osa  $z$  je radijalnog pravca. Prepostavićemo da je dužina klatna  $l$  velika i da su oscilacije male. Jednačina veze je

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2. \quad (7.4.18)$$

Pošto je  $z$  malo, tj.  $z^2 \ll x^2 + y^2$  u jednačini veze zanemarićemo član  $z^2$ . Veza onda postaje

$$z = \frac{1}{2l}(x^2 + y^2). \quad (7.4.19)$$

U ovom slučaju lagranžian (7.3.11) postaje

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + m\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - mgz. \quad (7.4.20)$$

Ugaona brzina rotacije Zemlje,

$$\omega = \frac{2\pi}{3600\text{s}} = 7,27 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$$

je mala, pa smo kvadratni član po ugaonoj brzini u lagranžijanu zanemarili. Dalje ćemo zanemariti članove u lagranžijanu proporcionalne sa  $z$  odnosno  $\dot{z}$ , pa je lagranžian dat sa

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_z(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2), \quad (7.4.21)$$

gde je  $\omega_z = \omega \sin \psi$ . Ugao  $\psi$  je geografska širina tačke u kojoj se nalazi klatno. Lagranževe jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_z\dot{y} - \frac{g}{l}x \\ \ddot{y} &= -2\omega_z\dot{x} - \frac{g}{l}y. \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

Da bismo rešili ovaj sistem jednačina uvedodimo novu promenljivu  $\xi = x + iy$ . Množenjem druge Lagranževe jednačine sa  $i$  i sabiranjem sa prvom dobijamo

$$\ddot{\xi} + 2i\omega_z\dot{\xi} + \frac{g}{l}\xi = 0. \quad (7.4.23)$$

Rešenje za  $\xi$  tražićemo u obliku  $\xi = e^{iBt}$ , gde je  $B$  konstanta. Zamenom u diferencijalnu jednačinu dobijamo dva rešenja za konstantu  $B$ :

$$B_{1,2} = \omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \frac{g}{l}}, \quad (7.4.24)$$

pa je rešenje jednačine (7.4.23) dato sa

$$\xi = A_1 e^{iB_1 t} + A_2 e^{iB_2 t}, \quad (7.4.25)$$

gde su  $A_{1,2}$  integracione konstante. Neka su početni uslovi  $x(t=0) = x_0$ ,  $y(t=0) = 0$ ,  $\dot{x}(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ . Rešenje jednačina kretanja je

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{\omega'} \left( \omega' \cos(\omega_z t) \cos(\omega' t) + \omega_z \sin(\omega_z t) \sin(\omega' t) \right) \\ y &= \frac{x_0}{\omega'} \left( \omega_z \cos(\omega_z t) \sin(\omega' t) - \omega' \sin(\omega_z t) \cos(\omega' t) \right), \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

gde je  $\omega' = \sqrt{\omega_z^2 + g/l}$ . Ako je dužina klatna  $l = 20\text{m}$  onda je  $\omega' = 0,7\text{s}^{-1}$ . Vidimo da je  $\omega_z^2 \ll g/l$ , pa jednačine kretanja možemo aproksimirati sa

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega_z t) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \\ y &= -x_0 \sin(\omega_z t) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right). \end{aligned} \quad (7.4.27)$$

Kada Zemlja ne bi rotira klatno bi oscilovalo u  $Oxz$  ravni. Usled rotacije Zemlje ravan oscilovanja rotira u smeru kazaljke na satu ugaonom brzinom  $\omega_z$ .

## 7.5 Zadaci

**7.1.** Pokazati da pri slobodnom padanju tela sa visine  $h$  čestica skreće ka istoku za

$$d = \sqrt{\frac{8h^3}{9g^3}} \omega \cos \psi,$$

gde je  $\psi$  geografska širina mesta na severnoj hemisferi gde telo pada.



# Glava 8

## Hamiltonov formalizam

Ova glava je posvećena Hamiltonovom formalizmu, koji je alternativa Lagranževom formalizmu. Osnovna veličina u Lagranževom formalizmu je lagranžijan,  $L(q, \dot{q}, t)$ . On je funkcije generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena. Primenom Hamiltonovog principa dobijaju se Lagranževe jednačine kretanja mehaničkih sistema. U Hamiltonovoj formulaciji osnovna veličina je hamiltonijan. Hamiltonijan je funkcija generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i eventualno vremena. Dakle, umesto generalisanih brzina uvodimo generalisane impulse kao nezavisne promenljive. Ovaj postupak, u kome sa koordinata i brzina prelazimo na koordinate i impulse kao nezavisne promenljive naziva se Ležandrova transformacija. Konstrukcija hamiltonijana biće izložena u prva dva poglavlja ove glave. U narednom poglavlju naći ćemo Hamiltonove jednačine kretanja mehaničkih sistema. One su analogne Lagranževim jednačinama. U poslednjem poglavlju uvešćemo Poasonovu zagradu koja igra važnu ulogu u evoluciji mehaničkih sistema.

Pitanje, zašto pored Lagranževog uvodimo još jedan formalizam, je potpuno legitimno. U Lagranževom formalizmu jednačine kretanja se nalaze i rešavaju lakše nego u Hamiltonovom. Medjutim, Hamiltonov metod je značajan zbog njegove dublje veze sa kvantnom mehanikom. Pored toga, perturbativna analiza mnogih kompleksnih dinamičkih sistema je jednostavnija u Hamiltonovom formalizmu.

### 8.1 Ležandrova transformacija

Ovo poglavlje je kratki matematički uvod u kojem ćemo uvesti Ležandrovu transformaciju. Neka je  $f = f(x, y)$  funkcija dve nezavisne promenljive  $x$  i  $y$ . Definišimo novu funkciju  $g$  sa

$$g = yu - f(x, y) , \quad (8.1.1)$$

gde smo uveli novu promenljivu  $u$ . Smatrujući da su  $x, y$  i  $u$  nezavisne promenljive, diferencijal funkcije  $g$  je

$$dg = \left( u - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + ydu - \frac{\partial f}{\partial x} dx . \quad (8.1.2)$$

Ako sada izaberemo da je

$$u = \frac{\partial f}{\partial y} , \quad (8.1.3)$$

funkcija  $g$  je funkcija stare promenljive  $x$  i nove promenljive  $u$ . Promenljiva  $x$  je tzv. pasivna, a promenljiva  $y$  aktivna varijabla. Funkcija  $g = g(x, u)$ , koju nazivamo Ležandrovom transformacijom funkcije  $f(x, y)$ , sadrži istu informaciju kao i funkcija  $f = f(x, y)$ . Mi možemo iz funkcije  $g(x, u)$  ponovo generisati funkciju  $f(x, y)$ . Ležandrova transformacija koju smo uveli na primeru funkcije koja zavisi od dve promenljive, se može lako generalisati na funkcije koje sadrže više od dve promenljive.

**Primer 1.** Neka je  $f = e^x y^2$ . Odrediti njen Ležandrov transform  $g(x, u)$ .

Rešenje: Iz

$$u = \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x \quad (8.1.4)$$

sledi

$$y = \frac{u}{2}e^{-x}$$

odakle je

$$g = uy(x, u) - f(x, y(x, u)) = \frac{1}{4}u^2e^{-x} . \quad (8.1.5)$$


---

## 8.2 Hamiltonian

Lagranđian zavisi od generalisanih koordinata i generalisanih brzina. Hamiltonian je Ležandrova transformacija lagranđijana, gde se umesto generalisanih brzina koriste generalisani impulsi kao promenljive. Drugim rečima generalisane koordinate su pasivne, a generalisane brzine aktivne varijable. Hamiltonian je

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) , \quad (8.2.6)$$

gde moramo izraziti generalisane brzine preko generalisanih koordinata i generalisanih impulsa. Veza izmedju generalisanih impulsa i brzina se dobija iz sistema jednačina

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad (8.2.7)$$

koje imaju oblik  $p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Iz ovog sistema jednačina odredujemo generalisane brzine kao funkcije koordinata i impulsa,  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Po teoremi o egzistenciji inverzne funkcije sistem jednačina (8.2.7) se može rešiti po generalisanim brzinama ako je

$$\det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0 . \quad (8.2.8)$$

Matrica

$$H_{ij} = \left( \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

se naziva Hesovom matricom.

Hamiltonian se poklapa numerički sa generalisanom energijom (3.3.21), ali naglasimo to još jednom, generalisane brzine moraju biti izražene preko generalisanih impulsa i koordinata. Dakle, hamiltonijan je funkcija generalisanih koordinata i generalisanih impulsa

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) ,$$

što ćemo mi kraće pisati kao  $H(q, p, t)$ .

Nadjimo hamiltonijan harmonijskog oscilatora, mase  $m$  i konstante elastičnosti  $k$ . Lagranžijan je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 . \quad (8.2.9)$$

Generalisani impuls je  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  odakle je  $\dot{x} = p_x/m$ . Hamiltonijan je

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} - L \\ &= p_x \dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 , \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

gde smo u poslednjem koraku eliminisali generalisaniu brzinu  $\dot{x}$ .

## 8.3 Hamiltonove jednačine kretanja

Kao što smo rekli, hamiltonijan je

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) . \quad (8.3.11)$$

Diferenciranjem desne strane jednačine (8.3.11) dobija se

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt .$$

U ovom izrazu pojavljuju se diferencijali impulsa, koordinata, brzina i vremena. Generalisani impulsi su definisani prema (8.2.7) tako da se članovi uz  $d\dot{q}_i$  krate. Na taj način se eliminisu generalisane brzine kao nezavisno promenljive. Primenom Lagranževih jednačina

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (8.3.12)$$

dobijamo

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (8.3.13)$$

Hamiltonian je funkcija generalisanih koordinata, impulsa i vremena, pa važi

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \quad (8.3.14)$$

Poredjenjem (8.3.14) i (8.3.13) dobijamo

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} , \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} . \quad (8.3.16)$$

Jednačine (8.3.15) su Hamiltonove ili kanonske jednačine kretanja. One čine sistem od  $2n$  diferencijalnih jednačina prvog reda, koji je ekvivalentan sa  $n$  Lagranževih jednačina, koje su diferencijalne jednačine drugog reda. Da bismo našli rešenje Hamiltonovih jednačina potrebno je da znamo  $2n$  početnih uslova:

$$p_i(t=0) = p_{0i}, \quad q_i(t=0) = q_{0i} . \quad (8.3.17)$$

**Primer 1.** Čestica mase  $m$  se kreće po površini vertikalnog cilindra poluprečnika  $R$ . Čestica je spojena oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l$  sa tačkom  $O$  na osi simetrije cilindra. Uzeti da je osa simetrije  $z$  osa, a da je  $O$  koordinatni početak. Na česticu deluje i gravitaciona sila. Naći hamiltonian i kanonske jednačine kretanja.

