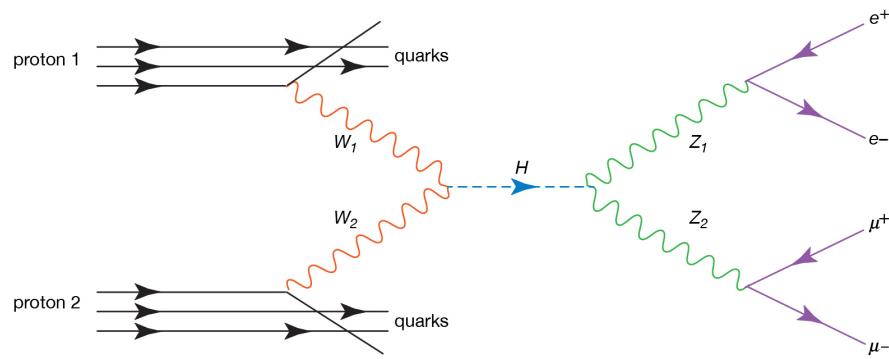


Teorijska fizika elementarnih čestica

Voja Radovanović i Marija Dimitrijević Ćirić



© 2013 Encyclopædia Britannica, Inc.

Beograd, 2020.

Sadržaj

1 Prostorno-vremenske simetrije	7
1.1 Lorencova grupa	7
1.1.1 Prave ortohrone Lorencove transformacije	10
1.1.2 Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija Lorencove grupe	13
1.2 Poenkareova grupa	18
1.2.1 Klasifikacija unitarnih ireducibilnih reprezentacija prave ortohrone Poenkareove grupe	19
1.2.2 Vignerov metod	23
1.3 Diskretne simetrije	28
1.3.1 Prostorna inverzija	28
1.3.2 Vremenska inverzija	32
Zadaci	35
2 Unutrašnje simetrije i kvark model	39
2.1 Klasifikacija interakcija i čestica	39
2.2 Simetrija	43
2.3 $SU(2)$ i izospin	45
2.3.1 Slaganje izospina	47
2.3.2 Vigner-Ekartova teorema	49
2.4 Dodatni kvantni brojevi i zakoni održanja	52
2.5 Osmostruko svrstavanje hadrona	54
2.6 Reprezentacije $SU(n)$ grupe i Jangove šeme	57
2.6.1 Veza grupe $SU(n)$ i permutacione grupe S_n	58
2.6.2 Osobine Jangovih šema	61
2.7 Kvark model u okviru $SU(3)$ grupe simetrije	66
2.8 Kvark model i $SU(6)$ grupa simetrije	75
2.9 Boja kao novi kvantni broj	78
2.10 Parnost i C-parnost mezona	80
Zadaci	81
3 Klasična teorija polja	85
3.1 Ojler-Lagranževe jednačine kretanja	85
3.1.1 Mehanički sistemi	85

3.1.2	Klasična polja	86
3.1.3	Ojler–Lagranževe jednačine kretanja	87
3.1.4	Primeri	89
3.1.5	Hamiltonova formulacija	91
3.2	Neterina teorema	94
3.2.1	Fazna invarijantnost	97
3.2.2	Translaciona invarijantnost i tenzor energije impulsa	99
3.2.3	Lorenzova simetrija i ugaoni moment	100
3.2.4	Primer neabelove simetrije	101
Zadaci	102
4	Gradijentna simetrija	103
4.1	Čestica u elektromagnetskom polju	103
4.2	Lokalna $U(1)$ simetrija u Kvantnoj elektrodinamici	105
4.3	Neabelova gradijentna simetrija	106
4.4	Proizvoljna neabelova gradijentna teorija	112
Zadaci	113
5	Spontano narušenje simetrije	117
5.1	Osnovni pojmovi	117
5.2	Spontano narušenje diskretnе simetrije	119
5.3	Spontano narušenje globalne simetrije	121
5.4	Goldstonova teorema	123
5.5	BEH mehanizam	125
Zadaci	129
6	Standardni model elektroslabe interakcije	131
6.1	Istorijski pregled teorije slabe interakcije	131
6.2	Elektroslaba interakcija leptona	134
6.2.1	BEH mehanizam	136
6.2.2	Interakcija leptona sa gauge poljima	141
6.2.3	Mase leptona	146
6.2.4	Rezime leptonskog sektora elektroslabe interakcije	147
6.3	Elektroslaba interakcija kvarkova	148
6.3.1	Lagranžijan kvarkova	148
6.3.2	Mase kvarkova	149
6.3.3	Naelektrisana kvarkovska struja	153
6.3.4	Neutralna i elektromagnetna kvarkovska struja	158
6.4	Lagranžijan elektroslabe interakcije: rezime	160
6.5	Raspadi i neki procesi u standardnom modelu	161
6.5.1	W^\pm i Z^0 bozoni	161
6.5.2	Higsov bozon	167
6.6	Neki procesi u okviru Standardnog modela	170

Zadaci	173
7 Kvantna hromodinamika	177
7.1 Dejstvo za jaku interakciju	177
7.2 Asimptotska sloboda i zarobljenost kvarkova	179
Zadaci	182
A Teorija grupa-kratak podsetnik	185
A.1 Grupe	185
A.2 Algebre	188
A.3 Reprezentacije	190
B Vajlovi spinori	193
B.1 Vajlove jednačine	193
B.2 Levi Vajlovi spinori	194
B.3 Desni Vajlovi spinori	195
C Maseno vektorsko polje	199
C.1 Dejstvo i jednačina kretanja	199
C.2 Propagator	200

Glava 1

Prostorno-vremenske simetrije

Specijalna teorija relativnosti (STR) je formulisana 1905. godine. Zasnovana je na dva postulata. Prvi postulat je iskaz da fizički zakoni imaju isti oblik u svim inercijalnim referentnim sistemima. Drugi postulat je iskaz da je brzina svetlosti u vakuumu konstantna i približno jednaka $c = 3 \times 10^8 m/s$ u svim inercijalnim referentnim sistemima. Jedna od posledica ovih postulata je uvodjenje prostora Minkovskog, kao četvorodimenzionog prostora u kome su koordinate vreme i tri prostorne koordinate. Vreme, koje je bilo izdvojeno u Njutnovoj mehanici u odnosu na prostorne koordinate, se u okviru STR tretira potpuno ravnopravno sa ostalim koordinatama. To dovodi do novih (neočekivanih) fenomena kao što su kontrakcija dužina i dilatacija vremena i njihove posledice. U ovoj glavi ćemo detaljno proučiti prostor Minkovskog, njegove izometrije: Lorencovu (H. Lorentz) i Poenkareovu (H. Poencaré) grupu i njihove osobine. Posebnu pažnju ćemo obratiti na klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija ove dve grupe, jer su ireducibilne reprezentacije jako bitne u konstrukciji različitih teorija polja.

Mnogi detalji o Lorencovoj i Poenkareovoj simetriji su dati u referencama [1, 2].

1.1 Lorencova grupa

Prostor Minkovskog je realan četvorodimenzionalan prostor. Četvorovektor položaja u prostoru Minkovskog je

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gde su x^μ kontravarijantne komponente vektora \mathbf{x} u bazi

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skalarni proizvod vektora je definisan uvodjenjem metričkog tenzora

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Koristeći metrički tenzor, dužina četvorovektora x^μ se može izračunati kao $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. Lorencove transformacije su definisane kao transformacije koordinata

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.1.2)$$

koje ne menjaju dužinu četvorovektora, tj. $x'^2 = x^2$. Iz ovog uslova sledi

$$(\Lambda^T)_\mu^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (1.1.3)$$

Na osnovu ove jednačine možemo zaključiti da postoji šest nezavisnih Lorencovih transformacija. Proizvoljna realna 4×4 matrica ima 16 nezavisnih elemenata. Sa druge strane, jednačina (uslova na matrice Λ^μ_ν) u (1.1.3) ima 10, pa je broj nezavisnih Lorencovih transformacija $16 - 10 = 6$: tri rotacije i tri busta. Pored bustova i rotacija, u Lorencove transformacije spadaju i prostorna i vremenska inverzija. Matrica prostorne inverzije I_p i vremenske inverzije I_t su date matricama

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.4)$$

Lako se proverava da one jesu Lorencove transformacije, jer zadovoljavaju uslov (1.1.3). Lorencove transformacije čine grupu $O(1, 3, \mathbb{R})$. Da bismo ovo pokazali potrebno je da proverimo da su svi aksiomi grupe zadovoljeni.

1. Neka su Λ_1 i Λ_2 Lorencove transformacije. Primenimo prvo transformaciju Λ_1 , a zatim Λ_2 . Vektor koordinate x^μ posle prve Lorencove transformacije prelazi u $x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu_\nu x^\nu$. Ako sada primenimo transformaciju Λ_2 , dobićemo

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu x'^\nu = (\Lambda_2)^\mu_\nu (\Lambda_1)^\nu_\rho x^\rho.$$

Sada ćemo pokazati da je $\Lambda_2 \Lambda_1$ Lorencova transformacija. To se vidi direktno:

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T g (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^T (\Lambda_2^T g \Lambda_2) \Lambda_1 = \Lambda_1^T g \Lambda_1 = g.$$

Ovim smo pokazali zatvorenost.

2. Jedinični element grupe je jedinična matrica.

3. Množenje matrica je asocijativno, pa asocijativnost važi i za Lorencove transformacije.
4. Iz (1.1.3) sledi da je inverzni element $\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^Tg$. On je takodje Lorencova transformacija jer je

$$(\Lambda^{-1})^Tg\Lambda^{-1} = g .$$

U komponentnoj notaciji inverzna Lorencova matrica je

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = (g^{-1}\Lambda^Tg)^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}\Lambda^\sigma{}_\rho g_{\sigma\nu} \equiv \Lambda_\nu{}^\mu . \quad (1.1.5)$$

Ovim smo pokazali da Lorencove transformacije čine grupu.

Iz uslova (1.1.3), uzimajući $\rho = \sigma = 0$, sledi

$$\Lambda^0{}_0 g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_0 = 1 ,$$

odnosno

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 .$$

Zaključujemo je $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, odnosno

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ ili } \Lambda^0{}_0 \leq -1 . \quad (1.1.6)$$

Ukoliko je $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, ovakve Lorencove transformacije ne menjaju smer vremena i nazivaju se ortohronim Lorencovim transformacijama. Transformacije za koje je $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ menjaju smer vremena.

Računajući determinantu izraza (1.1.3), dobijamo

$$\det \Lambda = \pm 1 . \quad (1.1.7)$$

Determinanta Lorencovih transformacija je dakle 1 (prave Lorencove transformacije), ili -1 .

Lorencova grupa je nepovezana. To znači da proizvoljna dva elementa ove grupe ne mogu biti dobijena jedan iz drugog neprekidnom transformacijom u prostoru parametara. Ona se sastoji od četiri nepovezana dela, tj. četiri disjunktna podskupa, u zavisnosti od vrednosti determinante $\det \Lambda$ i vrednosti matričnog elementa $\Lambda^0{}_0$. Prave ortohrone Lorencove transformacije zadovoljavaju

$$\det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 . \quad (1.1.8)$$

Jedinična matrica pripada pravim ortohronim Lorencovim transformacijama i one su podgrupa cele grupe. Prave ortohrone Lorencove transformacije obeležavaćemo sa L_+^\uparrow . Znak plus u indeksu označava da je njihova determinanta $+1$, a strelica na gore da nema promene smera vremena. Sledeći deo Lorencove grupe ima determinantu -1 i ove transformacije ne menjaju smer vremena. Obeležavamo ih sa L_-^\uparrow . Njima pripada prostorna inverzija i važi

$L_-^\uparrow = I_p L_+^\uparrow$, tj. dobijamo ih tako što prave ortohrone transformacije pomnožimo matricom prostorne inverzije. One čine P-koset. Analogno vremenska inverzija pripada T kosetu Lorencove grupe, tj. $L_-^\downarrow = I_t L_+^\uparrow$. Četvrti koset uključuje i prostornu i vremensku inverziju, $L_+^\downarrow = I_t I_p L_+^\uparrow$. Lorencova grupa se sastoji dakle od četiri nepovezana dela. Ova analiza je sumirana u sledećoj tabeli:

$\det \Lambda$	$\Lambda^0{}_0$	Oznaka	Naziv
+1	≥ 1	L_+^\uparrow	Prave ortohrone
+1	≤ -1	L_+^\downarrow	PT koset
-1	≥ 1	L_-^\uparrow	P koset
-1	≤ -1	L_-^\downarrow	T koset

Transformacije za koje je $\det \Lambda = 1$ čine podgrupu $SO(1, 3, R)$.

Pod relativističkom kovariantnošću neke teorije podrazumeva se njena kovariantnost ne na celu Lorencovu grupu, već samo na prave ortohrone Lorencove transformacije L_+^\uparrow . Često se pod Lorencovim transformacijama podrazumevaju samo prave orthrone transformacije. Bustovi i rotacije zadovoljavaju uslov (1.1.8) i čine prave ortohrone Lorencove transformacije.

1.1.1 Prave ortohrone Lorencove transformacije

U prethodnom paragrafu smo rekli da prave ortohrone Lorencove transformacije, L_+^\uparrow čine podgrupu Lorencove grupe. Šta više ona je invarijantna podgrupa¹, dok su druge komponente koseti. Elementi iz L_+^\uparrow u okolini jedinice su $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \in L_+^\uparrow$, gde smo sa $\omega_{\mu\nu}$ obeležili parametre Lorencovih transformacija. Iz uslova $\Lambda^T g \Lambda = g$ sledi $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, tj. grupa L_+^\uparrow ima šest nezavisnih parametara. Može se pokazati da je ona Ljeva grupa.

Prave orthrone Lorencove transformacije L_+^\uparrow se sastoje od rotacija i bustova. Parametri $\omega_{\mu\nu}$ koji imaju oba prostorna indeksa odgovaraju rotacijama. Preciznije²,

$$\theta_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk} \quad (1.1.9)$$

je ugao rotacije oko i -te ose Dekartovog koordinatnog sistema. Matrica rotacije je oblika

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\vec{n}}(\varphi) \end{pmatrix},$$

gde je $R_{\mathbf{n}}(\varphi) \in SO(3)$, matrica rotacije za ugao φ oko orta \mathbf{n} . Rotacije čine podgrupu Lorencove grupe. Bustovi³ su transformacije koje povezuje dva inercijalna sistema od kojih

¹Za osnovne pojmove teorije grupe videti apendiks A.

² ϵ_{ijk} je simbol Levi Čivita u trodimenzionalnom prostoru. Uzimamo da je $\epsilon_{123} = 1$. Indekse na simbolu Levi Čivita ćemo pisati kao donje.

³Bustovi se nazivaju i čistim Lorencovim transformacijama.

se jedan (obično primovan) kreće konstantnom brzinom u odnosu na drugi (neprimovan). Ako se primovan sistem kreće brzinom v duž x – matrica busta je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gde je

$$\beta = v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.1.10)$$

Uvodeći parametar φ_1 sa $v_1 = \tanh \varphi_1$ matrica busta postaje

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi_1 & -\sinh \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.11)$$

Zbog oblika ovih transformacija one se često nazivaju hiperboličkim rotacijama. Bustovi duž y i z ose imaju analogan oblik. Recimo samo da su parametri ω_{0i} parametri bustova i važi $\omega_{0i} = -\varphi_i = -\tanh^{-1} v_i$. Ako se primovan sistem kreće brzinom v duž pravca $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ matrica busta je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_i \\ -\gamma\beta_i & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad (1.1.12)$$

gde je $\beta_i = v_i$. Uvodeći parametar $\gamma = \cosh \varphi$ matrica busta postaje

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -n_i \sinh \varphi \\ -n_i \sinh \varphi & 1 + (\cosh \varphi - 1)n_i n_j \end{pmatrix}. \quad (1.1.13)$$

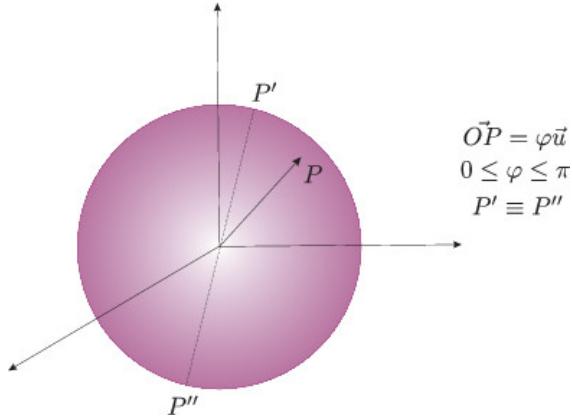
Proizvoljna Lorencova transformacija je proizvod rotacije R i busta B , tj. $\Lambda = RB$.