Rešenje: Sistem ima dva stepena slobode, generalisane koordinate su  $\varphi$  i  $z$ . Lagranžijan je

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2}k(\sqrt{R^2 + z^2} - l)^2 . \quad (8.3.18)$$

Generalisani impulsi su:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} , \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} . \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

Hamiltonian je

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz + \frac{1}{2}k(\sqrt{R^2 + z^2} - l)^2 . \quad (8.3.20)$$

Hamiltonove jednačine su

$$\begin{aligned}\dot{p}_z &= -mg + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}(\sqrt{R^2 + z^2} - l) , \\ \dot{p}_\varphi &= 0 , \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} , \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mR^2} .\end{aligned}\tag{8.3.21}$$


---

## 8.4 Fazni prostor

Generalisane koordinate i impulsi su tzv. fazne promenljive. Dimenzija faznog prostora je  $2n$ . Koordinate tačke u ovom prostoru su  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Fazna tačka kompletno određuje stanje sistema u datom trenutku vremena. Naime, iz brojeva  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  se kompletno mogu odrediti položaji i brzine, odnosno impulsi svake čestice u sistemu u datom trenutku vremena. Pri evoluciji sistema fazna tačka opisuje faznu trajektoriju, koja je naravno određena Hamiltonovim jednačinama i početnim uslovima.

## 8.5 Hamiltonove jednačine i varijacioni princip

Lagranževe jednačine kretanja izveli smo iz principa najmanjeg dejstva u konfiguracionom prostoru. Sada ćemo pokazati da se variranjem dejstva u faznom prostoru mogu dobiti Hamiltonove jednačine. Prethodno ćemo lagranžian u dejstvu, izraziti preko hamiltonijana

$$S_H = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right) .\tag{8.5.22}$$

Variranjem fazne trajektorije podrazumeva da koordinate i impulse variramo nezavisno:

$$\begin{aligned}q_i(t) &\rightarrow \tilde{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) , \\ p_i(t) &\rightarrow \tilde{p}_i(t) = p_i(t) + \delta p_i(t) .\end{aligned}\tag{8.5.23}$$

Varijacija dejstva je infinitezimalna promena dejstva pri prelasku sa jedne na drugu infinitezimalno blisku trajektoriju u faznom prostoru, tj.

$$\begin{aligned}\delta S_H &= \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] + \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} .\end{aligned}\tag{8.5.24}$$

Primenili smo

$$p_i \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i .\tag{8.5.25}$$

Ako zahtevamo da su varijacije generalisanih koordinata na krajevima vremenskog intervala jednake nuli, tj.  $\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0$ , onda poslednji član u (8.5.24) iščezava. Primetimo da nije neophodno da slično pretpostavimo i za varijacije generalisanih impulsa. Varijacije generalisanih koordinata i impulsa su nezavisne, pa iz principa najmanjeg dejstva,  $\delta S_H = 0$ , sledi

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}\quad (8.5.26)$$

Dobili smo Hamiltonove jednačine kretanja.

Ranije smo rekli da je lagranžian  $L(q, \dot{q}, t)$  odredjen do na vremenski izvod funkcije koja zavisi od generalisanih koordinata i vremena. Lagranžian u dejstvu (8.5.22) takodje nije jednoznačno odredjen. Dodaćemo mu član

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt}.$$
(8.5.27)

Funkcija  $F$  zavisi pored koordinata i od generalisanih impulsa. Uzećemo da su varijacije i generalisanih koordinata i generalisanih impulsa u  $t_i$  i  $t_f$  jednake nuli, tj.

$$\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = \delta p_i(t_i) = \delta p_i(t_f) = 0.$$
(8.5.28)

Tada je

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dF(q, p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_i}^{t_f} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \Big|_{t_i}^{t_f} \right) = 0.$$
(8.5.29)

Dakle, dejstvu  $S_H$  možemo dodati član

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dF(q, p, t)}{dt}.$$
(8.5.30)

Ako su varijacije generalisanih koordinata, ali i impulsa u početnom i krajnjem trenutku jednaki nuli, onda ovaj dodatni član ne utiče na jednačine kretanja.

## 8.6 Poasonove zagrade

Neka su  $f = f(q, p, t)$  i  $g = g(q, p, t)$  dve funkcije faznih promenljivih i vremena. Poasonova zagrada je definisana sa

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$
(8.6.31)

Poasonova zagrada je antisimetrična, tj.

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$
(8.6.32)

Parcijalni izvodi su bilinearni, odakle sledi da je Poasonova zagrada bilinearna:

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}.$$
(8.6.33)

U prethodnom izrazu  $c_1$  i  $c_2$  su konstante, a  $f_1, f_2$  i  $g$  su funkcije faznih promenljivih. Poasonova zagrada zadovoljava Lajbnicovo pravililo

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_2, g\} f_1 . \quad (8.6.34)$$

Konačno, za svake tri funkcije faznih promenljivih važi, tzv. Jakobijev identitet:

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0 . \quad (8.6.35)$$

Nadjimo Poasonovu zagrdu izmedju koordinata i impulsa. Po definiciji imamo

$$\begin{aligned} \{q_m, p_l\} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial q_m}{\partial q_i} \frac{\partial p_l}{\partial p_i} - \frac{\partial q_m}{\partial p_i} \frac{\partial p_l}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_{mi} \delta_{li} = \delta_{ml} . \end{aligned} \quad (8.6.36)$$

Takodje, lako se pokazuje da važi  $\{q_m, q_l\} = \{p_m, p_l\} = 0$ . Poasonove zgrade izmedju generalisanih koordinata i impulsa:

$$\begin{aligned} \{q_m, p_l\} &= \delta_{ml} , \\ \{q_m, q_l\} &= 0 , \\ \{p_m, p_l\} &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.37)$$

nazivaju se fundamentalnim Poasonovim zgradama i one su od izuzetne važnosti u kvantnoj mehanici.

Vremenski izvod funkcije  $f(q, p, t)$  je

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} , \end{aligned} \quad (8.6.38)$$

gde smo u drugom koraku primenili Hamiltonove jednačine.

Potreban i dovoljan uslov da funkcija  $f(q, p, t)$  bude integral kretanja je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 . \quad (8.6.39)$$

Ako funkcija  $f$  ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. ako je  $f = f(q, p)$ , potreban i dovoljan uslov da funkcija  $f$  bude konstanta kretanja je

$$\{H, f\} = 0 . \quad (8.6.40)$$

Dakle, funkcija  $f(q, p)$  je integral kretanja ako je njena Poasonova zagrada sa hamiltonijanom jednaka nuli. Hamiltonian je integral kretanja ukoliko eksplisitno ne zavisi od vremena.

Ako su  $f(q, p)$  i  $g(q, p)$  konstante kretanja, onda je i njihova Poasonova zagrada takodje konstanta kretanja. Ovaj iskaz je poznat pod nazivom Poasonova teorema. Ona se lako proverava. Naime

$$\{\{f, g\}, H\} = -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} = 0 . \quad (8.6.41)$$

Primenili smo Jakobijev identitet, a zatim činjenicu da su  $f$  i  $g$  konstante kretanja. Poasonova teorema važi i za funkcije faznih promenljivih koje zavise od vremena, što se lako proverava.

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \{p_i, H\} &= \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial p_i}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \{q_i, H\} &= \sum_{i=l}^n \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial q_i}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \end{aligned} \quad (8.6.42)$$

Primenom gornjih rezultata Hamiltonove jednačine (8.3.15) se mogu prepisati u obliku

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} . \end{aligned} \quad (8.6.43)$$

Vremensku evoluciju sistema generiše hamiltonian preko Poasonove zgrade.

**Primer 1.** Moment impulsa čestice je  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

- a) Naći Poasonove zgrade izmedju komponenti angularnog momenta  $\{L_i, L_j\}$ .
- b) Naći  $\{L_i, L^2\}$ .
- c) Pokazati  $\{x_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k$  i  $\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}p_k$ .

Rešenje:

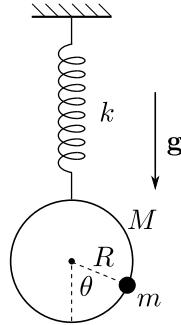
- a) Nadjimo npr. Poasonovu zgradu izmedju  $L_1$  i  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \{L_1, L_2\} &= \{x_2p_3 - x_3p_2, x_3p_1 - x_1p_3\} \\ &= x_2\{p_3, x_3\}p_1 + p_2\{x_3, p_3\}x_1 \\ &= -x_2p_1 + p_2x_1 = L_3 , \end{aligned} \quad (8.6.44)$$

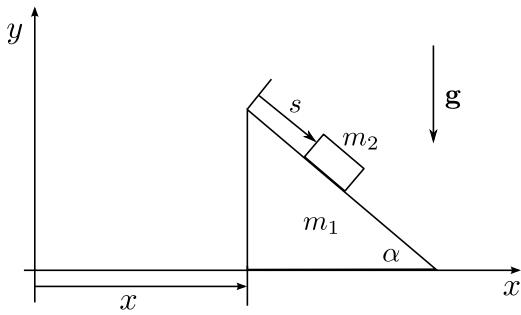
gde smo primenili fundamentalne Poasonove zgrade. Ostale Poasonove zgrade se proveravaju slično. Kompletan rezultat je  $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k$ . Preostali delovi se proveravaju analogno.

## 8.7 Zadaci

**8.1.** Čestica mase  $m$  kreće se bez trenja po paraboli  $y = ax^2$ , gde je  $a$  pozitivna konstanta.  $x$  je horizontalna, a  $y$  vertikalna osa. Čestica je oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l$  spojena sa koordinatnim početkom. Naći hamiltonian i Hamiltonove jednačine kretanja uzimajući  $x$  za generalisanu koordinatu.



Slika 8.1: Slika uz zadatak 8.6.



Slika 8.2: Slika uz zadatak 8.7.

**8.2.** Za dvojno matematičko klatno odrediti hamiltonijan i naći Hamiltonove jednačine kretanja.

**8.3.** Za sistem iz zadatka 2.2 naći hamiltonijan i sastaviti Hamiltonove jednačine kretanja.

**8.4.** Čestica mase  $m$  kreće se u potencijalu  $U = -k \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ , gde su  $\alpha$  i  $k$  konstante. Odrediti hamiltonijan i sastaviti Hamiltonove jednačine kretanja čestice.

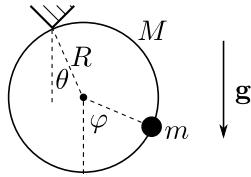
**8.5.** Čestica se kreće duž  $x$  ose u potencijalu

$$U(t, x) = \frac{k}{x} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

gde su  $k$  i  $\tau$  konstante. Naći lagranžijan i hamiltonijan sistema. Da li se hamiltonijan poklapa sa energijom čestice. Da li je energija čestice konstantna? Naći Hamiltonove jednačine kretanja.

**8.6.** Za oprugu konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$ , učvršćen je obruč mase  $M$  i radijusa  $R$ . Po obruču može da se kreće mala kuglica mase  $m$  bez trenja. Naći hamiltonijan i kanonske jednačine kretanja. Obruč se kreće samo translatoryno u vertikalnoj ravni.

**8.7.** Po prizmi mase  $m_1$  i nagibnog ugla  $\alpha$  klizi bez trenja telo mase  $m_2$ . Prizma se kreće bez trenja po horizontalnoj podlozi. Naći hamiltonijan i Hamiltonove jednačine kretanja za ovaj sistem.



Slika 8.3: Slika uz zadatak 8.8.

**8.8.** Obruč mase  $M$  i poluprečnika  $R$  učvršćen je u tački  $O$ . Po obruču može da klizi bez trenja kuglica mase  $m$ . Obruč se kreće u vertikalnoj ravni. Naći hamiltonian i kanonske jednačine kretanja.

**8.9.** Kretanje nanelektrisane čestice u polju magnetnog monopola može da se opiše lagranžijanom

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - a\dot{\varphi} \cos \theta ,$$

gde je  $a$  konstanta.

- (a) Naći hamiltonian nanelektrisane čestice.
- (b) Pokazati da je veličina  $rp_r - 2Ht$  integral kretanja.

**8.10.** Čestica mase  $m$  kreće se po cikloidi

$$\begin{aligned} x &= l(2\varphi + \sin(2\varphi)) \\ y &= l(1 - \cos(2\varphi)) \end{aligned}$$

u gravitacionom polju  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ . Uzeti  $\varphi$  za generalisanu koordinatu. Naći hamiltonian i Hamiltonove jednačine kretanja čestice.

**8.11.** Lagranžijan čestice iz sistema koji rotira ugaonom brzinom  $\boldsymbol{\omega}$  je

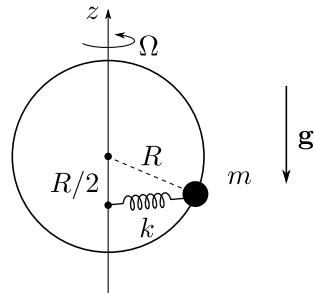
$$L = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')^2 - U(\mathbf{r}') .$$

Pokazati da je odgovarajući hamiltonian dat sa

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{P}) + U(\mathbf{r}') . \quad (8.7.45)$$

Naći kanonske jednačine kretanja. Komentarisati odnos ovih jednačina i Koriolisove teoreme.

**8.12.** Mala kuglica, mase  $m$  može bez trenja da klizi po obruču radijusa  $R$ . Kuglica je spojena oprugom konstante elastičnosti  $k$  i nominalne dužine  $l_0$  sa tačkom koja je na rastojanju  $R/2$  od centra obruča, slika 8.4. Obruč rotira stalnom ugaonom brzinom  $\Omega$  oko vertikalne ose. Naći hamiltonian sistema i jednačine kretanja.



Slika 8.4: Slika uz zadatak 8.12.

**8.13.** Izračunati sledeće Poasonove zgrade:

- (a)  $\{p_i, r^n\}$ ,
- (b)  $\{x_i, \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\}$ , gde je  $\mathbf{a}$  konstantni vektor,
- (c)  $\{L_i, x_j p_k\}$ ,
- (d)  $\{L_i, x^2 + y^2 + z^2\}$ .

**8.14.** Čestica mase  $m$  se kreće u potencijalu  $U(x, y, z)$ . Pokazati da je  $\{L_i, H\} = M_i$ , gde je  $H$  hamiltonijan čestice, a  $M_i$  su Dekartove projekcije momenta sile koji deluje na česticu.

**8.15.** Hamiltonijan trodimenzionog oscilatora je

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2}.$$

Pokazati da su komponente momenta impulsa  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  integrali kretanja.

**8.16.** Dat je hamiltonijan

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2.$$

Pokazati da su veličine  $F_1 = \left(p_1 + \frac{q_1}{2}\right)q_2$  i  $F_2 = q_1 q_2$  konstante kretanja. Naći  $\{F_1, F_2\}$ . Da li se dobija novi integral kretanja?

**8.17.** Pokazati da je  $\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m}t$  integral kretanja slobodne čestice.

**8.18.** Proveriti važenje Jakobijevog identiteta.

**8.19.** Čestica mase  $m$  kreće se u potencijalu  $U = k/r$ . Ranije smo pokazali da je Runge–Lencov vektor, definisan sa

$$\mathcal{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + mk\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (8.7.46)$$

integral kretanja. To je uradjeno direktno, primenom jednačina kretanja u poglavlju 5.5 i primenom Neterine teoreme u zadatku 3.4. Sada ćemo simetriju Keplarovog problema analizirati u okviru Hamiltonovog formalizma.

- (a) Pokazati da je Poasonova zagrada Runge–Lencov vektor i hamiltonijana jednaka nuli.  
 (b) Definišimo veličinu

$$\mathbf{D} = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{-2mE}},$$

gde je  $E$  energija čestice koja se kreće u privlačnom potencijalu. Pokazati da važi

$$\begin{aligned}\{D_i, D_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k \\ \{D_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} D_k \\ \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{ijk} L_k.\end{aligned}\tag{8.7.47}$$

Ove Poasonove zgrade pokazuju da je simetrija Keplerovog problema veća od rotacione simetrije trodimenzionalnog prostora. Zapravo, simetrija Keplerovog problema je rotaciona simetrija četvorodimenzionog prostora.

# Glava 9

## Kanonske transformacije

Trajektorija po kojoj se sistem kreće u konfiguracionom prostoru može se parametrizovati proizvoljnim izborom koordinata. Jedini uslov pri prelasku sa jednog na drugi skup koordinata je nesingularnost transformacije. Kroz mnoge primere smo videli da se konačne jednačine kretanja lakše nalaze ako izaberemo pogodne generalisane koordinate. U prvih šest poglavlja ove glave analiziraju se transformacije faznih promenljivih, tj. koordinata i impulsa kojima opisuјemo mehaničke sisteme, pri kojima se forma Hamiltonovih jednačina ne menja. Ove transformacije se nazivaju kanonskim transformacijama. Daćemo nekoliko definicija ovakvih transformacija. Osnovna je da su to transformacije koje ne menjaju Poasonove zgrade. U sedmom poglavlju uvešćemo Hamilton–Jakobijevu jednačinu. Preostali deo ove glave posvećen je integrabilnim sistemima i promenljivima dejstvo–ugao.

### 9.1 Funkcije generatrise kanonskih transformacija

Ranije smo pokazali da su Lagranževe jednačine kovariantne pri nesingularnim transformacijama koordinata

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t) , i = 1, \dots, n . \quad (9.1.1)$$

Sada ćemo ispitati pod kojim uslovima transformacije faznih koordinata daju ekvivalentan opis dinamike mehaničkih sistema. Prelaz sa koordinata  $(q, p)$  na nove koordinate  $(Q, P)$  dat je sa

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) , \\ p_i &\rightarrow P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) . \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Nove fazne koordinate su funkcije starih faznih promenljivih  $(q, p)$  i vremena. Relacije (9.1.2) moraju biti invertibilne, tj. stare fazne promenljive možemo izraziti u funkciji novih i vremena. Daćemo tri ekvivalentne definicije kanonskih transformacija. Prva je da je transformacija (9.1.2) kanonska ako ona čuva strukturu Hamiltonovih jednačina i to važi za sve dinamičke sisteme sa

$n$  stepeni slobode. Hamiltonove jednačine u kanonskim  $(q, p)$  koordinatama su

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\quad (9.1.3)$$

Transformacija (9.1.2) je kanonska ukoliko u novim kanonskim koordinatama Hamiltonove jednačine takodje važe:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\end{aligned}\quad (9.1.4)$$

Da bismo to pokazali potrebno je da nadjemo novi hamiltonijan sistema  $H' = H'(Q, P, t)$ . Novi hamiltonijan je funkcija novih faznih promenljivih i vremena. Videćemo da novi hamiltonijan nije dobijen samo prostom smenom faznih promenljivih u hamiltonijanu  $H(q, p, t)$ .

Hamiltonove jednačine u  $(q, p)$  koordinatama dobijene su iz principa minimalnog dejstva

$$\delta S_{qp} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = 0 , \quad (9.1.5)$$

dok se analogne jednačine u  $(Q, P)$  promenljivima dobijaju iz

$$\delta S_{QP} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H'(Q, P, t) \right) = 0 . \quad (9.1.6)$$

Jednačine kretanja dobijene iz (9.1.5) i (9.1.6) biće ekvivalentne ukoliko se podintegralni izrazi u (9.1.5) i (9.1.6) razlikuju do na vremenski izvod neke funkcije  $F$ , tj.

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - H'(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} . \quad (9.1.7)$$

Funkcija  $F$  se naziva generišućom funkcijom kanonske transformacije i njene varijacije u  $t = t_i$  i  $t = t_f$  moraju biti jednakim nulim. Ona može da zavisi od starih i novih faznih promenljivih i od vremena, tj. od  $4n + 1$  promenljive. Izmedju kanonskih promenljivih postoji  $2n$  veza datih sa (9.1.2), pa generišuća funkcija zavisi od  $2n$  faznih promenljivih i vremena. Izaberimo za početak da generišuća funkcija zavisi od starih i novih generalisanih koordinata, tj.  $F_1 = F_1(q, Q, t)$ . Ovu funkciju nazivamo generišućom funkcijom prvog tipa. Jasno je da je

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F_1}{\partial Q_l} \dot{Q}_l \right) . \quad (9.1.8)$$

Zamenom (9.1.8) u (9.1.7) i grupisanjem članova dobijamo

$$\sum_{l=1}^n \left( p_l - \frac{\partial F_1}{\partial q_l} \right) dq_l - \sum_{l=1}^n \left( P_l + \frac{\partial F_1}{\partial Q_l} \right) dQ_l + \left( H' - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0 . \quad (9.1.9)$$

Kako su  $q_i, Q_i$  i  $t$  nezavisne promenljive to dobijamo

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} , \quad (9.1.10)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} , \quad (9.1.11)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \quad (9.1.12)$$