Lorencova grupa, L_+^\uparrow je nekompaktna grupa. Prostor parametara rotacija je kompaktan, dok je prostor parametara bustova nekompaktan. Brzina pokretnog sistema je $0 \leq v < c$, to jest ne sadrži limes $v \rightarrow c$.

Lorencova grupa L_+^\uparrow je dvostruko povezana. Prostor parametara bustova je prosto povezan. Za rotacije to medjutim nije slučaj. Grupu rotacija, $SO(3)$, čine 3×3 matrice R koje zadovoljavaju uslove $R^T R = 1$ i $\det R = +1$. $SO(3)$ je podgrupa Lorencove grupe. Proizvoljna rotacija

$$R_{ij}(\varphi, \mathbf{n}) = \cos \varphi \delta_{ij} + (1 - \cos \varphi) n_i n_j - \sin \varphi \epsilon_{ijk} n_k$$

je zadata uglom rotacije φ , $0 \leq \varphi \leq \pi$ i ortom \mathbf{n} oko koga je izvršena rotacija. Rotaciona grupa je troparametarska. Prostor parametara $SO(3)$ grupe je π -kugla, slika 1.1. To je kugla poluprečnika π kod koje su suprotne tačke (antipodi) identifikovani. Ova

Slika 1.1: π -kugla.

identifikacija je posledica činjenice da su rotacija oko ose \mathbf{n} za ugao π i rotacija oko ose $-\mathbf{n}$ za ugao $-\pi$ jednake. Zbog ove identifikacije, postoje dve klase puteva. Put prikazan na levoj slici 1.2 može biti kontrahovan u tačku neprekidnom transformacijom, dok put prikazan na desnoj slici 1.2 ne može. Dakle, prva fundamentalna grupa $SO(3)$ grupe je $\pi_1(SO(3)) = Z_2$. Elementi Z_2 su $\{g, g^2 = e\}$, gde je e jedinični element grupe. Može se pokazati da za svaku višestruko povezanu grupu G postoji jedna grupa \tilde{G} koja je prosto povezana, homomorfna sa G i ne sadrži nijednu podgrupu koja je homomorfna sa G . Ona se naziva univerzalno natkrivajućom grupom. Univerzalna natkrivajuća grupa za grupu $SO(3)$ je $SU(2)$, tj. $\tilde{SO}(3) = SU(2)$.

Slika 1.2: Dve klase puteva na π -kugli.

Grupe $SU(2)$ i $SO(3)$ su homomorfne. Prostor parametara grupe $SU(2)$ je trosfera, S^3 i prosto je povezan. Ireducibilne reprezentacije univerzalno natkrivajuće grupe su jednoznačne, dok su ireducibilne reprezentacije $SO(3)$ dvoznačne ili jednoznačne.

Kako Lorencova grupa nije prosto povezana, to ona ima univerzalno natkrivajuću grupu. Univerzalno natkrivajuća grupa grupe L_+^\uparrow je $SL(2, \mathbb{C})$. To je grupa 2×2 kompleksnih matrica, čija je determinanta jednaka 1. Razmotrimo detaljnije vezu izmedju ove dve grupe.

Četvorovektoru x^μ pridružićemo hermitsku matricu $X = x_\mu \sigma^\mu$ gde su $\sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma})$ generalisane Paulijeve matrice. Matrice $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ su Paulijeve matrice. Uvešćemo i

matrice $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$. Generalisane Paulive matrice su normalizovane prema

$$\text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu) = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.1.14)$$

Matrica X je definisana kao

$$X = x_\mu \sigma^\mu = X^\dagger = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.1.15)$$

Množeći $X = x_\mu \sigma^\mu$ matricom $\bar{\sigma}^\nu$ i uzimanjem traga dobijamo inverznu relaciju

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(X \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.1.16)$$

Lako se vidi da je $\det X = x^2$. Transformacije oblika

$$X \rightarrow X' = SXS^\dagger,$$

gde je $S \in SL(2, \mathbb{C})$ ne menjaju determinantu matrice X , to jest $\det X' = \det X$. Dakle, ove transformacije ne menjaju dužinu četvorovektora x^μ , to jest $x'^2 = x^2$. Zaključujemo da one odgovaraju Lorencovim transformacijama četvorovektora x^μ . Nadjimo eksplicitno vezu izmedju elemenata Λ iz L_+^\uparrow i S iz $SL(2, \mathbb{C})$. Iz $X' = x'_\mu \sigma^\mu$ sledi

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu X') \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^\dagger) x^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

to jest

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^\dagger). \quad (1.1.18)$$

Lako se pokazuje da važi

$$\Lambda(S_1)\Lambda(S_2) = \Lambda(S_1S_2),$$

pa zaključujemo da je ovo preslikavanje homomorfizam izmedju L_+^\uparrow i $SL(2, \mathbb{C})$ grupe. Međutim, ovo preslikavanje je 2 – 1 preslikavanje. Lorencovoj transformaciji Λ odgovaraju dve matrice $\pm S$ iz $SL(2, \mathbb{C})$, slika 1.3.

Zaključujemo da su grupe L_+^\uparrow i $SL(2, \mathbb{C})$ homomorfne, a grupa L_+^\uparrow je izomorfna faktor grupe $SL(2, \mathbb{C})/Z_2$, gde je $Z_2 = \{I, -I\}$ kernel izomorfizma.

1.1.2 Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija Lorencove grupe

Kao fizičare, nas zanima klasifikacija konačno dimenzionalnih ireducibilnih (IR) reprezentacija Lorencove grupe, to jest njene univerzalno natkrivajuće grupe $SL(2, \mathbb{C})$. Podsetimo se da se IR reprezentacije mogu klasifikovati koristeći Kazimirove operatore. Kazimirovi operatori su polinimijalni operatori generatora koji komutiraju sa svim generatorima grupe, pa

Slika 1.3: Veza Lorencove i $SL(2, \mathbb{C})$ grupe.

se prema Šurovoj lemi u pojedinim IR reprezentacijama svode na brojeve. Ti brojevi se onda koriste za obeležavanje IR reprezentacija. Da bismo odredili Kazimirove operatorne za Lorencovu grupu, prvo moramo odrediti algebru Lorencove grupe. To možemo uraditi na dva načina.

Prvi način koristi reprezentaciju klasičnog skalarnog polja. Klasično sklarano polje se pri Lorencovim transformacijama transformiše na sledeći način

$$\varphi'(x' = x + \delta x) = \varphi(x) .$$

Drugim rečima skalarano polje u starom sistemu je isto kao i skalarano polje u novom inercijalnom sistemu. Varijacija forme polja je onda

$$\delta_0 \varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) = \varphi(x - \delta x) - \varphi(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu \varphi , \quad (1.1.19)$$

odnosno

$$\delta_0 \varphi(x) = -\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \varphi = -\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \varphi . \quad (1.1.20)$$

Sa druge strane, znamo da se proizvoljno klasično polje Φ pri Lorencovim transformacijama transformišu na sledeći način

$$\Phi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}} \Phi(x) , \quad (1.1.21)$$

gde su $M_{\mu\nu}$ generatori Lorencovih transformacija. Oni su oblika $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}$, tj. suma orbitalnog i spinskog dela generatora. U slučaju sklaranog polja $\Sigma_{\mu\nu} = 0$, pa je $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}$. Onda je

$$\delta_0 \varphi(x) = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \varphi ,$$

odakle nalazimo

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) . \quad (1.1.22)$$

Ovo su generatori Lorencove grupe u reprezentaciji klasičnog skalaranog polja. Reprezentovali smo ih diferencijalnim operatorima. Izračunajmo sada komutator izmedju dva generatora:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i^2 [x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu, x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho] .$$

Lako se vidi da je

$$[x_\mu \partial_\nu, x_\rho \partial_\sigma] = g_{\nu\rho} x_\mu \partial_\sigma - g_{\sigma\mu} x_\rho \partial_\nu ,$$

pa je

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}). \quad (1.1.23)$$

Ovo su komutacione relacije Lorencove algebre.

Komutator izmedju dva generatora Lorencove grupe smo našli u konkretnoj reprezentaciji. Izračunajmo ga sada u proizvoljnoj reprezentaciji Lorencove grupe. Element iz L_+^\uparrow ima oblik

$$U(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}},$$

gde su $M_{\mu\nu}$ generatori u nekoj reprezentaciji, a $\omega_{\mu\nu}$ parametri Lorencovih transformacija. Kako se radi o reprezentaciji to mora važiti

$$U^{-1}(\Lambda)U(\Lambda')U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda).$$

Uzmimo da je transformacija $\Lambda' = I + \omega'$ infinitezimalna. Onda je

$$\begin{aligned} \Lambda''{}^\mu{}_\nu &= (\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)^\mu{}_\nu \\ &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\delta^\rho{}_\sigma + \omega'^\rho{}_\sigma) \Lambda^\sigma{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho \Lambda^\sigma{}_\nu \omega'^\rho{}_\sigma = \delta^\mu{}_\nu + \omega''{}^\mu{}_\nu, \end{aligned}$$

pa imamo

$$U^{-1}(\Lambda) \left(1 - \frac{i}{2}M^{\rho\sigma}\omega'_{\rho\sigma} \right) U(\Lambda) = I - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\sigma{}_\nu \omega'_{\rho\sigma} g^{\rho\alpha} M^{\lambda\nu} g_{\mu\lambda} \quad (1.1.24)$$

odakle je

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)M^{\rho\sigma}U(\Lambda) &= g^{\rho\alpha}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g_{\mu\lambda} \Lambda^\sigma{}_\nu M^{\lambda\nu} \\ &= \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu M^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Vidi se da je operator $M^{\rho\sigma}$ tenzor drugog reda u odnosu na Lorencove transformacije, kao što je i očekivano. Sada ćemo uzeti da je transformacija Λ infinitezimalna, tj.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \right) M^{\rho\sigma} \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \right) &= \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu M^{\mu\nu} \\ &= (\delta^\rho{}_\mu + \omega^\rho{}_\mu)(\delta^\sigma{}_\nu + \omega^\sigma{}_\nu) M^{\mu\nu} \\ &= M^{\rho\sigma} + \omega^\sigma{}_\nu M^{\rho\nu} + \omega^\rho{}_\mu M^{\mu\sigma}, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \omega_{\mu\nu}(M^{\rho\nu}g^{\sigma\mu} + M^{\nu\sigma}g^{\rho\mu}). \quad (1.1.26)$$

Da bismo skratili antisimetrične parametre $\omega_{\mu\nu}$ moramo antisimetrizovati član u zagradi sa desne strane. Tako dobijamo

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}). \quad (1.1.27)$$

Na ovaj način smo dobili komutacione relacije Lorencove algebre u proizvoljnoj reprezentaciji, koje naravno moraju biti identične sa (1.1.23).

Definišimo sada nove generatore⁴

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}, \quad K_i = M_{0i}. \quad (1.1.28)$$

Operatori J_i su generatori rotacija, dok su K_i generatori bustova. Iz (1.1.23) sledi

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (1.1.29)$$

Vidimo da rotacije čine podalgebru Lorencove algebre. Ako dalje definišemo operatore

$$M_i = \frac{1}{2} (J_i + iK_i), \quad N_i = \frac{1}{2} (J_i - iK_i) \quad (1.1.30)$$

komutacione relacije (1.1.27) postaju

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k, \quad [M_i, N_j] = 0. \quad (1.1.31)$$

Dobili smo⁵ dve $su(2)$ algebre tj.

$$so(1, 3)_C \cong su(2) \oplus su(2). \quad (1.1.32)$$

Iz komutacionih relacija (1.1.31) vidimo da je rang Lorencove algebre dva, jer maksimalan skup komutirajućih generatora sadrži dva elementa (po jedan za svaku $su(2)$ algebru). Lorencova grupa je prosta grupa, jer ne sadrži invarijantne podgrupe.

Lorencova algebra ima dva Kazimirova operatora, preko kojih se mogu klasifikovati ireducibilne reprezentacije. Kazimirovi operatori su dati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= \sum_{i=1}^3 (M_i)^2, \\ \mathbf{N}^2 &= \sum_{i=1}^3 (N_i)^2. \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

Oni potiču od ove dve $su(2)$ algebre. Kazimirovi operatori (1.1.33) se svode na brojeve:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &\rightarrow j_1(j_1 + 1) \\ \mathbf{N}^2 &\rightarrow j_2(j_2 + 1). \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

⁴Generatori J_i i K_i su vektori u euklidskom prostoru. Oni nisu deo nekog četvorovektora, pa iz tog razloga indekse na njima ćemo podizati sa Kronekerovom deltom, tj. $K^i = K_i$, $J^i = J_i$. Drugim rečima, kod ovakvih veličina nećemo uzimati da je metrika troprostora $-\delta_{ij}$, kao deo metrike prostora Minkovskog. Slično, trodimenzionalni simbol Levi-Čivita ϵ_{ijk} je pseudotenzor trodimenzionog prostora. Uzimamo da je $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$. Po pravilu, da bismo izbegli zabunu indekse na ovim veličinama ćemo pisati kao donje. Medjutim, kod trovektora koji su deo četvorovektora moramo voditi računa o tome da li je prostorna komponetna gornja ili donja. Npr. za prostorne komponente impulsa važi $P_i = -P^i$. Slično je $M_{0i} = -M^{0i}$, $M_{ij} = M^{ij}$, jer su ovo elementi od $M_{\mu\nu}$ koji je tenzor drugog reda.

⁵Treba imati na umu da smo napravili kompleksne kombinacije generatora, tj. kompleksifikovali smo algebru.

Dakle, ireducibilne reprezentacije Lorencove grupe indeksiramo uredjenim parom brojeva (j_1, j_2) , gde su j_1 i j_2 uzimaju vrednosti $0, 1/2, 1, 2, 3/2, \dots$.

Pri Lorencovim transformacijama klasična polja $\varphi_r(x)$ transformišu se prema [12]

$$\varphi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(x) . \quad (1.1.35)$$

Sa $\varphi'_r(x' = \Lambda x)$ smo obeležili nova polja u novom sistemu. Ovu relaciju možemo prepisati u ekvivalentnom obliku

$$\varphi'_r(x) = S_{rs}(\Lambda)\varphi_s(\Lambda^{-1}x) . \quad (1.1.36)$$

Kvantna polja $\phi_r(x)$, se pri Lorentz-ovim transformacijama transformišu prema

$$U(\Lambda)\phi_r(x)U^{-1}(\Lambda) = S_{rs}^{-1}(\Lambda)\phi_s(\Lambda x) . \quad (1.1.37)$$

Za skalarno polje je $S = I$, za Dirakovo polje je $S(\Lambda) = e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4}$, dok je za vektorsko polje $S = \Lambda^\mu_\nu$. Polja se dakle transformišu po reprezentacijama Lorencove grupe. U sledećoj tabeli smo dali reprezentacije nekih polja:

- $(0, 0)$ skalarno polje,
- $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ Dirakovo polje,
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ elektromagnetno polje,
- $(\frac{1}{2}, 0)$ levo Vajlovo polje,
- $(0, \frac{1}{2})$ desno Vajlovo polje.

Ireducibilne rerezentacije za koje je $j_1 + j_2$ ceo broj su jednoznačne, dok su one za koje je to poluceo broj dvoznačne.

Stanja unutar ireducibilne reprezentacije (j_1, j_2) klasifikujemo brojevima

$$\begin{aligned} (j_1)_3 &= -j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1 \\ (j_2)_3 &= -j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2 . \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

Dimenzija ireducibilne reprezentacije (j_1, j_2) je onda $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Ove reprezentacije su konačno dimenzionalne. Ne treba zaboraviti da ove reprezentacije nisu unitarne, jer je L_+^\uparrow nekompaktna grupa.