Kada znamo funkciju  $F_1(q, Q, t)$  onda iz (9.1.10) i (9.1.11) možemo da odredimo vezu izmedju starih i novih kanonskih promenljivih, tj. kanonsku transformaciju. Zato se funkcija  $F_1$  naziva generatrisom, odnosno generišućom funkcijom kanonske transformacije. Preciznije, iz jednačina (9.1.10), ukoliko je

$$\left| \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \right| \neq 0 , \quad (9.1.13)$$

nalazimo zavisnost novih generalisanih koordinata,  $Q_k$  od polaznih faznih promenljivih. Drugim rečima, iz (9.1.10) dobijamo

$$Q_k = Q_k(q, p, t), \quad k = 1, \dots, n .$$

Zamenom dobijenih transformacija u (9.1.11) dobijamo  $P_k = P_k(q, p, t)$ . Dobili smo eksplicitan oblik kanonske transformacije. Novi hamiltonian je odredjen sa (9.1.12). Vidimo da ukoliko generišuća funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena novi hamiltonian je dobijen iz starog smenom promenljivih

$$H' = H(q(Q, P), p(Q, P)) . \quad (9.1.14)$$

Prethodno izvodjenje za generišuću funkciju prvog tipa  $F_1 = F_1(q, Q, t)$  pokazuje da je

$$dF_1 = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt \quad (9.1.15)$$

totalni diferencijal. Izaberimo sada da su nezavisne kanonske promenljive stare koordinate i novi impulsi,  $(q, P)$ . Ovo se postiže Ležandrovom transformacijom generatrise prvog tipa. Član  $P_i dQ_i$  u (9.1.15) prepisaćemo u obliku

$$P_i dQ_i = d(P_i Q_i) - Q_i dP_i . \quad (9.1.16)$$

Tako (9.1.15) postaje

$$d(F_1 + \sum_{i=1}^n Q_i P_i) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (H' - H) dt \quad (9.1.17)$$

odnosno, uvodeći generišuću funkciju drugog tipa  $F_2 = F_1 + \sum_{i=1}^n Q_i P_i$ , imamo

$$dF_2 = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (H' - H) dt . \quad (9.1.18)$$

Funkcija  $F_2 = F_2(q, P, t)$  je funkcija starih generalisanih koordinata, novih impulsa i vremena i naziva se generišućom funkcijom drugog tipa. Vidi se da je

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} , \quad (9.1.19)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} , \quad (9.1.20)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} . \quad (9.1.21)$$

Iz jednačina (9.1.19) možemo naći  $P_k = P_k(q, p, t)$ , ako je ispunjen uslov

$$\left| \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \right| \neq 0 . \quad (9.1.22)$$

Zamenom ovih jednačina u (9.1.20) dobijamo zavisnost novih generalisanih koordinata od starih koordinata, impulsa i vremena. Tako smo u potpunosti odredili kanonsku transformaciju.

Generatrisa trećeg tipa je funkcija starih impulsa  $p_i$  i novih generalisanih koordinata  $Q_i$ ,  $F_3 = F_3(p, Q, t)$ . Da bismo to postigli treba da

$$p_i dq_i = d(p_i q_i) - q_i dp_i \quad (9.1.23)$$

zamenimo u (9.1.15). Tako dobijamo

$$\begin{aligned} d\left(F_1 - \sum_{i=1}^n q_i p_i\right) &= dF_3(p, Q, t) \\ &= \sum_{i=1}^n (-q_i dp_i - P_i dQ_i) + (H' - H) dt , \end{aligned} \quad (9.1.24)$$

odakle je

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} , \quad (9.1.25)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} , \quad (9.1.26)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} . \quad (9.1.27)$$

Četvrti tip generišuće funkcije kanonskih transformacija je

$$F_4 = F_4(p, P, t) = F_2(q, P, t) - \sum_{i=1}^n q_i p_i , \quad (9.1.28)$$

pa je

$$dF_4 = \sum_{i=1}^n (Q_i dP_i - q_i dp_i) + (H' - H) dt . \quad (9.1.29)$$

Iz zadnjeg izraza dobijamo

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} , \quad (9.1.30)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} , \quad (9.1.31)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} . \quad (9.1.32)$$

Da bismo ispitali da li je neka transformacija kanonska ili nije, moramo naći funkcije generatrise ili pokazati da one ne postoje. Videćemo uskoro da postoje jednostavniji načini za proveru kanoničnosti transformacije faznih koordinata. Jedan od njih je pomoću Poasonovih zagrada. Recimo na kraju da u nekim slučajevima se ne može izvršiti Ležandrova transformacija, pa ne postoje sva četiri tipa generišuće funkcije kanonske transformacije.

## 9.2 Primer kanonskih transformacija

Hamiltonian harmonijskog oscilatora je

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} . \quad (9.2.33)$$

Nadjimo kanonsku transformaciju odredjenu generišućom funkcijom prvog tipa

$$F_1(q, \theta) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot \theta . \quad (9.2.34)$$

Nova generalisana koordinata je obeležena sa  $\theta$  umesto sa  $Q$  kao ranije. Novi impuls umesto sa  $P$  obeležićemo sa  $I$ . Razlog za ovakvu notaciju biće jasan kasnije. Dalje je

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot \theta , \\ I &= -\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 \theta} . \end{aligned} \quad (9.2.35)$$

Odavde je

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin \theta , \\ p &= \sqrt{2m\omega I} \cos \theta , \end{aligned} \quad (9.2.36)$$

odnosno

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \frac{m\omega q}{p} , \\ I &= \frac{1}{2m\omega} \left( p^2 + (m\omega)^2 q^2 \right) .\end{aligned}\quad (9.2.37)$$

Transformacija  $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$  ne zavisi eksplisitno od vremena. Novi hamiltonijan se dobija iz starog sменом promenljivih, tj. prelaskom sa  $(q, p)$  na  $(\theta, I)$  promenljive:

$$H' = \omega I . \quad (9.2.38)$$

Hamiltonove jednačine kretanja u  $(\theta, I)$  koordinatama su

$$\begin{aligned}\dot{I} &= -\frac{\partial H'}{\partial \theta} = 0 , \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H'}{\partial I} = \omega ,\end{aligned}\quad (9.2.39)$$

odakle je  $I = \alpha$  i  $\theta = \omega t + \beta$ , gde su  $\alpha$  i  $\beta$  konstante. Dakle, u novim koordinatama jednačine kretanja se trivijalno rešavaju. Nova generalisana koordinata  $\theta$  je ciklična, odgovarajući kanonski konjugovan impuls je konstantan. Novi impuls  $I$  naziva se akcijom, a nova koordinata uglom.  $(\theta, I)$  su tzv. ugao-akcija promenljive. U ovim koordinatama fazne linije su prave sa konstantnim  $I$ , dok  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Lako se vidi da je

$$\int pdq = 2I \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = 2\pi I . \quad (9.2.40)$$

Ovaj jednostavan primer je motivacija za generalizaciju na sisteme sa više stepeni slobode.

### 9.3 Infinitezimalne kanonske transformacije

Transformacija koja je generisana generatrisom drugog tipa  $F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i$  je jedinična transformacija, jer je

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i , \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i .\end{aligned}\quad (9.3.41)$$

Generišuću funkciju kanonske transformacije infinitezimalno blisku jediničnoj transformaciji predstavićemo u obliku

$$F_2 = \sum_{i=1}^n q_i P_i + \epsilon G(q, P, t) , \quad (9.3.42)$$

gde je  $\epsilon$  infinitezimalni parametar, a  $G(q, P, t)$  generator transformacije. Primenom (9.1.19) i (9.1.20) dobijamo

$$\begin{aligned} p_i &= P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i}, \\ Q_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i}, \end{aligned} \quad (9.3.43)$$

pa je

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i}, \\ P_i &= p_i - \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (9.3.44)$$

U poslednjem koraku iskoristili smo  $G(q, P, t) = G(q, p, t) + o(\epsilon)$ , jer se impulsi  $p_i$  i  $P_i$  razlikuju do na term reda  $\epsilon$ .

Ako izaberemo da je generator kanonske transformacije hamiltonijan  $G(q, p, t) = H(q, p, t)$  imamo

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i + \epsilon \dot{q}_i \\ P_i &= p_i - \epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = p_i + \epsilon \dot{p}_i. \end{aligned} \quad (9.3.45)$$

U zadnjem koraku primenili smo Hamiltonove jednačine kretanja. Iz dobijenog izraza je jasno da je  $\epsilon = dt$ . Zaključujemo da je hamiltonijan generator kretanja u vremenu. Ovim smo pokazali da je evolucija sistema

$$q_i(t) \rightarrow Q_i = q_i(t + \delta t), \quad p_i(t) \rightarrow P_i = p_i(t + \delta t) \quad (9.3.46)$$

kanonska transformacija.

## 9.4 Direktna provera

Kanonske transformacije smo definisali kao transformacije faznih promenljivih (9.1.2) koje ne menjaju Hamiltonove jednačine kretanja. Potreban i dovoljan uslov da ove transformacije budu kanonske je egzistencija generišuće funkcije  $F$ . U ovom poglavljiju daćemo još jedan kriterijum kanoničnosti neke transformacije. Razmatraćemo vremenski nezavisne transformacije

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \\ p_i &\rightarrow P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (9.4.47)$$

Transformacija (9.4.47) je kanonska ukoliko su izrazi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i), \quad &\sum_{i=1}^n (p_i dq_i + Q_i dP_i) \\ \sum_{i=1}^n (q_i dp_i + P_i dQ_i), \quad &\sum_{i=1}^n (-q_i dp_i + Q_i dP_i) \end{aligned} \quad (9.4.48)$$

totalni diferencijali. Pod ovim uslovima postoje generišuće funkcije. Potrebni i dovoljni uslovi da gornji izrazi budu totalni diferencijali, a samim tim i da data transformacija bude kanonska, su

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \Big|_{q,p} &= -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \Big|_{Q,P}, \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{q,p} &= \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \Big|_{Q,P}, \\ \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \Big|_{q,p} &= \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \Big|_{Q,P}, \\ \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \Big|_{Q,P} &= -\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \Big|_{q,p}.\end{aligned}$$

U ovim izrazima kanonske promenljive u indeksima parcijalnih izvoda označavaju nezavisne koordinate. Ovo je direktni način da proverimo da li je vremenski nezavisna transformacija kanonska.

**Primer 1.** Neka je transformacija  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  data sa

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \\ p &= \sqrt{2m\omega P} \cos Q.\end{aligned}\tag{9.4.49}$$

Pokazati da je ova transformacija kanonska.

Rešenje: Iz definicije transformacije imamo

$$\begin{aligned}p &= m\omega q \cot Q, \\ P &= \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}.\end{aligned}\tag{9.4.50}$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial Q} \Big|_q &= -\frac{m\omega q}{\sin^2 Q}, \\ \frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q &= \frac{m\omega q}{\sin^2 Q},\end{aligned}\tag{9.4.51}$$

pa važi

$$\frac{\partial p}{\partial Q} \Big|_q = -\frac{\partial P}{\partial q} \Big|_Q.\tag{9.4.52}$$

Poslednja jednakost je potreban i dovoljan uslov da je izraz  $p dq - P dQ$  totalni diferencijal. Ostali uslovi se proveravaju slično.

Gornji kriterijum važi i za vremenski zavisne transformacije. O tome će biti reči kasnije.

## 9.5 Invarijantnost Poasonove zgrade

Da bi transformacija (9.1.2) bila kanonska potrebno je i dovoljno da su fundamentalne Poasonove zgrade nepromenjene pri ovim transformacijama. Dakle, iz

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad (9.5.53)$$

treba da sledi

$$\{Q_i, P_j\}|_{qp} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\}|_{qp} = 0, \quad \{P_i, P_j\}|_{qp} = 0. \quad (9.5.54)$$

Oznaka  $qp$  u indeksu Poasonove zgrade označava de se ona računa u  $(q, p)$  koordinatama. Poasonove zgrade izmedju novih koordinata i impulsa su definsane prema

$$\{Q_i, P_j\}|_{qp} = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_l} \frac{\partial P_j}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_l} \frac{\partial P_j}{\partial q_l} \right) \quad (9.5.55)$$

i analogno za ostale. Dakle, kanonske transformacije ne menjaju Poasonove zgrade. Često se kanonske transformacije definišu upravo na ovaj način; kao transformacije faznog prostora koje ne menjaju fundamentalne Poasonove zgrade. Odavde sledi da su Poasonove zgrade izmedju proizvoljnih funkcija na faznom prostoru nepromenjene pri kanonskim transformacijama, tj.

$$\{f, g\}_{PQ} = \{f, g\}_{pq}. \quad (9.5.56)$$

Ekvivalentnost ove i definicije date u poglavljiju 9.1 biće pokazana u narednom poglavljiju. Uvešćemo malo formalizma ali će dokaz biti jednostavan.

**Primer 1.** Odrediti parametre  $\alpha$  i  $\beta$  tako da je transformacija

$$\begin{aligned} Q &= q^\alpha \cos(\beta p), \\ P &= q^\alpha \sin(\beta p) \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

kanonska. Naći funkciju generatrisu  $F_3(p, Q, t)$  u tom slučaju.

Rešenje: Poasonova zagrada izmedju nove koordinate i novog impulsa je

$$\{Q, P\} = \{q^\alpha \cos(\beta p), q^\alpha \sin(\beta p)\} = \alpha \beta q^{2\alpha-1} = 1 \quad (9.5.58)$$

odakle je  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 2$ . Primenom (9.1.25) i (9.1.26) imamo

$$\begin{aligned} -q &= \frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{Q^2}{\cos^2(2p)}, \\ -P &= \frac{\partial F_3}{\partial Q} = -Q \tan(2p). \end{aligned} \quad (9.5.59)$$

Iz prve jednačine sledi

$$F_3 = -\frac{Q^2}{2} \tan(2p) + f(Q, t) \quad (9.5.60)$$

Iz druge jednačine dobijamo  $f = 0$ , pa je

$$F_3 = -\frac{Q^2}{2} \tan(2p). \quad (9.5.61)$$

## 9.6 Simplektičke transformacije

Hamiltonove jednačine kretanja (8.3.15) prepisaćemo u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.6.62)$$

gde je  $\mathbb{1}$  jedinična  $n \times n$  matrica. Neka je  $\eta$  kolona sastavljena od  $2n$  elemenata

$$\eta = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T. \quad (9.6.63)$$

Definišimo  $2n \times 2n$  matricu sa

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.6.64)$$

Ova matrica je antisimetrična,  $J^T = -J$ . Hamiltonove jednačine u kompaktnoj notaciji su

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (9.6.65)$$

odnosno

$$\dot{\eta}_a = J_{ab} \frac{\partial H}{\partial \eta_b}, \quad (9.6.66)$$

gde je  $\eta_1 = q_1, \dots, \eta_n = q_n, \eta_{n+1} = p_1, \dots, \eta_{2n} = p_n$ . Indeksi  $a, b$  uzimaju vrednosti  $1, 2, \dots, 2n$ .

Fundamentalne Poasonove zgrade (8.6.37) u kompaktnoj formi su

$$\begin{aligned} \{\eta_a, \eta_b\} &= \begin{pmatrix} \{q_i, q_j\} & \{q_i, p_j\} \\ \{p_i, q_j\} & \{p_i, p_j\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \\ &= J_{ab}. \end{aligned} \quad (9.6.67)$$

Poasonovu zgradu izmedju dve funkcije na faznom prostoru definisali smo sa (8.6.31). I njućemo prepisati u kompaktnoj notaciji:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial g}{\partial \eta_{i+n}} - \frac{\partial f}{\partial \eta_{i+n}} \frac{\partial g}{\partial \eta_i} \right) \\ &= \sum_{a=1}^{2n} \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \eta_a} J_{ab} \frac{\partial g}{\partial \eta_b}. \end{aligned} \quad (9.6.68)$$

Razmatrajmo vremenski nezavisne transformacije faznih promenljivih

$$\eta_a \rightarrow \xi_a = \xi_a(\eta_1, \dots, \eta_n) .$$

Ova transformacija je kanonska ukoliko Hamiltonove jednačine sa hamiltonijanom  $H(\eta)$  preslikava ponovo u Hamiltonove jednačine sa hamiltonijanom  $H(\xi) = H'(\xi)$ , tj.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_a &= \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial \xi_a}{\partial \eta_b} \frac{d\eta_b}{dt} \\ &= \sum_{b=1}^{2n} \sum_{c=1}^{2n} \frac{\partial \xi_a}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta_c} \\ &= \sum_{b=1}^{2n} \sum_{c=1}^{2n} \sum_{d=1}^{2n} \frac{\partial \xi_a}{\partial \eta_b} J_{bc} \frac{\partial \xi_d}{\partial \eta_c} \frac{\partial H'(\xi)}{\partial \xi_d} . \end{aligned} \quad (9.6.69)$$

Ako uvedemo Jakobijevu matricu transformacije  $M$  sa

$$M_{ab} = \frac{\partial \xi_a}{\partial \eta_b} , \quad (9.6.70)$$

onda imamo

$$\dot{\xi}_a = \sum_{d=1}^{2n} (M J M^T)_{ad} \frac{\partial H}{\partial \xi_d} . \quad (9.6.71)$$

Sada je očigledno da invarijantnost Hamiltonovih jednačina znači da matrica  $M$  zadovoljava uslov

$$M J M^T = J . \quad (9.6.72)$$

Matrice  $M$  formata  $2n \times 2n$  koje zadovoljavaju gornji uslov nazivaju se simplektičke matrice. Skup tih matrica obeležava se sa  $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . To su kanonske transformacije. Ukoliko Jakobijeva matrica  $M$  zadovoljava gornji uslov transformacija je kanonska. Matrični elementi matrice  $M$  su

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} & \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix} . \quad (9.6.73)$$

Invarijantnost Poasonovih zagrada pri kanonskim transformacijama se lako vidi:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\eta &= \sum_{a=1}^{2n} \sum_{b=1}^{2n} J_{ab} \frac{\partial f}{\partial \eta_a} \frac{\partial g}{\partial \eta_b} \\ &= \sum_{a=1}^{2n} \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \xi_c} \frac{\partial \xi_c}{\partial \eta_a} J_{ab} \frac{\partial \xi_d}{\partial \eta_b} \frac{\partial g}{\partial \xi_d} \\ &= \sum_{a=1}^{2n} \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \xi_c} (M J M^T)_{bd} \frac{\partial g}{\partial \xi_d} \\ &= \sum_{a=1}^{2n} \sum_{b=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial \xi_c} J_{bd} \frac{\partial g}{\partial \xi_d} \\ &= \{f, g\}_\xi . \end{aligned} \quad (9.6.74)$$

Dakle, vrednost Poasonove zgrade ne zavisi od toga koje kanonske koordinate koristimo.

Postoje tri ekvivalentna načina da definišemo kanonske transformacije. Prvi je da su to transformacije koje ne menjaju kanonsku strukturu jednačina kretanja, tj. ne menjaju formu Hamiltonovih jednačina za sve dinamičke sisteme. Drugi je da su to transformacije pri kojima su Poasonove zgrade nepromenjene. Treći način je da su to transformacije za koje je Jakobijeva matrica  $M = \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$  simplektička.

Simplektičke matrice, odnosno kanonske transformacije, čine grupu<sup>1</sup>. Ako su  $M_1$  i  $M_2$  simplektičke matrice onda je

$$M_1 M_2 J (M_1 M_2)^T = M_1 M_2 J M_2^T M_1^T = M_1 J M_1^T = J , \quad (9.6.75)$$

pa zaključujemo da je i  $M_1 M_2$  simplektička. Ovim smo pokazali zatvorenost. Množenje matrica je asocijativno. Jedinična matrica jeste kanonska transformacija i ona je jedinični element. Iz  $J M J^T = J$  sledi  $\det M = \pm 1$ . Ovo znači da za svaku simplektičku matricu  $M$  postoji inverzna  $M^{-1} = -J M^T J$  i ona zadovoljava uslov simplektičnosti.

U ovom i prethodnom poglavlju razmatrali smo samo vremenski nezavisne kanonske transformacije. Postavlja se pitanje u kojoj meri kriterijumi kanoničnosti koje smo uveli za vremenski nezavisne transformacije važe za vremenski zavisne transformacije.

Vremenski zavisna kanonska transformacija (9.1.2) u kompaktnoj notaciji je

$$\eta_a \rightarrow \xi_a = \xi_a(\eta_1, \dots, \eta_n, t) , \quad (9.6.76)$$

gde je  $\eta = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$  i  $\xi = (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)^T$ . Transformaciju (9.1.2), odnosno (9.6.76) možemo ostvariti u dva koraka, tj. ona je proizvod, odnosno uzastopna primena dve transformacije. Prva je transformacija

$$\eta_a \rightarrow \xi_a = \xi_a(\eta_1, \dots, \eta_n, t_0) , \quad (9.6.77)$$

za neko fiksno  $t = t_0$ . Drugi korak je vremenska evolucija od  $t_0$  do  $t$ . Ukoliko je transformacija u prvom koraku kanonska onda će i ukupna transformacija biti kanonska jer je hamiltonovska evolucija u drugom koraku kanonska transformacija. Ovaj iskaz sledi iz činjenice da kanonske transformacije čine grupu. Dakle, vremenski zavisna transformacija je kanonska ukoliko je ona kanonska za fiksno  $t$ . Kriterijumi kanoničnosti preko invarijantnosti Poasonove zgrade ili preko uslova simplektičnosti Jakobijeve matrice su potrebni i dovoljni uslovi kanoničnosti transformacije (9.1.2) odnosno (9.6.76).