1.2 Poenkareova grupa

Poenkareove transformacije su izometrije prostora Minkovskog⁶ i sastoje se od Lorencovih transformacija i translacija:

$$x'^\mu = (\Lambda, a)x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu , \quad (1.2.1)$$

tako da je $(\Lambda, a) \in P$. Lako se vidi da je

$$(\Lambda, a) = (I, a)(\Lambda, 0) \neq (\Lambda, 0)(I, a) ,$$

gde je (I, a) translacija, a $(\Lambda, 0)$ Lorencova transformacija.

Na osnovu definicije vidimo da je Poenkareova grupa P desetoparametarska. Lijeva grupa (šest parametara za Lorencove transformacije i četiri za translacije). Lorencove transformacije $(\Lambda, 0)$ su podgrupa Poenkareove grupe. Translacijske (I, a) su invarijantna Abelova podgrupa, pa je Poenkareova grupa semidirektni proizvod

$$P = T_4 \ltimes O(1, 3, R).$$

Poenkareova grupa se, kao i Lorencova, sastoji od četiri disjunktne komponente P_+^\uparrow , P_+^\downarrow , P_-^\uparrow i P_-^\downarrow . Topološke osobine podgrupe P_+^\uparrow su:

- P_+^\uparrow je nekompaktna jer su L_+^\uparrow i T_4 nekompaktne grupe.
- P_+^\uparrow je dvostruko povezana, jer je L_+^\uparrow dvostruko povezana.
- P_+^\uparrow nije prosta niti poluprosta grupa.

Pri infinitezimalnim Poenkareovim transformacijama koordinate se transformišu prema

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu , \quad (1.2.2)$$

gde su $\omega_{\mu\nu}$ parametri Lorencovih transformacija, a ϵ^μ parametri translacija. Proizvoljan element iz P_+^\uparrow je

$$U(\omega, \epsilon) = e^{i\epsilon_\mu P^\mu - \frac{i}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}. \quad (1.2.3)$$

Generatori translacija su impulsi P^μ , dok su generatori Lorencovih transformacija operatori angуларног момента $M_{\mu\nu}$.

⁶Izometrije nekog prostora su transformacije koordinata pri kojima je varijacija forme metričkog tenzora nula

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= x^\mu + \xi^\mu, \\ \delta_0 g_{\mu\nu} &= -\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} - (\partial_\nu \xi^\rho) g_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Nadjimo sada komutacione relacije u Poenkareovoj algebri. Odredimo generatore translacija u reprezentaciji klasičnog skalarnog polja. Varijacija forme klasičnog skalarnog polja pri translaciji je

$$\begin{aligned}\delta_0\phi &= -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi \\ &= i\epsilon^\mu P_\mu \phi.\end{aligned}$$

Dakle, četvorovektor impulsa je

$$P^\mu = i\partial^\mu = \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} \\ -i\nabla \end{pmatrix}. \quad (1.2.4)$$

Impuls je diferencijalni operator, kao što smo već videli u kvantnoj mehanici. Koristeći ovaj rezultat i (1.1.22) lako se nalazi Poenkareova algebra. Ona je data sa

$$\begin{aligned}[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\rho\sigma}, P_\mu] &= [i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho), i\partial_\mu] = i(g_{\mu\rho} P_\rho - g_{\mu\sigma} P_\sigma) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\sigma\mu} M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu} M_{\mu\rho}).\end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Ove komutacione relacije važe u proizvoljnoj reprezentaciji.

1.2.1 Klasifikacija unitarnih ireducibilnih reprezentacija prave ortohrone Poenkareove grupe

Fizička stanja čestica su elementi Hilbertovog prostora. Poenkareove transformacije su na prostoru stanja reprezentovane unitarnim operatorima. Kako je Poenkareova grupa nekompaktna to su njenje unitarne ireducibilne reprezentacije beskonačno dimenzionalne.

Da bismo klasifikovali unitarne ireducibilne reprezentacije Poenkareove grupe moramo naći Kazimirove operatore. Jedan Kazimirov operator je kvadrat impulsa, $P^2 = P_\mu P^\mu$. Lako se vidi, na osnovu komutacionih relacija (1.2.5) da je

$$[P^2, M_{\mu\nu}] = [P^2, P_\mu] = 0. \quad (1.2.6)$$

Vektor Pauli-Lubanskog je definisan sa

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma. \quad (1.2.7)$$

Njegov kvadrat $W^2 = W_\mu W^\mu$ je drugi Kazimirov operator Poenkareove algebre. U zadatku 1.14 u [11] je pokazano da je

$$[W^2, M_{\mu\nu}] = [W^2, P_\mu] = 0, \quad (1.2.8)$$

Dakle, iz relacija (1.2.6) i (1.2.8) sledi da su P^2 i W^2 Kazimirovi operatori grupe P_+^\uparrow , pa oni klasifikuju njene ireducibilne reprezentacije. Po Šurovoj lemi, Kazimirovi operatori se svode na brojeve u datoj ireducibilnoj reprezentaciji. Ti brojevi određuju reprezentaciju.

Jednočestična stanja se transformišu po reprezentacijama Poenkareove grupe, P_+^\uparrow . Da bismo klasifikovali vektore unutar jedne ireducibilne reprezentacije moramo da odredimo skup komutirajućih operatora, tj. treba da Kazimirove operatore P^2 , W^2 dopunimo medjusobno komutirajućim operatorima. Operatori koji medjusobno komutiraju mogu se istovremeno meriti i oni nam daju kvantne brojeve. Ti kvantni brojevi jednoznačno određuju česticu. Operatori impulsa komutiraju medjusobno $[P_\mu, P_\nu] = 0$. Vektori stanja čestice su $|p, \sigma\rangle$, gde je p četvoroimpuls (koji zadovoljava $p^2 = m^2$), a σ je skup dopunskih kvantnih brojeva. Vektori stanja su svojstveni vektori operatora impulsa

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle .$$

Masene čestice

Razmatrajmo sada masene čestice. U sistemu mirovanja impuls čestice je

$$\tilde{p}^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad (1.2.9)$$

dok su komponente vektora Pauli-Lubanskog

$$\begin{aligned} W^0 |\tilde{p}, \sigma\rangle &= 0 \\ W^i |\tilde{p}, \sigma\rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk0} M_{jk} m |\tilde{p}, \sigma\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} M_{jk} m |\tilde{p}, \sigma\rangle \\ &= -m J^i |\tilde{p}, \sigma\rangle . \end{aligned}$$

Vidimo da se na stanjima masene čestice u sistemu mirovanja vektor Pauli Lubanskog svodi na operatore $J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$. To su generatori rotacija i zadovoljavaju komutacione relacije $su(2)$ algebre

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k .$$

Dakle, \mathbf{J} je spin čestice. U sistemu mirovanja masene čestice komponente vektora Pauli-Lubanskog su

$$W^\mu = (0, -m\mathbf{J}) , \quad (1.2.10)$$

pa je kvadrat vektora Pauli-Lubanskog

$$W^2 = -m^2 \mathbf{J}^2 .$$

Kazimirovi operatori P^2 i W^2 na stanjima masene čestice u sistemu mirovanja se svode na brojeve

$$P^2 |\tilde{p}, \sigma\rangle = m^2 |\tilde{p}, \sigma\rangle , \quad (1.2.11)$$

$$W^2 |\tilde{p}, \sigma\rangle = -m^2 \mathbf{J}^2 |\tilde{p}, \sigma\rangle = -m^2 s(s+1) |\tilde{p}, \sigma\rangle . \quad (1.2.12)$$

Ireducibilne reprezentacije Poenkareove grupe su dakle klasifikovane masom i spinom, (m, s) . Vektor Pauli-Lubanskog W^μ je generalizacija spina i često se naziva kovarijantni spin.

Translacije deluju na stanja čestice $|p, \sigma\rangle$ prema

$$U(I, a)|p, \sigma\rangle = e^{iP^\mu a_\mu}|p, \sigma\rangle = e^{ip^\mu a_\mu}|p, \sigma\rangle .$$

Za razliku od translacija, Lorencove transformacije pri delovanju na stanje daju linearu kombinaciju stanja po spinskih stepenima slobode, dok je impuls ovako dobijenog stanja $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$, tj.

$$U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} Q_{\sigma' \sigma}|p', \sigma'\rangle,$$

gde je Q unitarna matrica. Pokažimo eksplicitno da je p' impuls stanja $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$. Delujmo operatorom impulsa na ova stanja

$$P^\mu U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda, 0)U^{-1}(\Lambda, 0)P^\mu U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle . \quad (1.2.13)$$

Ako sada primenimo zakon transformacije impulsa pri Lorencovim transformacijama

$$U^{-1}(\Lambda, 0)P^\mu U(\Lambda, 0) = \Lambda^\mu{}_\rho P^\rho \quad (1.2.14)$$

dobijamo

$$P^\mu U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle .$$

Kako je $p^2 = p'^2 = m^2$, to Lorencove transformacije ne izbacuju impuls iz potprostora sa fiksnom vrednošću $p^2 = m^2$. Potprostor stanja $\{|p, \sigma\rangle; p^2 = m^2, p^0 > 0\}$ je invarijantan pod dejstvom Poenkareovih transformacija P_+^\dagger , ali je on reducibilan. Da bismo ga razbili na ireducibilne komponente moramo da dopunimo skup operatora P^2, W^2, P^μ sa još komutirajućih operatora. Iz

$$[W^2, W_\mu] = 0 \text{ i } [W_\mu, W_\nu] \neq 0$$

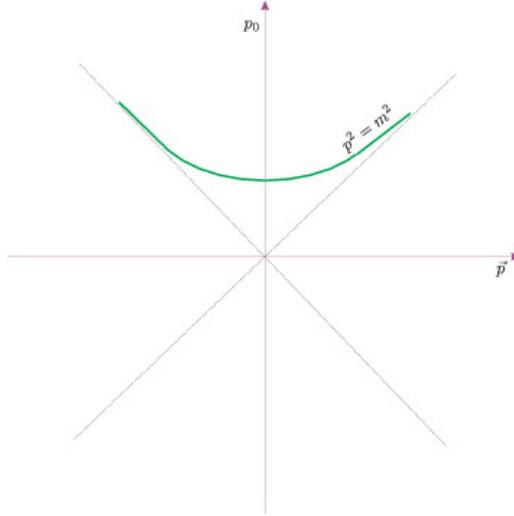
sledi da W^2 i jedna komponenta vektora Pauli-Lubanskog mogu biti istovremeno dijagonalizovane. Dopunski operator je treća komponenta vektora Pauli-Lubanskog W_3 .

Rezimirajmo:

- Skup komutirajućih operatora je $P^2, W^2, P^\mu, W^3, p^0/|p^0|$.
- Masa i spin klasificuju ireducibilne reprezentacije Poenkareove grupe.
- Jednočestična stanja se klasifikuju impulsom \mathbf{p} i projekcijom spina na z osu; $W_3 = -ms_3$. Jednočestični vektori stanja su $|m, s; \mathbf{p}, s_3\rangle$.
- U sistemu mirovanja stanja zadovoljavaju

$$\begin{aligned} W^3|\tilde{p}, s_3\rangle &= -ms_3|\tilde{p}, s_3\rangle \\ W^2|\tilde{p}, s_3\rangle &= -m^2 s(s+1)|\tilde{p}, s_3\rangle , \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

gde je $\tilde{p} = (m, \vec{0})$ impuls čestice u sistemu mirovanja.



Slika 1.4: Orbite delovanja Lorencove grupe.

Bezmasene čestice

Sada ćemo razmotriti reprezentacije Poenkareove grupe u slučaju bezmasenih čestica, $p^2 = 0$. Uzećemo da je⁷ $W^2 = 0$. Kako je $W^\mu P_\mu = 0$, to je vektor Pauli–Lubanskog kolinearan sa impulsom, tj. $W^\mu = -\lambda P^\mu$, gde je λ konstanta. Fizički smisao ove konstante se vidi na osnovu sledeće analize. Nulta komponenta vektora Pauli Lubanskog je

$$W^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M_{jk} P_k = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{P} . \quad (1.2.16)$$

Četvoroimpuls bezmasene čestice je $p = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$. Na stanjima bezmasene čestice važi

$$(W^0 + \lambda P^0)|p, \lambda\rangle = 0 ,$$

odnosno

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{P}|p, \lambda\rangle = \lambda P^0|p, \lambda\rangle .$$

Iz ove relacije vidimo da je λ projekcija spina na pravac kretanja čestice, tj. njen helicitet. Dakle,

$$\lambda = -\frac{w^0}{p^0} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{p_0} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Helicitet je dobar kvantni broj za bezmasene čestice jer je invarijantan na Lorencove transformacije. Za masene čestice on nije invarijantno definisan. Na primer, neka elektron impulsa \mathbf{p} ima helicitet $+1/2$. Lorencovim bustom možemo preći u sistem u kojem je impuls ovog elektrona $-\mathbf{p}$ pa mu je helicitet $-1/2$.

⁷Kasnije ćemo videti da slučaj $W^2 < 0$ dovodi do kontinualnog kvantnog broja spina, što je fizički neprihvatljivo.

Rezime

Do sada smo razmatrali dve klase IR Poenkareove grupe:

$$1. p^2 = m^2 > 0, \frac{p_0}{|p_0|} = +1.$$

Ovo je reprezentacija Poenkareove grupe na prostoru masenih stanja. U sistemu mirovanja, za fiksnu vrednost impulsa imamo $2s+1$ spinskih stanja $|\tilde{p}, s_3\rangle$. Reprezentacija je beskonačno dimenzionalna jer je impuls kontinualan.

$$2. p^2 = 0, p_\mu \neq 0, W^2 = 0.$$

Ova je reprezentacija na prostoru bezmasenih čestica. Za fiksnu vrednost impulsa čestice postoji jedno helicitetno stanje $|p, \lambda\rangle$. Ako je teorija invarijantna na parnost onda postoje dva nezavisna helicitetna stanja. Na primer, foton može imati dva stanja heliciteta ± 1 .

Pored ove dve klase postoji još četiri moguće reprezentacije od P_+^\dagger koje su nefizičke:

3. $p^2 = m^2 > 0, \frac{p_0}{|p_0|} = -1$. Ova reprezentacija odgovara masenim stanjima negativne energije.
4. $p^2 = 0, p_0 < 0$. Ova reprezentacija odgovara negativno-energetskim bezmasenim stanjima.
5. $p_\mu = 0$. U ovoj reprezentaciji implus čestice je nula, što odgovara vakuumu.
6. $p^2 < 0$. Poenkareova grupa je reprezentovana na tzv. tahionskim stanjima (stanja imaginarne mase) koja su nefizička.

1.2.2 Vignerov metod

Pomoću Vignerovog metoda se mogu konstruisati sva stanja unutar jedne ireducibilne reprezentacije.

Neka je \tilde{p} fiksni četvoroimpuls, tzv. standardni impuls. Proizvoljan impuls p se dobija iz \tilde{p} transformacijom $L_{p\tilde{p}}$

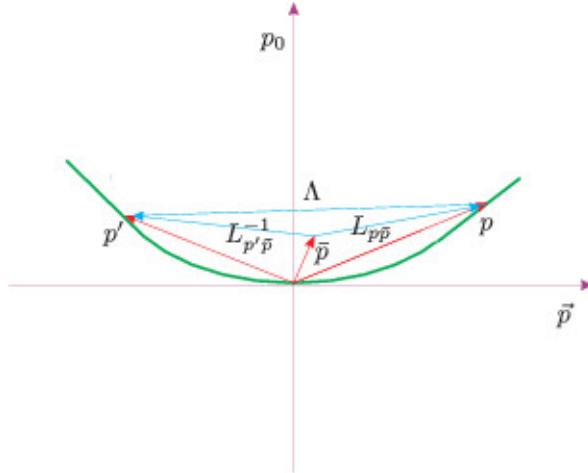
$$p = L_{p\tilde{p}}\tilde{p}.$$

Ova Lorencova transformacija nije jednoznačno definisana jer, ukoliko je $\ell\tilde{p} = \tilde{p}$ —rotacija oko \tilde{p} , onda transformacija $L_{p\tilde{p}}\cdot\ell$ takodje zadovoljava gornji uslov. Ako dodatno zahtevamo da se dopunski kvantni broj σ ne menja pri Lorencovim transformacijama,

$$U(L_{p\tilde{p}}, 0)|\tilde{p}, \sigma\rangle = |p, \sigma\rangle, \quad (1.2.17)$$

onda je ona jednoznačna i naziva se Vignerovom bustom. Odredimo sada kako proizvoljna Lorencova transformacija $U(\Lambda, 0)$ deluje na stanje $|\tilde{p}, \sigma\rangle$. Primenom (1.2.17) imamo

$$U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda, 0)U(L_{p\tilde{p}}, 0)|\tilde{p}, \sigma\rangle, \quad (1.2.18)$$



Slika 1.5: Vignerova rotacija

što dalje prepisujemo u obliku

$$U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = U(L_{p'\tilde{p}}, 0)U(L_{p'\tilde{p}}^{-1}, 0)U(\Lambda, 0)U(L_{p\tilde{p}}, 0)|\tilde{p}, \sigma\rangle. \quad (1.2.19)$$

Ako uvedemo matricu

$$R = L_{p'\tilde{p}}^{-1}\Lambda L_{p\tilde{p}},$$

onda je

$$U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle = U(L_{p'\tilde{p}}, 0)U(R, 0)|\tilde{p}, \sigma\rangle. \quad (1.2.20)$$

Impuls p' je $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$. Transformacija R je tzv. Vignerova rotacija.