## 9.7 Hamilton-Jakobijeva jednačina

Razmotrimo jednu specijalnu vremenski zavisnu kanonsku transformaciju koja vrednosti generalisanih koordinata i impulsa  $(q, p)$  u trenutku  $t$  prebačuje u njihove vrednosti u početnom trenutku  $t_0$ , tj.  $Q_i = q_i(t_0)$ ,  $P_i = p_i(t_0)$ . Kako je  $\dot{P}_i = 0$  i  $\dot{Q}_i = 0$  novi hamiltonijan je konstanta i može se izabratи да je jednak nuli.

---

<sup>1</sup>Definicija grupe je data u dodatku B.

Ovo je motivacija da definišemo kanonsku transformaciju koja hamiltonijan sistema transformiše u nulu. Transformisane koordinate i impulsi su zbog Hamiltonovih jednačina konstantni. Ovakvu transformaciju može da generiše funkcija drugog tipa, koju ćemo obeležiti sa  $S = S(q_i, P_k, t)$ . Ona se naziva Hamiltonovom glavnom funkcijom. Novi generalisani impulsi su  $P_k = \alpha_k$ , gde su  $\alpha_k$  konstante. Te konstante ne moraju biti početni impulsi, već su to najčešće konstante kretanja.

Jednačina (9.1.21) postaje

$$H\left(q_i, p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (9.7.78)$$

Ovo je Hamilton-Jakobijeva jednačina. To je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda po  $n+1$  promenljivoj:  $q_1, \dots, q_n, t$ . Hamiltonova glavna funkcija

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \alpha_{n+1}$$

zavisi od vremena,  $n$  generalisanih koordinata i  $n+1$  integracione konstante. Aditivnu konstantu  $\alpha_{n+1}$  možemo odbaciti, jer je nevažna. Nove koordinate

$$Q_k = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad (9.7.79)$$

su takodje konstantne, jer je prema Hamiltonovim jednačinama  $\dot{Q}_i = 0$ . Ukoliko je

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0$$

iz gornjeg skupa jednačina dobijamo

$$q_k = q_k(\alpha, \beta, t) , k = 1, \dots, n . \quad (9.7.80)$$

Zamenom (9.7.80) u

$$p_k = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_k} \quad (9.7.81)$$

dobijamo

$$p_k = p_k(\alpha, \beta, t) , k = 1, \dots, n . \quad (9.7.82)$$

Jednačine (9.7.80) i (9.7.82) određuju evoluciju sistema u faznom prostoru. Dakle, rešavanjem Hamilto-Jakobijeve jednačine, tj. nalaženjem generatrise  $S$  mi nalazimo rešenje mehaničkog problema. Hamilton–Jakobijev metod je ekvivalentan sa Hamiltonovim, odnosno Lagranževim metodom. Ekvivalentnost ovih metoda leži u činjenici da je sistem od  $n$  diferencijalnih jednačina drugog reda ekvivalentan sa sistemom od  $2n$  diferencijalnih jednačina prvog reda, odnosno sa jednom parcijalnom diferencijalnom jednačinom koja sadrži parcijalni izvode po vremenu i po  $n$  koordinata.

Generatrisa  $S$  nije novi objekat. Potražimo njen vremenski izvod:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \left( H(q_i, p_i, t) + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) \Big|_{p=\partial S / \partial q} . \quad (9.7.83)$$

U drugom koraku primenili smo Hamilton-Jakobijevu jednačinu. U krajnjem rezultatu generalisani impulsni su eliminisani preko generalisanih koordinata i brzina, pa na kraju dobijamo lagranžijan  $L(q, \dot{q}, t)$ . Integracijom (9.7.83) po vremenu od  $t_0$  do  $t$  dobijamo

$$S = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t) dt . \quad (9.7.84)$$

Ovo pokazuje fizički smisao generatrise  $S$ . Ona je dejstvo izračunato na pravoj trajektoriji sistema. Dejstvo je generišuća funkcija kanonske transformacije koja transformiše sistem od jednog do drugog trenutka vremena.

**Primer:** Za česticu mase  $m$  u gravitacionom polju naći glavnu Hamiltonovu funkciju.

Rešenje: Hamiltonian čestice je

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz . \quad (9.7.85)$$

Hamilton-Jakobijeva jednačina je

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (9.7.86)$$

i rešavaćemo je metodom separacije varijabli. Pretpostavićemo rešenje u obliku

$$S = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z) - Et . \quad (9.7.87)$$

Zamenom (9.7.87) u (9.7.86) dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dx} &= \pm \sqrt{2m\alpha_1} \\ \frac{dS_2}{dy} &= \pm \sqrt{2m\alpha_2} \\ \frac{dS_3}{dz} &= \pm \sqrt{2m(\alpha_3 - mgz)} \end{aligned} \quad (9.7.88)$$

uz  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = E$ . Glavna Hamiltonova funkcija je

$$S = \pm \sqrt{2m\alpha_1}x \pm \sqrt{2m\alpha_2}y \pm \sqrt{\frac{8}{9mg^2}(\alpha_3 - mgz)^{3/2}} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t . \quad (9.7.89)$$

Primenom

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.7.90)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(t + \beta_1) \\ y &= \pm \sqrt{\frac{2\alpha_2}{m}}(t + \beta_2) \\ z &= \frac{\alpha_3}{mg} - \frac{g}{2}(t + \beta_3)^2 . \end{aligned} \quad (9.7.91)$$

## 9.8 Hamiltonova karakteristična funkcija

Ograničimo se na specifičan, ali važan slučaj, kada hamiltonijan sistema ne zavisi eksplisitno od vremena, tj. kada je  $H = H(q, p)$ . Ovakvi sistemi se nazivaju autonomnim. Napomenimo da ako hamiltonijan ne zavisi eksplisitno od vremena on je konstanta kretanja, ali ne mora da bude jednak energiji. Za ovakve sisteme Hamiltonova glavna funkcija ima oblik

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - E(\alpha)t . \quad (9.8.92)$$

Funkcija  $W(q, \alpha)$  se naziva Hamiltonovom karakterističnom funkcijom. Hamilton-Jakobijeva jednačina se svodi na vremenski nezavisani oblik

$$H\left(q_i, p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = E(\alpha) . \quad (9.8.93)$$

Interesantno je da je Hamiltonova karakteristična funkcija takođe generatrisa kanonske transformacije za sisteme sa vremenski nezavisnim hamiltonijanom. Novi hamiltonijan je konstantan

$$H' = H = E(\alpha_1, \dots, \alpha_n) . \quad (9.8.94)$$

Nove generalisane koordinate  $Q_i$  su ciklične, pa iz

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 , \quad (9.8.95)$$

sledi da su novi kanonski impulsi konstante kretanja  $P_i = \alpha_i$ . Sa druge strane je

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha_i} = v_i(\alpha) , \quad (9.8.96)$$

gde je  $v_i = v_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Integracija gornje jednačine daje

$$Q_i(t) = \beta_{0i} + v_i(\alpha)(t - t_0) , \quad (9.8.97)$$

gde su  $\beta_{0i}$  i  $t_0$  konstante. Često se uzima da je prva integraciona konstanta  $\alpha_1 = H' = E$ . Tada je

$$Q_i = \begin{cases} t + \beta_1, & \text{za } i = 1 \\ \beta_i, & \text{za } i \neq 1 . \end{cases} \quad (9.8.98)$$

Na ovaj način smo rešili jednačine kretanja u koordinatama  $(Q, P)$ . Primećujemo da je energija generalisani impuls konjugovan vremenu kao generalisanoj koordinati.

## 9.9 Integrabilni sistemi

Dinamika mehaničkih sistema odredjena je diferencijalnim jednačinama kretanja. Hamiltonovi sistemi zadovoljavaju Hamiltonove jednačine kretanja. Za sistem ćemo reći da je integrabilan ako se rešenje jednačina kretanja može, bar u principu, odrediti analitički. To znači da se uz

pomoć algebrskih transformacija rešenje izrazi preko integrala, tj. svede na kvadrture. Integrali ne moraju biti eksplicitno rešeni.

Dinamika kanonskih sistema sa  $n$  stepeni slobode odredjena je sa  $2n$  diferencijalnih jednačina prvog reda (8.3.15). Ovakav sistem je integrabilan ako postoji  $n$  nezavisnih prvih integrala kretanja,  $f_1(q, p), \dots, f_n(q, p)$  čije Poasonove zgrade su jednake nuli,

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Za integrale kretanja koji zadovoljavaju gornje uslove kaže se da su u involuciji.

Hamiltonian jednodimenzionog konzervativnog sistema je

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q).$$

Kanonske jednačine kretanja su

$$\dot{p} = -U'(q), \quad \dot{q} = p/m.$$

Hamiltonian je integral kretanja, jer je  $\{H, H\} = 0$ . Ako sa  $E$  obeležimo energiju čestice, onda je

$$\frac{p^2}{2m} + U(q) = E.$$

Iz ove jednačine dobijamo

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}.$$

Integral koji se pojavljuje u ovom izrazu često se ne može rešiti. Gornja jednačina, invertovanjem daje zavisnost  $q = q(t)$ . Iz ove jednačine se dobija i zavisnost impulsa od vremena. Zaključujemo da su jednodimenzionalni konzervativni sistemi integrabilni.

Kretanje čestice u centralnom polju je takođe primer integrabilnog sistema. Sistem ima tri stepena slobode, a fazni prostor je šestodimenzionalan. Lako se vidi da je

$$\{H, L_3\} = 0, \quad \{L_3, \mathbf{L}^2\} = 0, \quad \{L_3, L_2\} = L_1, \quad \{L_3, L_1\} = -L_2. \quad (9.9.99)$$

Ove Poasonove zgrade pokazuju da su  $H$ ,  $L_3$ ,  $\mathbf{L}^2$  integrali kretanja koji su u involucij ('komutiraju'). Sistem je prema tome integrabilan.

Sistem dva tela koja interaguju centralnom silom ima šest stepeni slobode. Dimenzija faznog prostora je dvanaest. Sistem je integrabilan, jer su sledećih šest integrala kretanja:

$$H_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(r), \quad \mathbf{P}, \mathbf{L}^2, L_z \quad (9.9.100)$$

u involuciji. Sa  $\mu$  je obeležena masa relativne čestice, sa  $\mathbf{p}$  njen impuls, a sa  $\mathbf{P}$  impuls centra mase. Sistem od tri tela nije integrabilan, jer je broj stepeni slobode jednak 9, a broj integrala kretanja koji su u involuciji šest. To su iste veličine kao u problemu dva tela.

Naveli smo nekoliko primera integrabilnih sistema. Međutim, integrabilni sistemi su retki. Većina sistema u prirodi je neintegrabilna.