Vidimo da transformacije R ostavljaju standardni impuls \tilde{p} invarijantnim i one čine podgrupu Poenkareove grupe. Ova podgrupa se naziva mala grupa. Delovanje male grupe na standardni impuls je prikazano na slici 1.5. Mala grupa je relevantni deo Poenkareove grupe za klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija. Iz (1.2.20) sledi

$$\begin{aligned} U(\Lambda, 0)|p, \sigma\rangle &= U(L_{p'\tilde{p}}, 0) \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)|\tilde{p}, \sigma'\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)|p', \sigma'\rangle, \end{aligned}$$

gde je $D_{\sigma'\sigma}(R)$ matrični element reprezentacije male grupe. Ako uključimo i translacije imamo

$$U(\Lambda, a)|p, \sigma\rangle = e^{ip'a} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(R)|p', \sigma'\rangle. \quad (1.2.21)$$

Unitarne ireducibilne reprezentacije P_+^\dagger su dobijene preko unitarnih ireducibilnih reprezentacija male grupe. Ove transformacije indukuju reprezentacije cele Poenkareove grupe. Ovaj metod se još naziva i indukcija sa invarijantne podgrupe. U slučaju Poenkareove grupe, translacije predstavljaju invarijantnu podgrupu.

U nastavku ćemo posebno razmatrati masene i bezmasene čestice.

Masene čestice

U slučaju masenih čestica, za standardni impuls uzećemo $\tilde{p}^\mu = (m, 0, 0, 0)$. Malu grupu čine Lorencove transformacije koje ne menjaju standardni impuls, $\Lambda \tilde{p} = \tilde{p}$. Jasno je da su one oblika

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix},$$

gde $\mathcal{R} \in SO(3)$. Dakle mala grupa je $SO(3)$ grupa. Vignerov bust $L_{p\bar{p}}$ je u ovom slučaju čist bust iz sistema mirovanja u sistem gde čestica ima impuls p ,

$$L_{p\bar{p}} = \begin{pmatrix} p^0 & -p^i \\ \frac{m}{p^0} & \delta_{ij} - \frac{m}{m(p_0+m)} p_i p_j \end{pmatrix}.$$

Sa p^i smo obeležili Dekartove komponente troimpulsa. Dejstvo Lorencovih transformacija na stanja masenih čestica unutar jedne fiksirane ireducibilne reprezentacije je dato sa

$$U(\Lambda, 0)|p, s_3\rangle = \sum_{s'_3} D_{s'_3 s_3}^{(s)}(R)|p', s'_3\rangle,$$

gde smo sa $D^{(s)}(R)$ obeležili $(2s+1)$ -dimenzionu reprezentaciju $SO(3)$ grupe, to jest njene univerzalno natkrivajuće grupe $SU(2)$.

Bezmasene čestice

Slučaj bezmasenih čestica je drugačiji od slučaja masenih čestica, jer ne možemo preći u sistem mirovanja. Za standardni impuls ćemo uzeti $\tilde{p} = (k, 0, 0, k)$, što odgovara bezmasenoj čestici koja ima impuls k duž z -ose. Malu grupu čine one transformacije koje ne menjaju standardni impuls

$$\Lambda^\mu_\nu \tilde{p}^\nu = \tilde{p}^\mu,$$

to jest infinitezimalno

$$\omega^\mu_\nu \tilde{p}^\nu = 0.$$

Eksplicitno:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

odakle dobijamo sledeće uslove na ω^μ_ν : $\omega_{03} = 0$, $\omega_{01} = \omega_{13}$, $\omega_{02} = \omega_{23}$, dok je ω_{12} proizvoljno. Ovi uslovi redukuju broj parametara Lorencove grupe sa šest na tri ω_{01}, ω_{02} i ω_{12} . Prema tome, proizvoljan element algebre transformacija koje ne menjaju standardni impuls je

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \omega_{01}(M^{01} + M^{13}) + \omega_{02}(M^{02} + M^{23}) + \omega_{12}M^{12}.$$

Generator M^{12} je generator rotacije oko z -ose. Iz prethodnih uslova sledi da postoji još dva generatora: $M^{01} + M^{13}$ i $M^{02} + M^{23}$. Primetimo da je⁸ $W_1 = (M^{02} + M^{23})k$, $W_2 = -(M^{01} + M^{13})k$ i $W_0 = -M^{12}k$. Lako se pokazuje da važi

$$[W_1, W_2] = 0, \quad [W_0/k, W_1] = -iW_2, \quad [W_0/k, W_2] = iW_1, \quad (1.2.22)$$

odnosno

$$\begin{aligned} [M^{02} + M^{23}, M^{01} + M^{13}] &= 0, \\ [J_3, M^{02} + M^{23}] &= -i(M^{01} + M^{13}), \\ [J_3, M^{01} + M^{13}] &= i(M^{02} + M^{23}). \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Ove komutacione relacije definišu $E(2)$, odnosno (kako se još obeležava) $ISO(2)$ grupu. $E(2)$ je euklidska grupa. Ona se sastoji od rotacija oko z -ose i translacija u xy -ravni,

$$ISO(2) = T_2 \ltimes SO(2).$$

Komutacione relacije E_2 algebре су

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= 0 \\ [J_3, E_1] &= iE_2 \\ [J_3, E_2] &= -iE_1. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Vidi se da je $J_3 = -W^0/k = M^{12}$, $E_1 = -W_2/k = M^{01} + M^{13}$ i $E_2 = W_1/k = M^{02} + M^{23}$.

Proizvoljan element iz $E(2)$ grupe je oblika

$$e^{-i\theta J_3} e^{-i(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)}, \quad (1.2.25)$$

gde su θ, α_1 i α_2 parametri. Ireducibilne reprezentacije euklidske grupe klasifikujemo pomoću Kazimirovog operatora $E_1^2 + E_2^2$. Operatori E_1 i E_2 komutiraju i mogu biti simultano dijagonalizovani. Njihovi zajednički svojstveni vektori $|a_1, a_2\rangle$ zadovoljavaju svojstvene jednačine:

$$\begin{aligned} E_1|a_1, a_2\rangle &= a_1|a_1, a_2\rangle \\ E_2|a_1, a_2\rangle &= a_2|a_1, a_2\rangle. \end{aligned}$$

Svojstvene vrednosti ovih operatora a_1 i a_2 klasifikuju vektore. Iz

$$\begin{aligned} e^{i\theta J_3} E_1 e^{-i\theta J_3} &= E_1 \cos \theta - E_2 \sin \theta \\ e^{i\theta J_3} E_2 e^{-i\theta J_3} &= E_1 \sin \theta + E_2 \cos \theta \end{aligned}$$

sledi da postoji kontinum svojstvenih stanja definisanih sa

$$|\theta; a_1, a_2\rangle = e^{-i\theta J_3}|a_1, a_2\rangle, \quad (1.2.26)$$

⁸Ove relacije važe na stanjima čestice standardnog impulsa.

za proizvoljno θ . Stanja $|\theta; a_1, a_2\rangle$ su dobijena rotacijom oko z -ose iz stanja $|a_1, a_2\rangle$. Dakle operatori $E_1^2 + E_2^2$ i J_3 klasifikuju vektore. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} E_1|\theta; a_1, a_2\rangle &= (a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta)|\theta; a_1, a_2\rangle \\ E_2|\theta; a_1, a_2\rangle &= (a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta)|\theta; a_1, a_2\rangle. \end{aligned}$$

Ako uvedemo oznake $a_1^\theta = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta$ i $a_2^\theta = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta$, onda su svojstvena stanja

$$|\theta; a_1, a_2\rangle = e^{-i\lambda\theta}|a_1^\theta, a_2^\theta\rangle. \quad (1.2.27)$$

λ je svojstvena vrednost operatora rotacije oko z -ose. Vektore indeksiramo sa brojevima λ i $a_1^2 + a_2^2$. Ireducibilne reprezentacije euklidske grupe su beskonačno dimenzione. Kako za bezmasene čestice niko nije opservirao kontinualni stepen slobode θ , mora biti $a_1 = a_2 = 0$. Stanja su onda klasifikovana samo svojstvenom vrednošću generatora rotacije oko z ose, J_3

$$J_3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle.$$

Ove reprezentacije su jednodimenzione

$$e^{-i\theta J_3}|\lambda\rangle = e^{-i\lambda\theta}|\lambda\rangle. \quad (1.2.28)$$

Ovde je θ ugao rotacije oko z ose. Jasno je da je λ helicitet čestice jer se ona kreće duž z -ose. Helicitet λ mora biti ceo ili poluceo broj da bi rotacija za 2π bila jednaka ± 1 . Apsolutna vrednost heliciteta je spin čestice.

Do istog zaključka možemo doći analizirajući komponente vektora Pauli-Lubanskog imajući na umu vezu komponenti W_1 i W_2 sa generatorima E_1, E_2 . Iz⁹

$$W_\mu P^\mu|\tilde{p}, \lambda\rangle = 0 \quad (1.2.29)$$

sledi

$$(W^0 - W^3)k|\tilde{p}, \lambda\rangle = 0,$$

tj. vrednosti komponenti W^0 i W^3 su jednake na stanjima. Dakle $w^0 = w^3$. Postoje dve mogućnosti za vrednosti vektora Pauli Lubanskog na stanjima $w^\mu = (w^0, w^1 \neq 0, w^2 \neq 0, w^0)$ ili $w^\mu = (w^0, 0, 0, w^0)$. U prvom slučaju $w^2 = -(w^1)^2 - (w^2)^2 < 0$, pa su vektori u reprezentaciji su neprekidni¹⁰. To bi značilo da postoji kontinum bezmasenih stanja. Ovu mogućnost odbacujemo kao nefizičku. Dakle, mora biti $w^\mu = (w^0, 0, 0, w^0)$. Helicitet je određen sa

$$-\frac{w_0}{p_0} = \lambda.$$

Malu grupu E_2 smo redukovali na rotacije oko z -ose to jest na $SO(2) \sim U(1)$. Njene ireducibilne reprezentacije su jednodimenzione $e^{-i\lambda\theta}$, $\lambda = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \dots$

Iz svega do sada rečenog, možemo zaključiti da su reprezentacije grupe male grupe E_2 :

⁹Podrazumeva se da operatori deluju na stanja.

¹⁰Setimo se da je $(W^1)^2 + (W^2)^2$ Kazimirov operator u $E(2)$ algebri.

- a) beskonačno dimenzione ako je $w_1, w_2 \neq 0$. Ovu mogućnost odbacujemo kao nefizičku.
b) konačno dimenzione u slučaju $w^2 = 0$. One su unitarne i jednodimenzionalne. Dakle, za bezmasene čestice je

$$\begin{aligned} W_0|\tilde{p}, \lambda\rangle &= -\lambda k|\tilde{p}, \lambda\rangle \\ W_1|\tilde{p}, \lambda\rangle &= W_2|\tilde{p}, \lambda\rangle = 0 \\ W^3|\tilde{p}, \lambda\rangle &= -\lambda k|\tilde{p}, \lambda\rangle \end{aligned}$$

Konačno, Lorencova transformacija Λ deluje na stanje $|p, \lambda\rangle$ iz fiksirane ireducibilne reprezentacije prema

$$U(\Lambda, 0)|p, \lambda\rangle = e^{i\theta(p, \Lambda)\lambda}|\Lambda p, \lambda\rangle. \quad (1.2.30)$$

Vidimo da Lorencova transformacija ne menja helicitet čestice.

U slučaju masene čestica datog impulsa i spina s imamo $2s+1$ stanje odredjeno kvantnim brojem s_3 . Za masene čestice može da se koristi i helicitetni bazis. Helicitet takodje uzima vrednosti $-s_3, -s_3 + 1, \dots, s_3$. Kod bezmasenih čestica situacija je drugačija. Bezmasena čestica može biti samo u jednom helicitetnom stanju λ . Apsolutna vrednost heliciteta se naziva spinom čestice $s = |\lambda|$. Parnost operatora impulsa prebacuje u $-\mathbf{P}$, tj. menja mu znak, a operator spina se ne menja. Ovo znači da parnost menja helicitet čestice $\lambda \rightarrow -\lambda$. Iz ovog razloga, ukoliko je teorija invarijantna na parnost, za četicu spina s imamo dva helicitetna stanja $|\mathbf{p}, \lambda = \pm s\rangle$. Primer takve teorije je kvantna elektrodinamika. Stanja fotona su $|p, \pm 1\rangle$.

1.3 Diskretne simetrije

U prethodnim poglavljima uglavnom smo analizirali prave ortohrone Lorencove, odnosno Poenkareove transformacije. One, kao što smo rekli, predstavljaju relativističku simetriju kvantne teorije polja. Prostorna i vremenska simetrija su Lorencove transformacije koje nisu povezane sa jedinicom. Spadaju u grupu diskretnih transformacija. Ove dve simetrije ćemo u ovom poglavlju posebno razmatrati.

1.3.1 Prostorna inverzija

Već smo videli da je prostorna inverzija reprezentovana sa matricom

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Generalno, prostorna inverzija je na prostoru stanja (a i polja) reprezentovana operatorom $\mathcal{P} = U(I_p, 0)$, koji je na osnovu Vignerove teoreme unitaran ili antiunitaran. Na osnovu

zakona množenja u Poenkareovoj grupi

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, \alpha_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + \alpha_2) \quad (1.3.2)$$

sledi

$$\mathcal{P}^{-1}U(\Lambda, a)\mathcal{P} = U(I_p^{-1}\Lambda I_p, I_p a) . \quad (1.3.3)$$

Specijalno za translacije imamo

$$\mathcal{P}^{-1}e^{iP^\mu a_\mu}\mathcal{P} = e^{i\bar{a}^\mu P_\mu} , \quad (1.3.4)$$

gde je

$$\bar{a}^\mu = \begin{pmatrix} a^0 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} . \quad (1.3.5)$$

Ako uzmemo da je parametar translacija, a^μ mali dobijamo

$$\mathcal{P}^{-1}iP^\mu\mathcal{P} = i(I_p)_\nu^\mu P^\nu . \quad (1.3.6)$$

Za $\mu = 0$ iz (1.3.6) imamo $\mathcal{P}^{-1}iH\mathcal{P} = iH$. Ako bi prostorna inverzija bila antiunitarni operatator, tada bi $\mathcal{P}^{-1}H\mathcal{P} = -H$. Neka je $|\psi\rangle$ stanje pozitivne energije

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle . \quad (1.3.7)$$

Ovo stanje nakon prostorne inverzije prelazi u stanje $\mathcal{P}|\psi\rangle$ čija je energija $-E$. U ovom slučaju spektar energije nije ograničen sa donje strane, pa ovu mogućnost odbacujemo. Prostorna inverzija je dakle u kvantnoj teoriji reprezentovana unitarnim i linearnim operatorom. Prema tome, iz (1.3.6) sledi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}H\mathcal{P} &= H, \\ \mathcal{P}^{-1}\mathbf{P}\mathcal{P} &= -\mathbf{P} . \end{aligned}$$

Operator prostorne inverzije komutira sa hamiltonijanom, a antikomutira sa troimpulsem. Troimpuls menja znak pri prostornoj inverziji, dok energija ne menja.

Odredimo sada kako se generatori Lorencovih transformacija menjaju pri inverziji prostora. Prvo pokažimo da je

$$(I_p^{-1})_\nu^\mu (\delta_\rho^\nu + \omega_\rho^\nu)(I_p)_\sigma^\rho = \delta_\sigma^\mu + (I_p)_\nu^\mu (I_p)_\sigma^\rho \omega_\rho^\nu . \quad (1.3.8)$$

Za Lorencove transformacije iz (1.3.3) imamao

$$\mathcal{P}^{-1}e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\mathcal{P} = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}(I_p)_\mu^\rho(I_p)_\nu^\sigma M_{\rho\sigma}} , \quad (1.3.9)$$

odakle nakon linearizacije dobijamo

$$\mathcal{P}^{-1}M_{\mu\nu}\mathcal{P} = (I_p)_\mu^\rho(I_p)_\nu^\sigma M_{\rho\sigma} . \quad (1.3.10)$$

Na osnovu ove relacije je jasno da generatori bustova menjaju znak pri prostornoj inverziji, dok generatori rotacija ne menjaju

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{-1}\mathbf{K}\mathcal{P} &= -\mathbf{K}, \\ \mathcal{P}^{-1}\mathbf{J}\mathcal{P} &= \mathbf{J}.\end{aligned}\quad (1.3.11)$$

Angularni moment je tzv. pseudovektorski operator, jer se njegov znak ne menja pri prostornoj inverziji. Sa druge strane, troimpuls je pravi vektor, jer se njegov znak menja pri prostornoj inverziji. Slično se definišu i pseudotenzori.

Odredimo sada kako operator parnosti deluje na jednočestična stanja. Posmatrajmo prvo masene čestice. U sistemu mirovannja stanje ove čestice je $|\tilde{p}, s_3, a\rangle$, gde je \tilde{p} impuls u sistemu mirovanja čestice, s_3 projekcija spina na z -osu, a sa a smo obeležili sve druge kvantne brojeve čestice. Operator parnosti primenjen na ovo stanje ne menja znak projekcije spina na z -osu, što se vidi iz druge relacije u (1.3.11). Dakle

$$\mathcal{P}|\tilde{p}, s_3, a\rangle = \eta|\tilde{p}, s_3, a\rangle, \quad (1.3.12)$$

gde je η fazni faktor. Može se pokazati da on zavisi od vrste čestice, a ne od s_3 . Bustom iz stanja standardnog impulsa dobijamo stanje impulsa \mathbf{p} , prema

$$|p, s_3, a\rangle = L_{p\tilde{p}}|\tilde{p}, s_3, a\rangle. \quad (1.3.13)$$

Kada operator parnosti deluje na ovo stanje dobija se

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|p, s_3, a\rangle &= \mathcal{P}U(L_{p\tilde{p}})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}|\tilde{p}, s_3, a\rangle \\ &= \eta U(L_{\bar{p}, p})|\tilde{p}, s_3, a\rangle,\end{aligned}\quad (1.3.14)$$

jer je

$$I_p^{-1}L_{p\tilde{p}}I_p = L_{p\bar{p}} \quad (1.3.15)$$

i

$$\bar{p}^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Prema tome, konačno dobijamo

$$\mathcal{P}|\mathbf{p}, s_3, a\rangle = \eta|-\mathbf{p}, s_3, a\rangle. \quad (1.3.16)$$

Parnost menja znak impulsa čestice, a ne menja znak projekcije spina na z -osu. Fazni faktor η se naziva unutrašnja parnost čestice.

Kada dva puta primenimo operator parnosti vraćamo se na početnu konfiguraciju. Prema tome $\mathcal{P}^2 = e^{i2\pi M_{12}}$. Moguć je izbor $\mathcal{P}^2 = \pm 1$. Mi ćemo u daljem izlaganju izabrati da je $\mathcal{P}^2 = 1$. To znači da je operator parnosti unitaran, ali i hermitski operator. Prema tome faza η može biti ± 1 . Uzećemo da je unutrašnja parnost elektrona i protona 1. Antičestice imaju suprotnu parnost u odnosu na čestice, pa je parnost pozitrona -1 .

Parnost stanja dve čestice A i B je proizvod unutrašnje parnosti obe čestice i faktora $(-1)^l$ gde je l relativni orbitalni angularni moment, tj. jednak je $(-1)^l \eta_A \eta_B$.

Do sada smo razmatrali delovanje operatora parnosti na spinorska stanja. Sada ćemo odrediti kako operator parnosti deluje na bezmasene čestice. Uobičajeno je da se umesto opeatora parnosti koristi operator $Y = U(R_2(\pi))\mathcal{P}$, gde je $R_2(\pi)$ rotacija oko y -ose za ugao π . Lako se vidi da je

$$Y \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ -k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3.17)$$

tj. ovaj operator je refleksija u odnosu na xz -ravan. Već smo ranije rekli da je standardni impuls za bezmasene čestice $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. Operator parnosti menja treću komponentu ovog četvorovektora. Takođe, pri prostornoj inverziji operator spina se ne menja, pa prema tome helicitet čestice menja znak. Odredimo sada kako operator Y deluje na stanje bezmasene čestice koja se kreće duž z -ose i čiji je helicitet λ . Lako se vidi da je

$$U(R_2(\pi))\mathcal{P}|k, \lambda\rangle = \eta|k, \lambda\rangle. \quad (1.3.18)$$

Stanje čestice impulsa \mathbf{p} dobijamo tako što prvo primenimo bust duž z -ose, $B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{|k|}\right)$, a zatim rotaciju koja z -osu transformiše u smeru

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.3.19)$$

tj.

$$|p, \lambda\rangle = U(R(\hat{\mathbf{p}}))B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{|k|}\right)|k, \lambda\rangle. \quad (1.3.20)$$

Odredimo sada kako operator parnosti deluje na ovo stanje, tj. $\mathcal{P}|p, \lambda\rangle$. Operator parnosti komutira sa rotacijom $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$, pa je

$$\mathcal{P}|p, \lambda\rangle = U(R(\hat{\mathbf{p}}))U(R_2^{-1}(\pi))U(R_2(\pi))\mathcal{P}B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{|k|}\right)|k, \lambda\rangle. \quad (1.3.21)$$

Ako dalje iskoristimo da $U(R_2(\pi))\mathcal{P}$ komutira sa bustom duž z -ose i (1.3.18), dobijamo

$$\mathcal{P}|p, \lambda\rangle = \eta U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2^{-1}(\pi))B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{|k|}\right)|k, \lambda\rangle. \quad (1.3.22)$$

Kako je

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = e^{-i\varphi J_3}e^{-i\theta J_2},$$

to je matrica rotacije koja ort \mathbf{e}_z prevodi u $-\hat{\mathbf{p}}$ data sa

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = e^{-i(\varphi \pm \pi)J_3}e^{-i(\pi - \theta)J_2}. \quad (1.3.23)$$

Znak \pm odgovara znaku druge komponente troimpulsa. Ako je $p^2 > 0$ tada je taj znak pozitivan, a ako je $p^2 < 0$ on je negativan. Ovo je neophodno jer ugao φ pripada intervalu $(0, 2\pi)$. Lako se vidi da je

$$U(R(\hat{\mathbf{p}}R_2^{-1}(\pi))) = U(R(-\hat{\mathbf{p}}))e^{\pm i\pi J_2}. \quad (1.3.24)$$

Takodje, operator $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/k)$ standardni impuls transformiše u \bar{p} . Dakle,

$$\mathcal{P}|\mathbf{p}, \lambda\rangle = \eta e^{\mp i\pi\lambda} |-\mathbf{p}, -\lambda\rangle . \quad (1.3.25)$$

Troimpuls i helicitet bezmasene čestice menjaju znak pri prostornoj inverziji.

Parnost je očuvana u elektromagnetnim i jakim procesima, dok je narušena u slabim. O tome će biti više reči kasnije.

1.3.2 Vremenska inverzija

Vremenska inverzija na koordinate prostra Minkovskog deluje matricom

$$I_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.3.26)$$

Operator vremenske inverzije je $\mathcal{T} = U(I_t, 0)$. Na osnovu zakona množenja u Poenkareovoj grupi sledi da je

$$\mathcal{T}^{-1}U(\Lambda, a)\mathcal{T} = U(I_t^{-1}\Lambda I_t, I_t a) . \quad (1.3.27)$$

Lako se vidi da je

$$(I_t)^\mu_\nu a^\nu = \begin{pmatrix} -a^0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = -\bar{a}^\mu . \quad (1.3.28)$$

Specijalno za translacije iz (1.3.27) imamo

$$\mathcal{T}^{-1}e^{iP^\mu a_\mu}\mathcal{T} = e^{-i\bar{a}^\mu T_\mu} . \quad (1.3.29)$$

Ako uzmemo da je parametar translacija, a^μ mali dobijamo

$$\mathcal{T}^{-1}ia_\mu P^\mu\mathcal{T} = -iP^\mu\bar{a}_\mu . \quad (1.3.30)$$

Za $\mu = 0$ iz (1.3.30) imamo $\mathcal{T}^{-1}iH\mathcal{T} = -iH$. Na osnovu Vignerove teoreme znamo da su operatori simetrije ili unitarni ili antiunitarni. Ako bi vremenska inverzija bila unitarni i linearan operator, tada bi $\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T} = -H$. Fizička stanja $|\psi\rangle$ imaju pozitivnu energiju

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle . \quad (1.3.31)$$

Ova stanja, nakon vremenske inverzije, prelaze u stanja $\mathcal{T}|\psi\rangle$ čija je energija $-E$. Spektar energije ne bi bio ograničen sa donje strane, te ovu mogućnost odbacijemo. Vremenska inverzija je dakle u kvantnoj teoriji reprezentovana antiunitarnim i antilinearim operatorom. Prema tome, iz (1.3.30), sledi

$$\mathcal{T}^{-1}iH\mathcal{T} = -iH , \quad (1.3.32)$$

odnosno

$$\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T} = H . \quad (1.3.33)$$

Slično se pokazuje da vremenska inverzija menja znak operatora impulsa

$$\mathcal{T}^{-1}\mathbf{P}\mathcal{T} = -\mathbf{P}, \quad (1.3.34)$$

tj. da antikomutira sa njim.

Odredimo sada kako se generatori Lorencovih transformacija menjaju pri vremenskoj inverziji. Za Lorencove transformacije iz (1.3.27) imamo

$$\mathcal{T}^{-1}e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\mathcal{T} = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}(I_t)_\mu^\rho(I_t)_\nu^\sigma M_{\rho\sigma}}, \quad (1.3.35)$$

odakle nakon linearizacije dobijamo

$$\mathcal{T}^{-1}M_{\mu\nu}\mathcal{T} = -(I_t)_\mu^\rho(I_t)_\nu^\sigma M_{\rho\sigma}. \quad (1.3.36)$$

Izraz (1.3.36) je sličan izrazu (1.3.10). Razlika je u znaku minis koji je prisutan u (1.3.36), a nije u (1.3.10). On je posledica antilinarnosti vremenske inverzije. Na osnovu relacije (1.3.36) je jasno da generatori bustova ne menjaju znak pri vremenskoj inverziji, dok generatori rotacija menjaju

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}\mathbf{K}\mathcal{T} &= \mathbf{K} \\ \mathcal{T}^{-1}\mathbf{J}\mathcal{T} &= -\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Razmatrajmo sada masenu česticu spina s u sistemu mirovanja, $|\tilde{p}, s_3\rangle$. Ova stanja formiraju bazis $(2s+1)$ -dimenzione reprezentacije rotacione grupe. Operator vremenske inverzije pri delovanju na ova stanja daje linearnu kombinaciju stanja iz istog podprostora

$$\mathcal{T}|\tilde{p}, s_3\rangle = \sum_{s'_3} C_{s'_3 s_3} |\tilde{p}, s'_3\rangle. \quad (1.3.38)$$

Pri pisanju ovog zakona transformacije nismo pisali fazni faktor sa desne starne jednačine, jer on nema nekog posebnog fizičkog smisla. Primenom rotacije na ovo stanje dobijamo

$$U(R)|\tilde{p}, s_3\rangle = \sum_{s'_3} D_{s'_3 s_3}^{(s)}(R) |\tilde{p}, s'_3\rangle, \quad (1.3.39)$$

gde $D^{(s)}(R)$ predstavlja matricu rotacije u $(2s+1)$ -dimenzionoj ireducibilnoj reprezentaciji rotacione grupe. Uzastopnom primenom rotacije i vremenske inverzije na ova stanja dobijamo

$$\mathcal{T}U(R)|\tilde{p}, s_3\rangle = \sum_{s'_3, s''_3} D_{s'_3 s_3}^{(s)*}(R) C_{s''_3 s'_3} |\tilde{p}, s''_3\rangle. \quad (1.3.40)$$

Primena ove dve transformacije u obrnutom redosledu daje

$$U(R)\mathcal{T}|\tilde{p}, s_3\rangle = \sum_{s'_3, s''_3} C_{s'_3 s_3} D_{s''_3 s'_3}^{(s)}(R) |\tilde{p}, s''_3\rangle. \quad (1.3.41)$$

Zbog antilinearnosti i antiunitarnosti vremenske inverzije i druge relacije u (1.3.37) sledi da rotacije komutiraju sa vremenskom inverzijom

$$\mathcal{T}U(R) = U(R)\mathcal{T} . \quad (1.3.42)$$

Odavde je

$$D^{(s)*} = C^{-1}D^{(s)}C ,$$

gde je C matrica koeficijenata rotacije. Ovaj izraz pokazuje da su ireducibilne reprezentacije rotacione grupe $D^{(s)*}$ i $D^{(s)}$ unitarno ekvivalentne. Rešenje ovog uslova je

$$C = e^{-i\pi J_2} . \quad (1.3.43)$$

Matrični elementi operatora rotacije oko y -ose za ugao φ su

$$d_{s'_3 s_3}^{(s)}(\varphi) = \langle s, s'_3 | e^{-i\varphi J_2} | s, s_3 \rangle . \quad (1.3.44)$$

Oni se nazivaju Vignerovim d koeficijentima. Lako se vidi da je

$$d_{s'_3 s_3}^{(s)}(\pi) = (-1)^{s-s_3} \delta_{s'_3, -s_3} . \quad (1.3.45)$$

Prema tome, dobijamo da je

$$\mathcal{T}|\tilde{p}, s_3\rangle = (-1)^{s-s_3} |\tilde{p}, -s_3\rangle . \quad (1.3.46)$$

Primenom proizvoljnog busta dolazimo do

$$\mathcal{T}|p, s_3\rangle = \mathcal{T}U(L_{p\tilde{p}})|\tilde{p}, s_3\rangle = (-1)^{s-s_3} |\bar{p}, -s_3\rangle . \quad (1.3.47)$$

Ova relacija pokazuje da operator vremenske inverzije menja znak treće komponente spina i znak impulsa čestice. $SU(2)$

Delovanje vremenske inverzije na stanja bezmasenih čestica je analogno delovanju prostorne inverzije. Jednostavno se proverava da, za stanje bezmasenih čestica sa standarnim impulsom, važi

$$U(R_2^{-1}(\pi))\mathcal{T}|k, \lambda\rangle = |k, \lambda\rangle . \quad (1.3.48)$$

Koristeći ovaj rezultat, dobija se da vremenska inverzija na stanje bezmasene čestice impulsa \mathbf{p} deluje prema

$$\mathcal{T}|p, \lambda\rangle = e^{\pm i\pi\lambda} |\bar{p}, \lambda\rangle . \quad (1.3.49)$$

Helicitet bezmasene čestice ne menja znak pri vremenskoj inverziji, dok troimpuls menja.

Ako dva puta primenimo vremensku inverziju imamo

$$\mathcal{T}^2|p, s_3\rangle = \mathcal{T}(-1)^{s-s_3} |\bar{p}, -s_3\rangle = (-1)^{2s} |p, s_3\rangle . \quad (1.3.50)$$

Za bezmasena stanja važi ista formula. Dakle $\mathcal{T}^2 = (-1)^{2s}$. Za bozone je $\mathcal{T}^2 = 1$, dok je za fermione $\mathcal{T}^2 = -1$.