## 9.10 Promenljive dejstvo-ugao

Naša dalja analiza se odnosi na sisteme čiji hamiltonijan ne zavisi od vremena i koji su separabilni. Konzervativni sistem je separabilan ukoliko je Hamiltonova karakteristična funkcija suma  $n$ -članova od kojih svaki zavisi samo od jedne generalisane koordinate i od  $n$  konstanti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , tj.

$$W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = W_1(q_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \dots + W_n(q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (9.10.101)$$

Dakle kod kompletno integrabilnih sistema Hamilton–Jakobijeva jednačina može biti rešena separacijom varijabli.

Dalje ćemo prepostaviti da je kretanje separabilnih sistema periodično. Periodična kretanja su važan primer kretanja u prirodi. Postoje dva tipa periodičnih kretanja. Prvi tip periodičnih kretanja su kretanja pri kojima su svi parovi  $(q_i(t), p_i(t))$  periodične funkcije sa periodom  $T_i$  za svako  $i = 1, \dots, n$ . Periodi oscilovanja za različite parove konjugovanih koordinata mogu biti različiti. Fazne linije su u tom slučaju zatvorene linije u  $(q_i, p_i)$ –ravnima. Strogo gledano ovakvo kretanje ne mora biti periodično, jer su periodi u različitim faznim ravnima  $(q_i, p_i)$  različiti. Drugim rečima sistem se ne vraća posle nekog vremena u prvobitnu konfiguraciju. Tipičan primer je dvodimenzionalni oscilator sa različitim frekvencama duž  $x$  i  $y$  osa. Drugu klasu periodičnih kretanja predstavljaju tzv. rotacije. To su kretanja kod kojih su  $p_i = p_i(q_i)$  periodične funkcije, tj.  $p_i(q_i + q_0) = p_i(q_i)$ . Kretanje je ograničeno u oblasti koordinata unutar nekog intervala i ponavlja se.

Matematičko klatno je primer fizičkog sistema kod koga postoje oba tipa periodičnog kretanja, zavisno od energije klatna. Ako energija klatna zadovoljava nejednakost  $E < 2mgl$ , kretanje je oscilatorno. Ako je ispunjen uslov  $E > 2mgl$  kretanje je rotaciono. Granični slučaj,  $E = 2mgl$  je tzv. separatriza.

Za kompletno integrabilne i separabilne sisteme možemo definisati kanonsku transformaciju od starih faznih promenljivih  $(q, p)$  u nove fazne promenljive  $(\theta, I)$ , čija je generatrisa Hamiltonova karakteristična funkcija. Definišimo  $n$  novih impulsa

$$I_k = \oint p_k dq_k, \quad (9.10.102)$$

gde se integrali po periodu kretanja u ravni  $(q_k, p_k)$ . Ove varijable se nazivaju varijablama dejstva (akcije). Primenom (9.1.19) imamo

$$p_k = \frac{\partial W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_k} = \frac{\partial W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial q_k}. \quad (9.10.103)$$

Impuls  $p_k$  zavisi samo od  $k$ –te koordinate  $q_k$  i konstanti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Zamenom (9.10.103) u definiciju  $I_k$  vidimo da ove veličine zavise samo od konstanti, tj.

$$I_k = I_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (9.10.104)$$

pa su prema tome i one konstante kretanja. Pretpostavićemo da su relacije (9.10.104) invertibilne, tj. konstante  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  možemo da izrazimo preko promenljivih  $I_1, \dots, I_n$ , tj.

$$\alpha_k = \alpha_k(I_1, \dots, I_n). \quad (9.10.105)$$

Zamenom gornjih relacija u Hamiltonovu karakterističnu funkciju  $W(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  dobijamo novu Hamiltonovu karakterističnu funkciju

$$\tilde{W} = \tilde{W}(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^n \tilde{W}_k(q_k, I_1, \dots, I_n). \quad (9.10.106)$$

U daljem izlaganju nećemo pisati tildu u oznaci Hamiltonove karakteristične funkcije. Koordinate konjugovane varijablama dejstva obeležili smo sa  $\theta_i$  i zovemo ih ugaone promenljive. Primenom (9.1.20) dobijamo

$$\theta_i = \frac{\partial W_i(q_i, I_1, \dots, I_n)}{\partial I_i}, \quad (9.10.107)$$

jer je Hamiltonova karakteristična funkcija generatrisa kanonske transformacije  $(q_i, p_i) \rightarrow (\theta_i, I_i)$ . Novi hamiltonijan  $H' = E(I_1, \dots, I_n)$  ne zavisi od uglova, pa Hamiltonove jednačine u novim koordinatama su

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -\frac{\partial H'(I)}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H'(I)}{\partial I_i} = \nu_i(I_1, \dots, I_n). \end{aligned} \quad (9.10.108)$$

Veličine  $\nu_i(I_1, \dots, I_n)$  se nazivaju frekvencama i one su konstante. U novim faznim promenljivim integracijama Hamiltonovih jednačina je jednostavna. Rešavanjem zadnje jednačine dobijamo

$$\theta_i(t) = \theta_{i0} + \nu_i(t - t_0), \quad (9.10.109)$$

gde su  $\theta_{i0}$  su integracione konstante.

Neka koordinata  $q_k$  izvrši jedan pun ciklus, dok se ostale koordinate ne menjaju. Promena ugaone promenljive  $\theta_i$  za vreme od jednog ciklusa koordinate  $q_k$  ćemo obeležiti sa  $\Delta_k \theta_i$ . Jasno je da je ova promena data sa

$$\Delta_k \theta_i = \oint_{C_k} d\theta_i = \oint_{C_k} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} dq_k. \quad (9.10.110)$$

U ovoj formuli se ne sumira po  $k$ . Dalje imamo

$$\begin{aligned} \Delta_k \theta_i &= \oint_{C_k} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial q_k} dq_k \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{C_k} \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k \\ &= \frac{\partial I_k}{\partial I_i} = \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (9.10.111)$$

Ugaona promenljiva  $\theta_k$  je periodična funkcija koordinate  $q_k$ , jer je  $\Delta_k \theta_k = 1$ . Iz (9.10.109) vidimo da je  $\nu_k T_k = 1$ , gde je  $T_k$  period u toku jednog ciklusa izazvanog promenom  $k$ -te koordinate. Ova procedura omogućava nam da odredimo periode u faznim ravnima. Napomenimo na kraju da ako je kretanje sistema stvarno periodično, što znači da se sistem posle nekog vremena,  $T$  vraća u početnu konfiguraciju onda mora važiti

$$T = m_1 T_1 = \dots = m_n T_n,$$

gde su  $m_1, \dots, m_n$  prirodni brojevi.

## 9.11 Keplerov problem

Razmotrimo kretanje čestice mase  $m$  u ravni  $xOy$  pod dejstvom privlačnog potencijala  $-\frac{k}{r}$ . Hamiltonian je dat sa

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} . \quad (9.11.112)$$

Hamilton–Jakobijeva jednačina je

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{k}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \quad (9.11.113)$$

Rešenje Hamilton–Jakobijeve jednačine, tražićemo metodom separacije varijabli, u obliku:

$$S = W_r(r) + W_\varphi(\varphi) - Et . \quad (9.11.114)$$

Zamenom ovog oblika glavne Hamiltonove funkcije u Hamilton–Jakobijevu jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dW_\varphi}{d\varphi} &= \alpha_\varphi \\ \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 &= 2mE - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} + \frac{2mk}{r} , \end{aligned} \quad (9.11.115)$$

gde je  $\alpha_\varphi$  konstanta. Iz jednačina (9.11.115) se nalaze  $W_r$  i  $W_\varphi$ . Konačno, glavna Hamiltonova funkcija je

$$S = -Et + \alpha_\varphi \varphi \pm \int dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} . \quad (9.11.116)$$

Vidimo da su  $E$  i  $\varphi$  ciklične koordinate. Hamiltonova karakteristična funkcija

$$W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \quad (9.11.117)$$

je generatrisa kanonske transformacije. Nadjimo promenljive dejstvo–ugao u ovom slučaju. Uzmimo da je energija čestice negativna,  $E < 0$ . U tom slučaju kretanje je periodično. Koordinate dejstva su date sa

$$I_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi\alpha_\varphi \quad (9.11.118)$$

$$I_r = \oint p_r dr = \pm \int dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} . \quad (9.11.119)$$

Da bismo definisali integral u izrazu za  $I_r$  potrebno je da mu odredimo granice. Nule polinoma  $2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}$  su minimalno i maksimalno rastojanje. Lako se dobija da su one date sa

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{k}{2E} - \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{\alpha_\varphi^2}{2mE}} \\ r_2 &= -\frac{k}{2E} + \sqrt{\frac{k^2}{4E} + \frac{\alpha_\varphi^2}{2mE}} . \end{aligned} \quad (9.11.120)$$

Jasno je da je  $r_1 < r_2$ . Za vreme od jednog perioda radijalna koordinata varira od  $r_1$  do  $r_2$  i ponovo do  $r_1$ . Dakle:

$$\begin{aligned} I_r &= \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} - \int_{r_2}^{r_1} dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \\ &= 2 \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \\ &= \sqrt{-8mE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \sqrt{-r^2 + (r_1 + r_2)r - r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (9.11.121)$$

Primenom tabličnog integrala

$$\begin{aligned} \int \sqrt{Ax^2 + Bx + C} \frac{dx}{x} &= \sqrt{Ax^2 + Bx + C} \\ &- \frac{B}{2\sqrt{-A}} \arcsin \left( \frac{2Ax + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) - \sqrt{-C} \arcsin \left( \frac{Bx + 2C}{|x|\sqrt{B^2 - 4AC}} \right), \end{aligned} \quad (9.11.122)$$

koji važi za  $A < 0$  i  $C < 0$ , dobijamo

$$I_r = \pi \left( k \sqrt{\frac{2m}{-E}} - 2\alpha_\varphi \right). \quad (9.11.123)$$

Iz ovog izraza se lako dobija

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(I_r + I_\varphi)^2}. \quad (9.11.124)$$

Da rezimiramo. Stare kanonske promenljive su  $r, \varphi, p_r$  i  $p_\varphi$ . Kanonskom transformacijom prelazimo na nove kanonske promenljive koje nazivamo promenljive dejstvo–ugao. Novi imapulsi su  $I_r, I_\varphi$ , dok su nove koordinate uglovi  $\theta_r$  i  $\theta_\varphi$ . Koordinate  $I_r$  i  $I_\varphi$  su povezane sa konstantama  $E$  i  $\alpha_\varphi$ .