Zadaci

- 1.1.** a) Dokazati da je $O(3)$ nepovezana grupa.
 b) Pokazati da je $SO(3)$ invarijantna pogrupa grupe $O(3)$.
- 1.2.** Neka je $X = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, gde je $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Pokazati homomorfizam izmedju $SO(3)$ i $SU(2)$ grupa. $SU(2)$ transformacije deluju na matricu X prema $X' = MXM^\dagger$, gde $M \in SU(2)$.
- 1.3.** a) Neka su A i B 2×2 matrice. Pokazati da je $\text{Tr}(A\sigma_\nu)\text{Tr}(\bar{\sigma}^\nu B) = 2\text{Tr}(AB)$.
 b) Pokazati da je L_+^\uparrow invarijantna podgrupa Lorencove grupe. Takodje pokazati da je $\mathcal{I} = \{I, I_p, I_t, I_{pt}\}$ Abelova podgrupa Lorencove grupe i da je
- $$L = L_+^\uparrow \ltimes \mathcal{I}. \quad (1.3.51)$$
- 1.4.** Proizvoljnu matricu $S \in SL(2, C)$ možemo napisana kao proizvod jedne unitarne i jedne hermitske matrice, $S = UH$. Neka je
- $$S = e^{i\theta\sigma^3/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$
- Ova matrica je unitarna. Pokazati da je odgovarajuća matrica Lorencove transformacije rotacija oko z -ose. Slično, ako je S čisto hermitska matrica $S = e^{-\varphi\sigma^3/2}$ naći odgovarajuću matricu Λ . Generalno, unitarna matrica je
- $$U = e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}/2}, \quad (1.3.52)$$
- a hermitska
- $$H = e^{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathbf{n}/2}, \quad (1.3.53)$$
- pa je proizvoljna matrica iz $Sl(2, C)$
- $$S = e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}/2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi} \mathbf{n}/2}. \quad (1.3.54)$$
- 1.5.** Odrediti matrične elemente generatora Lorencove grupe u definicionoj reprezentaciji.
- 1.6.** Pokazati da je
- $$\Lambda(S_1)\Lambda(S_2) = \Lambda(S_1S_2),$$
- kao i da je $\det \Lambda(S) = 1$ i $\Lambda^0_0 \geq 1$.
- 1.7.** Pokazati da je definiciona reprezentacija Lorencove grupe $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ reprezentacija.
- 1.8.** Pokazati da su $\frac{1}{4}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ i $\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}$ Kazimirovi operatori Lorencove grupe. Naći vezu ovih operatora sa \mathbf{M}^2 i \mathbf{N}^2 .
- 1.9.** Dejstvo Poenkareove grupe na koordinate može se zadati sa $(\Lambda, a)x = \Lambda x + a$. Odrediti zakon množenja u grupi, jedinični i inverzni element.

1.10. a) Proveriti zakon množenja u Poenkareovoj grupi

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(1, \epsilon)U(\Lambda, 0) = U(1, \Lambda^{-1}\epsilon) .$$

Zatim pokazati da iz ove relacije sledi:

$$U^{-1}(\Lambda, 0)P_\mu U(\Lambda, 0) = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu P_\nu .$$

Izračunati komutator $[M_{\mu\nu}, P_\rho]$.

b) Pokazati da važi:

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(\Lambda', 0)U(\Lambda, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, 0) ,$$

pa izračunati komutator $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$.

c) Pokazati da važi $[P_\mu, P_\nu] = 0$.

1.11. Odrediti generatore Poenkareove grupe u reprezentaciji Dirakovog polja. Dirakovo polje se transformiše kao $\psi'(\Lambda x + a) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\psi(x)$. Dokazati da dobijeni generatori zadovoljavaju komutacione relacije Poenkareove algebre.

1.12. Prepisati Poenkareovu algebru koristeći spin J_i , impuls P_i , hamiltonijan H , generatore bustova K_i . Primetite da sa hamiltonijanom komutiraju komponente spina i impulsa. Ovi operatori su konstante kretanja.

1.13. Vektor Pauli-Lubanskog definisan je kao $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\nu\lambda}P^\sigma$.

a) Pokazati da važi: $W_\mu P^\mu = 0$ i $[W_\mu, P_\nu] = 0$.

b) Pokazati da je: $W^2 = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}P^2 + M_{\mu\sigma}M^{\nu\sigma}P^\mu P_\nu$.

c) Koristeći se prethodnim rezultatom, pokazati da W^2 i P^2 komutiraju sa generatorima Poenkareove grupe.

1.14. Pokazati da važi:

a) $[M_{\mu\nu}, W_\sigma] = i(\eta_{\nu\sigma}W_\mu - \eta_{\mu\sigma}W_\nu) ,$

b) $[W_\mu, W_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}W^\sigma P^\rho ,$

c) $[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}, M_{\alpha\beta}] = 0 .$

1.15. Pokazati da Vignerove rotacije čine grupu.

1.16. Pokazati da su

$$P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad P_2 = -i\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_z = i\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

generatori $E(2)$ grupe. Pokazati takodje da je $P_1^2 + P_2^2$ Kazimirov operator.

1.17. U zadatku 1.11 je pokazano da su generatori Lorencove grupe u spinorskoj reprezentaciji sigma-matrice

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (1.3.55)$$

gde su γ_μ Dirakove gama matrice u $4D$. Takodje je pokazano da sigma-matrice zadovoljavaju Lorencovu algebru:

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta}\sigma_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}\sigma_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}\sigma_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}\sigma_{\mu\alpha}).$$

- a) Izračunati komutator $[\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\mu\nu}]$. Šta očekujete da dobijete kao rezultat i zbog čega?
- b) Dokazati mešoviti Jakobijev identitet:

$$[A, \{B, C\}] + \{B, [C, A]\} - \{C, [A, B]\} = 0.$$

- c) Uzimajući da je $A = \gamma_\rho$, $B = \sigma_{\mu\nu}$ i $C = \sigma_{\alpha\beta}$, dokazati Schouten-ov identitet:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}g_{\rho\lambda} - \epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}g_{\rho\beta} - \epsilon_{\mu\nu\lambda\beta}g_{\rho\alpha} - \epsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}g_{\rho\nu} - \epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta}g_{\rho\mu} = 0.$$

Glava 2

Unutrašnje simetrije i kvark model

U prethodnoj glavi pokazali smo da su masa i spin kvantni brojevi koji karakterišu čestice, a koji su posledica Poenkareove simetrije. Pored mase i spina, postoje i drugi kvantni brojevi koji karakterišu (elementarne) čestice, kao što su stranost, izospin, barionski broj i mnogi drugi. Ovi kvantni brojevi potiču od unutrašnjih simetrija. U ovoj glavi ćemo analizirati unutrašnje simetrije sa kinematičkog aspekta, dok će dinamički aspekti biti razmotreni u glavi 4. Kao najznačajnija grupa unutrašnjih simetrija, $SU(n)$ grupa će biti analizirana detaljno. Koristeći uvedeni foramlizam, konstruisaćemo kvark model hadrona.

Reference koje prate ovu glavu su [2, 3, 6].

2.1 Klasifikacija interakcija i čestica

U prirodi postoji nekoliko stotina čestica. One se medjusobno razlikuju po masi, spinu, naelektrisanju i drugim kvantnim brojevima. Osobine čestica se saznaju na osnovu njihovih raspada i rasejanja u kojima učestvuju. Kako su se energije koje su fizičari mogli da ostvare u akceleratorima povećavale, to se otkriva sve veći broj čestica. Očigledno je da sve one ne mogu biti elementarne čestice, tj. čestice koje nemaju unutrašnju strukturu. Videćemo da su, zapravo, elementarne čestice samo leptoni, kvarkovi, gradijentni bozoni i Higsov bozon. Takođe, naša saznanja ukazuju na to da elementarne čestice interaguju putem četiri fundamentale interakcije. Te interakcije su: gravitaciona, elektromagnetna, slaba i jaka.

Čestice možemo podeliti na čestice materije i čestice koje prenose interakcije, gradijentne (gauge) bozone. Čestice materije se dele na leptone i hadrone. Ova podela je definisana sredinom prošlog veka i zapravo predstavlja podelu čestica po masi: leptoni su luke čestice, dok su hadroni čestice sa većom masom. Danas znamo da postoje leptoni koji imaju masu sličnu ili veću od pojedinih hadrona.

Leptoni

Leptoni su čestice bez strukture koje učestvuju u slabim, a ne učestvuju u jakim interakcijama. Njihov spin je $1/2$. Postoji šest leptona: elektron (e^-), elektronski neutrino

(ν_e), mion (μ^-), mionski neutrino (ν_μ), taon (τ^-) i taonski neutrino (ν_τ). Njihove osnovne karakteristike su date u tabeli 2.1.

Čestica	m [MeV]	spin	Q	sr.život τ [s]	raspadi, BR
e^-	0.511	1/2	-1	$> 1.5 \times 10^{34}$	—
ν_e	< 5eV	1/2	0	stabilan	—
μ^-	105.7	1/2	-1	2.2×10^{-6}	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu, 100\%$
ν_μ	< 0.19	1/2	0	stabilan	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau, 17\%$
τ^-	1777	1/2	-1	2.91×10^{-13}	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau, 18\%$
ν_τ	< 18.2	1/2	0	stabilan	hadroni + ν_τ , 65%

Tabela 2.1: Kvantni brojevi leptona.

Masa elektrona je 0,51MeV, dok mion ima masu koja je približno 200 puta veća od mase elektrona. Masa taona je znatno veća od mase elektrona i miona i iznosi 1777MeV. Dugo se verovalo da su neutrini bezmasene čestice. Po novijim rezultatima oni ipak imaju malu masu. Masa elektronskog neutrina je manja od 5eV, dok su granice na mase mionskog i taonskog neutrina date sa: $m_{\nu_\mu} < 0,16$ MeV, $m_{\nu_\tau} < 18$ MeV. Elektron je stabilna čestica, dok su mion i taon nestabilni. Kanali raspada i relacije grananja su dati u tabeli 2.1. Mion se raspada do elektrona, prema

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Leptoni se grupišu u tri familije: elektron i njegov neutrino su prva familija, mion i mionski neutrino čine drugu familiju, a taon i taonski neutrino su treća familija leptona.

Svaki lepton ima i svoju antičesticu. Antičestica elektronu je pozitron, e^+ . Takodje μ^+ je antičestica od μ^- , a τ^+ od τ^- . Ove antičestice imaju masu i spin iste kao i čestice, dok su im ostali kvantni brojevi suprotni.

Leptonski broj je kvantni broj koji je karakterističan samo za leptone (sve druge čestice imaju leptonski broj nula) i očuvan je u svim interakcijama. Pojam leptonskog broja je uveden 1953. godine, da bi se objasnilo zašto se reakcija $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ dešava (Kovan-Rajns eksperiment¹), dok se reakcija $\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^-$ ne dešava. Svaka familija leptona ima svoj leptonski broj, pa tako postoji elektronski leptonski broj, mionski leptonski broj i taonski leptonski broj. Na postojanje tri različita leptonska broja ukazuje činjenica da se raspada $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ ne dešava u prirodi.

¹Kovan i Rajns (C. L. Cowan, F. Reines) su pedesetih godina prošlog veka eksperimentalno potvrdili postojanje neutrina. Eksperiment je koristio antineutrino iz fisionog reaktora i detektovao reakciju $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. Detektor se sastojao od dva rezervoara vode, oko $200l$ ukupno i $40kg$ rastvorenog kadmijum-hlorida $CdCl_2$. Emitovani pozitron se anihilirao, kreirajući dva fotona, dok je emitovani neutron zahvatao kadmijum iz $CdCl_2$. U tom zahvatu se formira metastabilni izotop kadmijuma, koje se onda deekscituje, emitujući foton: $n + {}_{48}^{108}Cd \rightarrow {}_{48}^{109m}Cd \rightarrow {}_{48}^{109}Cd + \gamma$. Foton emitovan iz kadmijuma kasni nekoliko mikrosekundi za fotonima nastalim anihilacijom pozitrona. Dobijeni fotoni su se detektivali scintilacionim detektorom. Signal od tri fotona, od kojih su dva istovremena, a treći kasni, bio je sigurna potvrda postojanja neutrina.

Eksperimentalno je utvrđeno da svi neutrini imaju negativan helicitet², dok svi antineutrini imaju pozitivan helicitet. Setimo se da je kod bezmasenih čestica helicitet dobar kvantni broj. Zbog jako male mase, neutrino se može tretirati kao bezmasena čestica.

Hadroni

Hadroni učestvuju u jakim, slabim i elektromagnetskim³ interakcijama. Hadrona ima puno, oko 200-300, pa ne mogu biti elementarne čestice. Hadroni celobrojnog spina su mezoni, dok su hadroni polucelog spina barioni. Dakle, mezoni su bozoni, a barioni fermioni. Videćemo kasnije da su hadroni vezana stanja kvarkova. Preciznije, mezoni su vezana stanja kvarka i antikvarka, a barioni su vezana stanja tri kvarka. Kasnije ćemo videti da kvarkovi nose kvantni broj boju. U tabeli 2.2 dato je nekoliko hadrona, njihovi kvantni brojevi i načini raspada.

čestica	m [MeV]	spin	sr.život τ [s]	raspadi, BR	I	S
Mezoni						
π^\pm	140	0	2.6×10^{-8}	$\mu^- \bar{\nu}_\mu, \dots$	1	0
π^0	135	0	0.9×10^{-16}	$2\gamma, \dots$	1	0
K^\pm	490	0	1.2×10^{-8}	$\pi^+ \pi^0, 21\%; \mu^+ \nu_\mu, 64\%, \dots$	1/2	± 1
K^0, \bar{K}^0	498	0	$\sim 10^{-10}$	$\pi^+ \pi^-, 68\%; 2\gamma, 32\%, \dots$	1/2	± 1
J/Ψ	3100	0	$\Gamma = 0.087 \text{ MeV}$	hadroni, 88%; $e^- e^+, 6\%$; $\mu^- \mu^+, 6\%$	0	0
Υ	10000	0	$\Gamma = 0.053 \text{ MeV}$	$e^- e^+, \dots$	0	0
Barioni						
p^+	938	1/2	stabilan?	—	1/2	0
n	940	1/2	$\sim 14 \text{ min}$	$p^+ e^- \bar{\nu}_e$	1/2	0
Λ^0	1116	1/2	2.6×10^{-10}	$\pi^- p^+, 65\%; \pi^0 n, 35\%$	0	-1
Σ^\pm, Σ^0	1190	1/2	0.8×10^{-10}	$n \pi^+, 48\%; p^+ \pi^0, 52\%; \dots$	1	-1
Ξ^-, Ξ^0	1315	1/2	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0 \pi^0, 100\%; \dots$	1/2	-2
Ω^-	1672	3/2	0.8×10^{-10}	$\Lambda^0 \kappa^-, 68\%; \Xi^0 \pi^-, 23\%; \Xi^- \pi^0, 9\%, \dots$	0	-3
Δ^{++}	1230	3/2	0.5×10^{-23}	$p^+ \pi^0, \dots$	3/2	0

Tabela 2.2: Hadroni i njihovi kvantni brojevi.

Mezoni π^+ i π^- su jedno drugom antičestice; razlikuju se po znaku nanelektrisanja. Neutralni π^0 mezon je sam sebi antičestica. Antičestica od K^+ mezona je K^- mezon, a od K^0 mezona \bar{K}^0 .

Slično kao i leptonima, barionima se pridružuje barionski broj B . Barionski broj je +1 za sve barione, -1 za sve antibarione i nula za sve ostale čestice. Barionski broj je održan u svim interakcijama. Održanje barionskog broja zabranjuje raspad protona $p \rightarrow e^+ + \gamma$. Antičestica protona je antiproton p^- , koji ima istu masu i spin kao i

²Helicitet neutrina je utvrđen u eksperimentima raspada piona. Pioni su pseudoskalarni mezoni, koji na Zemlju dolaze iz kosmičkog zračenja, ili se kreiraju u eksperimentima. Pozitivno nanelektrisan pion se raspada na antimion i mionski neutrino: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. U referentnom sistemu u kome se π^+ raspada iz mirovanja, μ^+ i ν_μ se razleću na suprotne strane i $\mathbf{p}_\mu = -\mathbf{p}_\nu$. Merenja heliciteta antimiona pokazuju da je helicitet uvek isti i negativan. Kako je π^+ skalar, to je helicitet ν_μ uvek negativan.

³Sve čestice učestvuju i u gravitacionim interakcijama, ali gravitaciona interakcija nije predmet ovog kursa.

proton, a suprotne barionski broj i naelektrisanje. Antineutron je neutralan kao i neutron. Neutron i antineutron se razlikuju po znaku magnetnog dipolnog momenta i barionskog broja. Magnetni dipolni moment neutrona je $\mu = -1,913 \frac{e\hbar}{2m_p c}$, gde je m_p masa protona. To što neutralna čestica ima magnetni moment sugerije da je sastavljena od naelektrisanih čestica. Zanimljivo je da Σ^- nije antičestica od Σ^+ . Ova tvrdnja će biti očigledna na osnovu kvarkovske strukture ova dva bariona.

Prenosioci interakcija i Higsov bozon

Pored leptona i hadrona postoje čestice koje su prenosioci interakcija. Foton je prenosilac elektromagnetne interakcije, W^\pm i Z^0 bozoni prenose slabu interakciju. Jaku interakciju prenose gluoni, dok je prenosilac gravitacione interakcije graviton.

Osobine osnovnih interakcija su sumirane u tabeli 2.3.

Interakcija	domet	intenzitet	dejstvo	prenosnik
gravitacione	∞	$\sim 10^{-39}$	sve čestice	graviton
elektromagnetne	∞	$\frac{1}{137}$	naelektrisane čestice	foton
jake	$\sim 10^{-15}$ m	1	hadroni	gluoni
slabe	$\ll 10^{-15}$ m	10^{-5}	hadroni i leptoni	W^\pm, Z

Tabela 2.3: Osnovne interakcije.

Jaka interakcija drži kvarkove unutar hadrona i dominantna je u sudarima u kojima učestvuju samo hadroni. Rezidualna jaka interakcija izmedju protona i neutrona naziva se nuklearna interakcija i on je odgovorna za vezana stanja nukleona, jezgra. Elektromagnetna interakcija je interakcija izmedju naelektrisanih čestica. Atom je vezano stanje pozitivnog jezgra i negativnog elektronskog omotača i ovo vezano stanje je posledica elektromagnetne interakcije. Molekuli su vezana stanja atoma i posledica su rezidualne elektromagnetne interakcije koju nazivamo Van der Valsova (J. D. van der Waals) interakcija. Slaba interakcija se javlja izmedju kvarkova ali i izmedju leptona. Procesi koji uključuju neutrina su uvek slabi procesi. Nema vezanih stanja koja su posledica slabe interakcije.

Za jake interakcije se može reći da su brze, a slabe spore jer su srednja vremena života čestica koje se raspadaju po jakoj interakciji $\tau \sim 10^{-22} - 10^{-23}$ s, a po slaboj $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-13}$ s.

Gravitaciono interaguju sve čestice koje imaju masu (energiju). Gravitaciona interakcija je, kao i elektromagnetna, dugodometna interakcija. Vezana stanja koja nastaju pod delovanjem gravitacione interakcije su nebeska tela, galaksije, jata galaksija, ... Kako je na malim rastojanjima gravitaciona interakcija mnogo slabija od preostale tri, videti tabelu 2.3, ona se može zanemariti pri razmatranju jake, slabe i elektromagnetne interakcije elementarnih čestica.

Neke osobine prenosioca interakcija su date u tabeli 2.4. Vidimo da svi prenosioci interakcija, osim gravitona, imaju spin (helicitet za bezmasene prenosioce) 1. Graviton ima helicitet 2. Može se pokazati da je domet interakcije obrnuto proporcionalan masi prenosioca interakcije. Tako su elektromagnetna i gravitaciona interakcija dugodometne (foton

i graviton su bezmaseni), dok su slaba i jaka interakcija kratkodometne. Primetimo da je jaka interakcija kratkodometna, iako je masa gluona nula. Ovo je jedna od specifičnosti jake interakcije i više o tome ćemo govoriti u glavi 7.

Interakcija	prenosilac	$m [GeV]$	Q	$\Gamma [GeV]$
jaka	gluoni	0	0	stabilni
elektromagnetna	foton	0	0	stabilan
slaba	W^\pm, Z^0	$\sim 80.4, \sim 91.2$	$\pm 1, 0$	$\sim 2.1, \sim 2.5$
gravitaciona	graviton	0	0	stabilan

Tabela 2.4: Neke osobine prenosioca interakcija.

Higsov bozon je skalarna čestica mase $M_H = 125.18\text{GeV}$ i otkrivena je 2012. godine na LHC eksperimentu u CERN-u. Higsov bozon je neutralna i bezbojna čestica, pa interaguje samo slabom interakcijom. Kroz interakcije sa Higsovim bozonom, sve čestice dobijaju masu. Detaljnije o ovom mehanizmu, govorićemo u glavama 5 i 6.

Elementarne čestice

Pod elementarnim česticama podrazumevamo čestice koje nemaju unutrašnju strukturu. Smatramo da su one tačkaste. Elementarne čestice su: leptoni, kvarkovi, kalibracioni bozoni i Higsov bozon. Već smo rekli da postoji šest leptona. Kvarkova takodje ima šest i to su: u, d, s, c, t , i b . Oznake potiču od engleskih reči up (gornji), down (donji), strange (čudni), charm (šarm), bottom (dno) i top (vrh). Kvarkovi imaju spin $1/2$ i nose kvantni broj boja. Kalibracionih bozona ima ukupno 13. Dakle, ukupni broj elementarnih čestica je 26. Vezana stanja kvarkova su, kao što smo već rekli, hadroni.

2.2 Simetrija

Grupa simetrije u relativističkoj kvantnoj fizici je direktni proizvod Poenkareove i neke unutrašnje simetrije, $P \otimes G$. Unutrašnja grupa simetrije G je kompaktna Lijeva grupa. Proizvoljan element iz G je

$$U = e^{iT^a \theta^a}$$

gde su T^a generatori u odgovarajućoj reprezentaciji, a θ^a realni parametri. Komutacione relacije izmedju generatora su

$$[T^a, T^b] = if^{ab}_c T^c ,$$

gde su f^{ab}_c strukturne konstante; one ne zavise od reprezentacije. Pri transformaciji U , stanja fizičkih sistema se transformišu prema

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle \equiv |\psi'\rangle .$$

Da bi se pri transformacijama očuvale verovatnoće prelaza

$$|\langle\psi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\psi|\psi\rangle|^2 ,$$

operatori U su ili unitarni ili antiunitarni⁴. Ovo je Vignerova teorema⁵.

Stanja ψ zadovoljavaju Šredingerovu jednačinu

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi . \quad (2.2.2)$$

Da bi i transformisano stanje zadovoljavalo jednačinu istog oblika

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = H\psi' , \quad (2.2.3)$$

mora važiti

$$H = UHU^{-1} . \quad (2.2.4)$$

Prepostavili smo da je $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Ako hamiltonijan zadovoljava uslov (2.2.4) transformacija U je simetrija sistema. Iz (2.2.4), za infinitezimalne transformacije, sledi

$$(1 - iT^a\theta^a) H (1 + i\theta^aT^a) = H .$$

Odavde je

$$[T^a, H] = 0 , \quad (2.2.5)$$

tj. generatori simetrije komutiraju sa Hamiltonijanom.

Ako je $|n\rangle$ svojstveno stanje Hamiltonijana sa energijom E_n tj.

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle ,$$

onda se može pokazati da je $U|n\rangle$ takodje svojstveno stanje sa istom energijom

$$H(U|n\rangle) = E_n(U|n\rangle) .$$

Zaključujemo da unutrašnja grupa simetrije pravi degeneraciju stanja tj. multiplete. Kako je grupa simetrije $P \otimes G$, to je

$$[T^a, P^\mu] = 0, \quad [T^a, M_{\mu\nu}] = 0 . \quad (2.2.6)$$

Prema tome, čestice u multipletima imaju istu masu i spin.

Simetrija nam daje kvantne brojeve čestica. Generalno, kvantni brojevi mogu biti aditivni i multiplikativni. Aditivni kvantni brojevi potiču od svojstvenih vrednosti hermitskih operatora koji odgovaraju kontinualnoj simetriji. Na primer, translaciona simetrija daje

⁴Ovo znači da su generatori T^a hermitski operatori.

⁵U kvantnoj fizici, stanja su određena do na fazu. To za posledicu ima da je zakon množenja dat sa

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\gamma(g_1, g_2)}U(g_1g_2) , \quad (2.2.1)$$

gde $g_1, g_2 \in G$. Prisustvo faznog faktora u (2.2.1), znači da je reprezentacija grupe G na prostoru stanja projektivna reprezentacija. Više detalja možete naći u [1].

očuvanje impulsa. U procesima rasejanja $a + b \rightarrow c + d$ impuls pre i posle rasejanja je isti, tj.

$$p_a^\mu + p_b^\mu = p_c^\mu + p_d^\mu .$$

U ovom izrazu latimični indeksi a, b, c i d označavaju čestice. Impuls je aditivni kvantni broj. Takvi su i nanelektrisanje, izospin, hipernaboj i mnogi drugi.

Multiplikativni kvantni brojevi su vezani za diskrete simetrije. Primer multiplikativnog kvantnog broja je konjugacija naboja. Konjugacija naboja je transformacija koja čestice prevodi u antičestice i obrnuto. Pri konjugaciji naboja četvoroptencijal menja znak, pa ona na foton deluje kao $C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$. C parnost fotona je -1 . C parnost stanja sastavljenog od n fotona je $(-1)^n$, tj. dobijena je množenjem C parnosti svih fotona.

2.3 $SU(2)$ i izospin

Atomska jezgra su sastavljena od protona i neutrona. Njih na okupu drži nuklearna interakcija. Jaka interakcija, pa time i nuklearna, je nezavisna od nanelektrisanja. Prema tome, nuklearna interakcija ne pravi razliku izmedju protona i neutrona. Ipak, na osnovu merenja znamo da je masa neutrona neznatno veća od mase protona. Ova razlika u masama potiče od elektromagnetne interakcije. Za nuklearnu interakciju, proton i neutron predstavljaju dva stanja jedne čestice, koju nazivamo nukleon N . Sličnost izmedju protona i neutrona je 1932. godine navela Hajzenberga (W. Heisenberg) da uvede koncept izospinske $SU(2)$ simetrije. Ako nukleon ima izospin $I = \frac{1}{2}$, proton i neutron su onda stanja nukleona sa projekcijama izospina $I_3 = +\frac{1}{2}$ i $I_3 = -\frac{1}{2}$ respektivno,

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Matematički preciznije rečeno, hamiltonijan H_s jake/nuklearne interakcije je invarijantan na izospinske odnosno $SU(2)$ transformacije tj.

$$[H_s, I_a] = 0, \quad (2.3.2)$$

gde su I_a generatori $SU(2)$ grupe. Izospinske transformacije transformišu proton u neutron i obrnuto

$$N' = e^{-i\theta^a I^a} N, \quad (2.3.3)$$

gde su θ^a parametri transformacije i $a = 1, 2, 3$.

Izospin i spin su potpuno nezavisne veličine, ali se matematički opisuju na isti način, preko $SU(2)$ grupe. Generatori $SU(2)$ grupe u fundamentalnoj reprezentaciji su $I^a = \sigma^a/2$ gde su σ^a Paulijeve matrice

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Lako se vidi da su strukturne konstante $su(2)$ algebre Levi-Čivita simboli

$$[I^a, I^b] = i\epsilon^{abc} I^c . \quad (2.3.5)$$

Kartanov metrički tenzor za $SU(2)$ grupu je Kronekerova delta, δ^{ab} . Kazimirov operator za $su(2)$ algebru je $\mathbf{I}^2 = \sum_a (I^a)^2$,

$$[\mathbf{I}^2, I^a] = 0. \quad (2.3.6)$$

Svojstvene vrednosti operatora \mathbf{I}^2 klasifikuju ireducibilne reprezentacije grupe $SU(2)$. Rang $su(2)$ algebre je 1, što znači da se skup medjusobno komutirajućih generatora sastoji samo od jednog elementa. Najčešće se uzima da je to generator I_3 . Iz⁶

$$[\mathbf{I}^2, I_3] = 0, \quad (2.3.7)$$

sledi da postoji zajednički svojstveni bazis ova dva operatora. Bazisne vektore ćemo obeležiti svojstvenim vrednostima ova dva operatora $|I, I_3\rangle$. Svojstvene jednačine su

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^2 |I, I_3\rangle &= I(I+1) |I, I_3\rangle, \\ I_3 |I, I_3\rangle &= I_3 |I, I_3\rangle , \end{aligned}$$

gde je $I = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ i $I_3 = -I, -I+1, \dots, I$. Vektori $|I, I_3\rangle$ su ortonormirani bazis prostora reprezentacije Ω_j . Kvantni broj I klasificuje ireducibilne reprezentacije, a I_3 vektore stanja unutar jedne ireducibilne reprezentacije. Dimenzija ireducibilne reprezentacije (I) je

$$\dim(D^{(I)}) = 2I + 1 .$$

U dvodimenzionalnoj reprezentaciji, $I = 1/2$ bazisni vektori su:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

Kao što smo rekli na početku ovog dela, ova dva stanja identifikujemo sa protonom i neutronom.

Proizvoljan vektor u definicionoj (dvodimenzionalnoj) reprezentaciji

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

se pri $SU(2)$ transformacijama transformiše po

$$\xi \rightarrow \xi' = e^{-i\frac{\theta^a \sigma^a}{2}} \xi . \quad (2.3.10)$$

Koncept izospina može biti proširen na druge hadrone. K^+ mezon i K^0 mezon su dublet $SU(2)$ grupe. Projekcija izospina na z -osu K^+ mezona je $I_3 = +1/2$, dok je K^0 mezon stanje sa $I_3 = -1/2$. Isto važi i za dublet K^- i \bar{K}^0 mezona. π mezoni čine triplet

⁶Pošto je Kartanov metrički tenzor za $SU(2)$ grupu Kronekerova delta, to je $I_a = I^a$.

$SU(2)$ grupe, pa im je izospin $I = 1$. U bazisu trodimenzione ireducibilne reprezentacije $SU(2)$ gupe imamo

$$\pi^+ = |1, +1\rangle, \quad \pi^- = |1, -1\rangle, \quad \pi^0 = |1, 0\rangle . \quad (2.3.11)$$

Po trodimenzionoj reprezentaciji se ponašaju i vektorski ρ mezoni (ρ^-, ρ^0, ρ^+), kao i Σ barioni ($\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$). Δ rezonace su kvadruplet $SU(2)$ grupe

$$\Delta^{++} = |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle, \quad \Delta^+ = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad \Delta^0 = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad \Delta^- = |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle . \quad (2.3.12)$$

Čestice η^0, ϕ, Ω i Λ su singleti $SU(2)$ grupe, jer se transformišu po jediničnoj reprezentaciji.

Iz tablica vidimo da mase čestica u $SU(2)$ multipletima nisu iste. Zbog toga je $SU(2)$ simetrija približna simetrija. Mera narušenja ove simetrije se može prikazati kao

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \sim 0,7 \cdot 10^{-3} , \quad (2.3.13)$$

gde su m_p i m_n mase protona, odnosno neutrona.

2.3.1 Slaganje izospina

U ovom paragrafu analiziraćemo slaganje izospina. Dugim rečima, hoćemo da odgovorimo na pitanje koliki je izospin sistema dve čestice čiji su izospinovi I , odnosno I' . Rešavanje ovog problema je analogno slaganju uglavnih momenata koje se izučava u kursu Kvantne mehanike.