Da bismo odredili kompletno kanonsku transformaciju potrebno je da još odredimo uglove  $\theta_r$  i  $\theta_\varphi$ . To se može uraditi primenom

$$\theta_r = \frac{\partial W}{\partial I_r}, \quad \theta_\varphi = \frac{\partial W}{\partial I_\varphi}.$$

Prethodno je u izrazu za Hamiltonovu karakterističnu funkciju potrebno konstante  $\alpha_\varphi$  i  $E$  izraziti preko  $I_r$  i  $I_\varphi$ . To vam ostavljam za samostalni rad. Odredimo na kraju period oscilovanja. Novi hamiltonijan je

$$H' = E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(I_r + I_\varphi)^2}.$$

Iz njega, primenom (9.10.107) dobijamo

$$\nu_r = \nu_\varphi = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{(-E)^{3/2}}{k\pi}.$$

Obe frekvence su jednake, i obeležićemo ih sa  $\nu$ . Period kretanja je  $T = 1/\nu$ . Dobijeni rezultat je u skladu sa trećim Keplerovim zakonom. Pomoću ovog metoda odredili smo period kretanja kod Keplerovog problema, bez rešavanja jednačina kretanja.

## 9.12 Zadaci

**9.1.** Pokazati da je transformacija

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \\ P &= 2\sqrt{1 + \sqrt{q} \cos p} \sin p \end{aligned}$$

kanonska transformacija. Pokazati, takodje da je

$$F_3 = -(e^Q - 1)^2 \tan p$$

funkcija generatrisa ove transformacije.

**9.2.** Pokazati da je transformacija

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha, \quad Q_2 = q_2 \cos \alpha + p_1 \sin \alpha, \\ P_1 &= -q_2 \sin \alpha + p_1 \cos \alpha, \quad P_2 = -q_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

kanonska. Naći funkciju generatrisu.

**9.3.** Hamiltonijan harmonijskog oscilatora je

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

(a) Pokazati da je transformacija data sa

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2im\omega}}(p + im\omega q) \\ P &= \frac{1}{\sqrt{2im\omega}}(p - im\omega q) \end{aligned}$$

kanonska.

(b) Odrediti funkciju generatrisu,  $F_2(q, P)$  ove transformacije.

(c) Naći hamiltonijan u novim koordinatama.

**9.4.** Da li je vremenski zavisna transformacija

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3) \\ P &= -\frac{1}{2}pq^3(1 + te^{\frac{1}{q^2}}) \end{aligned}$$

kanonska? Naći kako se hamiltonijan  $H = \frac{pq^3}{2t}$  transformiše pod dejstvom ove transformacije.

**9.5.** Sastaviti i rešiti Hamilton-Jakobijevu jednačinu za jednodimenzionalni harmonijski oscilator. Koristeći jednačinu za  $\beta$  rešiti kanonske jednačine kretanja.

**9.6.** Čestica mase  $m$  kreće se u jednoj dimenziji u linearном potencijalu  $U = kx$ , gde je  $k$  konstanta.

- (a) Rešiti Hamilton-Jakobijevu jednačinu.
- (b) Na osnovu dela (a) naći rešenje jednačina kretanja, tj. odrediti  $x$  i  $p$  u funkciji vremena.

**9.7.** Hamiltonian anizotropnog dvodimenzionalnog oscilatora je

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} .$$

- (a) Rešavanjem Hamilton-Jakobijeve jednačine naći Hamiltonovu glavnu funkciju.
- (b) Koristeći Hamiltonovu glavnu funkciju naći rešenje kanonskih jednačina kretanja. Početni uslovi su  $x(t=0) = a$ ,  $y(t=0) = 0$ ,  $\dot{x}(t=0) = 0$  i  $\dot{y}(t=0) = v_0$ .
- (c) Naći promenljive dejstva  $I_x, I_y$ , i odgovarajuće uglove  $\theta_1, \theta_2$ .
- (d) Izraziti energiju preko  $I_x, I_y$ .
- (e) Naći Hamiltonove jednačine u promenljivima dejstvo-ugao.

**9.8.** Čestica mase  $m$  može da se kreće bez trenja po šipci zanemarljive mase, koja je nagnuta pod konstantnim uglom  $\theta$  prema verikalnoj osi. Šipka rotira stalnom ugaonom brzinom  $\Omega$  oko vertikalne ose. Naći glavnu Hamiltonovu funkciju i na osnovu nje naći rešenje kanonskih jednačina kretanja.

## Dodatak A

# Kronekerova delta i simbol Levi–Čivita

Kronekerova delta je definisana sa

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j \end{cases}. \quad (\text{A.0.1})$$

Ona uzima vrednosti jedan ili nula. Matrični elementi jedinične matrice su jednak Kronekerovoj delti. Važna osobine su

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.0.2})$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i \delta_{ij} = A_j \quad (\text{A.0.3})$$

Veličina  $\epsilon_{ijk}$  je simbol Levi–Čivita. On uzima vrednosti 1, 0 ili  $-1$ . Za izbor  $i = j = k = 1$ , on je jednak jedinici, tj.  $\epsilon_{123} = 1$ . Svaka transpozicija indeksa daje jedno minus. Npr.  $\epsilon_{213} = -1$ ,  $\epsilon_{231} = 1$ . Ukoliko se neki indeks ponavlja ovaj simbol je jednak nuli. Dakle za svaku parnu permutaciju indeksa 1, 2 i 3 simbol Levi–Čivita je jednak jedinici, a za svaku neparnu je  $-1$ . Kronekerova delta je tenzor ranga dva, dok je simbol Levi–Čivita tzv. pseudotenzor ranga tri.

Neka su  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i$  i  $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \mathbf{e}_i$  vektori. Sa  $A_i$  i  $B_i$  obeležili smo njihove Dekartove komponente. Njihov skalarni proizvod je dat sa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i.$$

$i$ -ta Dekartova komponenta vektorskog proizvoda vektora  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  se može izraziti preko simbola Levi–Čivita na sledeći način

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Dakle,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \mathbf{e}_i$$

Sledeća dva identiteta koji zadovoljavaju mešoviti i dvostruki vektorski proizvod su vrlo korisna:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.0.4})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} . \quad (\text{A.0.5})$$

Prvi (A.0.4) je cikličnost mešovitog proizvoda.

# Dodatak B

## Grupa

Grupa je matematička struktura sastavljena od skupa elemenata  $G$  i binarne operacije množenja u grupi, koju ćemo obeležiti sa  $\cdot$ . Da bi ova struktura bila grupa moraju biti zadovoljeni sledeći uslovi (tzv. aksiome grupe):

- Proizvod dva elementa iz grupe pripada grupi, tj.  $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 \in G$ . Ova osobina se naziva zatvorenost.
- Množenje u grupi je asocijativno, tj.  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ .
- Postoji jedinični element,  $e$  u grupi koji zadovoljava uslov  $\forall g \in G g \cdot e = e \cdot g = g$ .
- Za svaki element grupe  $g$  postoji njegov inverzni element,  $g^{-1}$  takav da je  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .  
U ovoj knjizi susreli smo se sa dva važna primera grupe. Prvi je rotaciona grupa, a drugi je grupa simplektičkih matrica.



## Dodatak C

# Kvadratna forma i ekstremne vrednosti funkcije više promenljivih

Neka je  $A$  realna simetrična matrica formata  $n \times n$ , a  $x_1, \dots, x_n$  promenljive. Izraz

$$A(x_1, \dots, x_n) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j$$

je kvadratna forma. Ako je vrednost kvadratne forme pozitivna za svaku vrednost promenljivih  $x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$  za formu se kaže da je pozitivno definitna. Sa druge strane, kvadratna forma je negativno definitna, ako je za sve vrednosti promenljivih  $x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$  ona negativna.

Silvesterov kriterijum omogućava da se brzo odredi da li je forma pozitivno ili negativno definitna. Kvadratna forma je pozitivno definitna ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{C.0.1})$$

Kvadratna forma je negativno definitna ako i samo ako važe sledeći uslovi

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{C.0.2})$$

Neka je tačka  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  stacionarna tačka funkcija više promenljivih  $f = f(x_1, \dots, x_n)$ , tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0 = 0.$$

Ako je

$$d^2 f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_0 dx_i dx_j$$

pozitivna (negativna) kvadratna forma onda je tačka  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  lokalni maksimum (minimum) funkcije  $f$ .



# Literatura

- [1] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley (2002)
- [2] L. Landau and Lifšic, Mehanika, Mir Moskva (1988)
- [3] Dj. Mušicki, Teorijska mehanika, PMF Beograd (1987)
- [4] L. Hand and J. Finch, Analytical Mechanics, CUP (1987)
- [5] D. Tong, Classical Dynamics, lecture notes, DAMTP, University of Cambridge
- [6] J. Marion and S.T. Thornton, Classical Dynamics of Particles and Systems, Ft. Worth, TX:Saunders (1995)
- [7] F. Scheck, Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos, Berlin, Springer (1990)
- [8] J. M. Finn, Classical Mechanics, Infinity Science Press LLC, New York (2008)
- [9] M. Chaichian, I. Merches and A. Tureanu, Mechanics-An Intensive Course, Springer, Berlin (2012)
- [10] A.L.Fetter and J.D. Walecka, Theoretical Mechanics of Particles and Continua, McGraw Hill, New York, (1980)
- [11] B. Milić, Njutnova mehanika, (II izdanje) Studentski trg, Beograd (1997)
- [12] F. Gantmacher, Lectures in Analytical Mechanics, Mir, Moscow (1975)
- [13] Lim Yung-Kuo, Problems and Solutions on Mechanics, World Scientific, (2007)
- [14] K. C. Gupta, Classical Mechanics of Particles and Rigid Bodies, John Wiley and Sons, New York (1988)
- [15] D. Gajić i Lj. Stefanović, Zbirka zadataka iz teorijske mehanike, PMF Niš, Niš (2009)
- [16] M. G. Calkin, Lagrangian and Hamiltonian Mechanics, World Scienctific, Singapore, London (1998)
- [17] I. I. Oljnovskij, Ju. G. Pavlenko, L. S. Kuzmenkov, Zadači po teoretičeskoj mehanike dlja fizikov, Moskva (1974)

- [18] E. S. Pjtnicki, N. M. Truhan, Hunakaev, G. N. Jokovenko, Sbornik zadač po analitičeskoji mehanike, Moskva (2002)
- [19] G. L. Kotkin and V. G. Serbo, Collection of Problems in Classical Mechanics, Pergamon Press, Oxford, New York,... (1971)
- [20] R. D. Gregory, Classical Mechanics, CUP, Cambridge, New York (2006)
- [21] W. Nolting, Theoretical Physics 1, Classical Mechanics, Springer, Heidlberg (2016)
- [22] W. Nolting, Theoretical Physics 2, Analytical Mechanics, Springer, Heidlberg (2016)
- [23] S. G. Rajeev, Advanced Mechanics, Oxford UP, Oxford (2013)
- [24] N. M. J. Woodhouse, Introduction to Analytical Dynamics, Springer, Heidlberg, New York (2009)