Neka su Ω_I i $\Omega_{I'}$ prostori u kojima deluju dve ireducibilne reprezentacije $SU(2)$ grupe. Izospin jedne ireducibilne reprezentacije u direktnom proizvodu je I , a druge I' . Ortonormirani bazisi ova dva prostora su $\{|I, I_3\rangle, I_3 = -I, -I + 1, \dots, I\}$ odnosno $\{|I', I'_3\rangle, I'_3 = -I', -I' + 1, \dots, I'\}$. U ova dva prostora deluju odgovarajuće ireducibilne reprezentacije $SU(2)$ grupe. Bazis tensorskog proizvoda $\Omega_I \otimes \Omega_{I'}$ ova dva prostora je $\{|I, I_3\rangle |I', I'_3\rangle\}$. Izospinski generatori vezani za ova dva prostora su $\mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{1}_2$, odnosno $\mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{I}_2$. Ukupan generator izospina je

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes \mathbf{I}_2 . \quad (2.3.14)$$

U kompozitnom prostoru možemo konstruisati standardni ortonormirani bazis. Kvadrat ukupnog izopina \mathbf{J}^2 i treća komponeta ukupnog izospina J_3 komutiraju i klasificuju stanja standardnog bazisa, $|J, J_3\rangle$. Dakle, stanja $|J, J_3\rangle$ su svojstvena stanja

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |J, J_3\rangle &= J(J+1) |J, J_3\rangle, \\ J_3 |J, J_3\rangle &= J_3 |J, J_3\rangle . \end{aligned}$$

Svojstvena stanja ova dva operatora nisu $|I, I_3\rangle |I', I'_3\rangle$, već

$$|J, J_3\rangle = \sum_{I_3, I'_3} \langle I, I_3, I', I'_3 | J, J_3 \rangle |I, I_3\rangle |I', I'_3\rangle , \quad (2.3.15)$$

gde su $\langle I, I_3, I', I'_3 | J, J_3 \rangle$ Klebš-Gordanovi (A. Clebsch, P. Gordan) koeficijenti. Treća komponenta ukupnog izospina J_3 zadovoljava $J_3 = I_3 + I'_3$.

Proizvod dve ireducibilne reprezentacije, koji deluje u tenzorskom proizvodu $\Omega_I \otimes \Omega_{I'}$ je reducibilna reprezentacija. Ova reprezentacija može biti razložena na ireducibilne komponente, prema

$$D^{(I)} \otimes D^{(I')} = D^{(I+I')} \oplus \dots \oplus D^{(|I-I'|)} . \quad (2.3.16)$$

Dakle, ukupni izospin kompozitnog stanja uzima vrednosti od $|I - I'|$ do $|I + I'|$.

Izospin stanja koje se sastoje od dve čestice izospina $1/2$ je 1 ili 0 . Drugim rečima, proizvod dve dvodimenzionalne ireducibilne reprezentacije je direktni zbir trodimenzione i singletne reprezentacije, tj.

$$\begin{aligned} I & : & \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} &= 1 \oplus 0 \\ \text{dim} & : & 2 \times 2 &= 3 + 1 . \end{aligned}$$

Bazisni vektori trodimenzione reprezentacije su simetrična stanja

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right), \\ |1, -1\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle , \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

dok je jednodimenziona reprezentacija antisimetrična

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) . \quad (2.3.18)$$

Ježgro deuterijuma 2D se sastoje od jednog protona i jednog neutrona. Izospin deuterijuma može onda biti 0 ili 1 . Pokazuje se da je osnovno stanje deuterijuma isospinski singlet, dok je pobudjeno stanje izospinski triplet.

Posmatrajmo proizvod dvodimenzionale i trodimenzionale ireducibilne reprezentacije

$$\begin{aligned} I & : & \frac{1}{2} \otimes 1 &= \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \\ \text{dim} & : & 2 \times 3 &= 4 + 2 . \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Proizvod reprezentacija $D^{(\frac{1}{2})}$ i $D^{(1)}$ se razlaže na zbir reprezentacija $D^{(\frac{3}{2})}$ i $D^{(\frac{1}{2})}$. Vektore (stanja) u dobijenim reprezentacijama možemo odrediti primenom operatora $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ na $|J, J_3\rangle$

$$J_{\pm}|J, J_3\rangle = \sqrt{J(J+1) - J_3(J_3 \pm 1)}|J, J_3 \pm 1\rangle . \quad (2.3.20)$$

Vektor maksimalne težine u reprezentaciji $3/2$ je

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle . \quad (2.3.21)$$

Delovanjem operatorom $J_- = I_- \otimes 1 + 1 \otimes I'_-$ na ovo stanje, dobijamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= (I_- \otimes 1 + 1 \otimes I'_-) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 1 \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 0 \right\rangle . \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Ponavljaajući ovaj postupak dobijamo:

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, -1 \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 0 \right\rangle , \quad (2.3.23)$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, -1 \right\rangle . \quad (2.3.24)$$

Vektor $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ nalazimo iz uslova ortogonalnosti na $\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$. Rezultat je

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 0 \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 1 \right\rangle . \quad (2.3.25)$$

Primenom operatora spuštanja J_- dobijamo

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, -1 \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| 1, 0 \right\rangle . \quad (2.3.26)$$

Na ovaj način smo našli sve vektore iz iz direktnog proizvoda reprezentacija $D^{(\frac{1}{2})}$ i $D^{(1)}$.

2.3.2 Vigner-Ekartova teorema

Sada ćemo se ukratko podsetiti Vigner-Ekartove (E. Wigner, C. Eckart) teoreme. Ireducibilni tenzorski operatori⁷, $T_m^{(j)}$, $m = -j, -j+1, \dots, j$ su definisani zakonom transformacije pri $SU(2)$ transformacijama

$$(T_m^{(j)})' = U(R) T_m^{(j)} U^{-1}(R) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(j)}(R^{-1}) T_{m'}^{(j)} . \quad (2.3.27)$$

Na osnovu gornje definicije može se pokazati da ireducibilni tenzorski operatori zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\begin{aligned} [J_3, T_m^{(j)}] &= m T_m^{(j)} , \\ [J_\pm, T_m^{(j)}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} T_{m \pm 1}^{(j)} . \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Nekada se baš ove relacije uzimaju za definiciju ireducibilnih tenzorskih operatora.

⁷Koristimo oznake: j za ireducibilnu reprezentaciju $SU(2)$, a m za klasifikaciju vektora.

Matrični element ireducibilnog tenzorskog operatora u bazi $|I, I_3\rangle$ je

$$\langle I', I'_3 | T_M^{(J)} | I, I_3 \rangle = \langle II_3; JM | I' I'_3 \rangle \langle I' | T^J | I \rangle . \quad (2.3.29)$$

Vidimo da je on proizvod redukovanih matričnih elemenata $\langle I' | T^J | I \rangle$ i Klebš-Gordanovog (CG) koeficijenta. Ovo je zapravo iskaz Vigner-Ekartove teoreme.

Redukovani matrični elementi ne zavise od I_3, I'_3 i M . Matrični element $\langle I', I'_3 | T_M^{(J)} | I, I_3 \rangle$ je nenulti samo ako je $M + I_3 = I'_3$ i ako I, I' i J zadovoljavaju nejednakost trougla,

$$|I - J| \leq I' \leq I + J .$$

Ovi uslovi su posledica CG koeficijenata.

Vigner-Ekartova teorema se može primeniti na analizu procesa (raspada, rasejanja) koji se dešavaju pod dejstvom jake/nuklearne interakcije. Posmatrajmo na primer, raspad čestice a u dve čestice c i d

$$a \rightarrow c + d . \quad (2.3.30)$$

Matrični element S matrice za ovaj raspad je

$$\begin{aligned} \langle cd | S | a \rangle &= \langle I_c I_d; I_{3c} I_{3d} | S | I_a I_{3a} \rangle \\ &= \sum_{I'} \langle I_c I_d; I_{3c} I_{3d} | I' I'_3 \rangle \langle I' I'_3 | S | I_a I_{3a} \rangle , \end{aligned}$$

gde smo koristili relacije kompletnosti. Iz (2.3.2) vidmo da hamiltonijan jake interakcije komutira sa generatorima izospina, pa su izospin I i njegova treća komponenta I_3 održani u jakim interakcijama. S matrični element je⁸

$$\langle II_3 | S | I' I_{3'} \rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} A(I) . \quad (2.3.31)$$

Dalje je

$$\langle cd | S | a \rangle = \langle I_c I_d; I_{3c} I_{3d} | I_a I_{3a} \rangle A_{I_a} . \quad (2.3.32)$$

Rezultat je izražen preko nezavisnih amplituda $A(I_a)$. Razmatrajmo sada proizvod dvodimenzione i trodimenzione reprezentacije, kao u (2.3.19). Setimo se još da (p, n) čine izospinski dublet, (π^+, π^0, π^-) čine izospinski triplet, a delta rezonance izospinski kvatruplet $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$. Onda, koristeći (2.3.23) i (2.3.32), dobijamo

$$\langle \pi^+ n | S | \Delta^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} A_{3/2} , \quad (2.3.33)$$

$$\langle \pi^0 p | S | \Delta^+ \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} A_{3/2} . \quad (2.3.34)$$

Širina raspada je odredjena sa

$$\Gamma = \int \frac{|S|^2}{T} \prod_f \frac{V d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} . \quad (2.3.35)$$

⁸Ova relacija je specijalni slučaj Vigner-Ekartove teoreme, gde je S skalarni ireducibilni operator.

Ona predstavlja verovatnoću raspada u jedinici vremena pointegraljenu po faznom prostoru finalnih čestica. U gornjem primeru raspada Δ^+ rezonance

$$\Delta^+ \rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{cases} \quad (2.3.36)$$

fazni prostor je isti za oba kanala, pa je odnos širina raspada

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow p, \pi^0)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow n, \pi^+)} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = 2.$$

Ovaj rezultat je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima. Dakle, u eksperimentu se vidi $SU(2)$ simetrija, tj. CG koeficijenti.

Razmatrajmo dalje rasejanje čestica a i b u čestice c i d

$$a + b \rightarrow c + d. \quad (2.3.37)$$

Primenom relacija kompletности imamo

$$\langle cd|S|ab\rangle = \sum_{II'} \langle I_c I_d; I_{3c} I_{3d} | II_3 \rangle \langle II_3 | S | I' I'_3 \rangle \langle I' I'_3 | I_a I_b I_{3a} I_{3b} \rangle.$$

Kako je

$$\langle II_3 | S | I' I'_3 \rangle = A_I \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3}, \quad (2.3.38)$$

to na kraju dobijamo

$$\langle cd|S|ab\rangle = \sum_I \langle I_c I_d; I_{3c} I_{3d} | II_3 \rangle \langle II_3 | I_a I_b I_{3a} I_{3b} \rangle A_I. \quad (2.3.39)$$

Izrazi (2.3.21)-(2.3.26) daju

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= p\pi^+, \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}p\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}n\pi^+, \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}p\pi^- + \sqrt{\frac{2}{3}}n\pi^0, \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= n\pi^-, \\ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}p\pi^0 - \sqrt{\frac{2}{3}}n\pi^+, \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}p\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}n\pi^0. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Primenom (2.3.39) dobijamo

$$\begin{aligned}\langle \pi^+ p | S | \pi^+ p \rangle &= A_{3/2} \\ \langle \pi^- p | S | \pi^- p \rangle &= \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2}, \\ \langle \pi^- p | S | \pi^0 n \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{1/2}.\end{aligned}\quad (2.3.41)$$

Eksperimentalni rezultati pokazuju da je $A_{3/2} \gg A_{1/2}$, pa je

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = 9 : 1 : 2. \quad (2.3.42)$$

Ovaj odnos efikasnih preseka je u skladu sa eksperimentalnim rezultatima, prikazanim na slici 2.1. U praksi se mere totalni efikasni preseci za nukleone, pa su zapravo $\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)$ i $\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)$ prikazani zajedno. To onda daje odnos

$$\frac{\sigma_{tot}(\pi^+ p)}{\sigma_{tot}(\pi^- p)} = 3,$$

a to je upravo i odnos koji se vidi sa grafika na slici 2.1.

2.4 Dodatni kvantni brojevi i zakoni održanja

U prethodnom poglavlju smo uveli pojam izospina. Pored izospina, čestice poseduju i druge kvantne brojeve. U ovom poglavlju uvećemo još nekoliko kvantnih brojeva.

Između 1940. i 1950. godine otkrivene su Λ^0 hiperon⁹ i K mezoni. Ove čestice se proizvode brzo, a raspadaju se sporo. Na primer, Λ^0 i K^0 čestice se stvaraju u procesu

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0, \quad (2.4.1)$$

koji se dešava preko jake interakcije. Srednje vreme života $K_L^{0\,10}$ mezona je $\tau(K_L^0) \approx 10^{-7}s$, što znači da se on raspada po slaboj interakciji

$$K_L^0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\ \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \end{array} \right.. \quad (2.4.2)$$

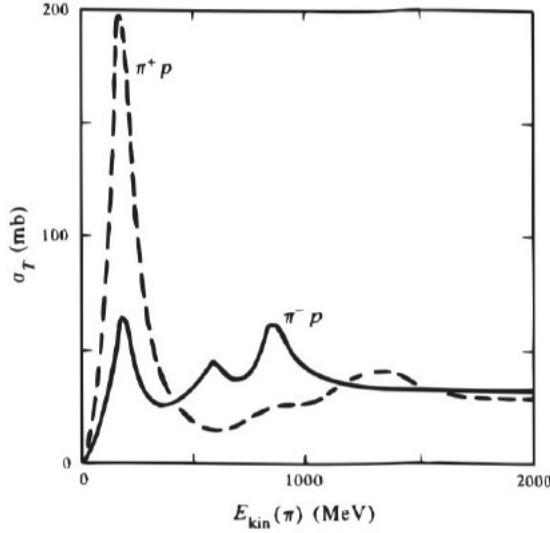
⁹Istorijski, barioni veće mase i nenulte stranosti su nazivani hiperoni.

¹⁰Pokazuje se da se u prirodi, umesto K^0 i njegove antičestice \bar{K}^0 , pojavljuju njihova mešana stanja

$$\begin{aligned}K_L^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0), \\ K_S^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0).\end{aligned}$$

Stanja K_0^S i K_0^L su svojstvena stanja CP operatora, sa svojstvenim vrednostima $+1$ i -1 respektivno. Oznake S i L dolaze od "short" i "long" i odnose se na vremena života ovih čestica. Naime $\tau(K_L^0) \approx 10^{-7}s$, dok je $\tau(K_S^0) \approx 10^{-11}s$. Kanali raspada ovih čestica su

$$\begin{aligned}K_L^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^-; \pi^0 + \pi^0, \\ K_S^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0; \pi^0 + \pi^0 + \pi^0.\end{aligned}$$



Slika 2.1: Rasejanje piona i nukleona.

Slično, Λ^0 čestica ima $\tau(\Lambda^0) \approx 10^{-9}s$ i raspada se na

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p . \quad (2.4.3)$$

Osobina čestica da se stvaraju po jakoj, a raspadaju po slaboj interakciji je bila čudna, pa je zbog toga uveden novi kvantni broj koje se naziva stranost¹¹. Stranost je aditivni kvantni broj, održava se u jakim interakcijama, a ne održava se u slabim interakcijama. Pojedinim hadronima pripisujemo odredjene vrednosti ovog kvantnog broja. Na primer, stranost hadrona iz procesa (2.4.1) je

$$\begin{aligned} S(n) &= S(\pi) = 0 , \\ S(\Lambda^0) &= -1 , \\ S(K^0) &= +1 . \end{aligned}$$

Za proces preko jake interakcije

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \Lambda^0 + K^0 \\ S : 0 + 0 &= -1 + 1 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

vidimo da je stranost očuvana. Za proces preko slabe interakcije

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\rightarrow \pi^- + p - \\ S : -1 &\neq 0 + 0 , \end{aligned}$$

stranost nije očuvana. Videćemo kasnije da je ovaj kvantni broj vezan za s kvark. Hadroni koji sadrže jedan s kvark imaju stranost -1 , a oni koje sadrže jedan antikvark \bar{s} imaju

¹¹”Strange” na engleskom znači ”čudan”.

stranost $+1$. Otkriće stranosti, kao još jednog kvantnog broja koji se održava u jakim interakcijama, dovodi do zaključka da se izospinska $SU(2)$ simetrija mora proširiti na veću simetriju, koja će biti generisana nekom grupom ranga 2. Više o ovome ćemo reći u glavama 2.5 i 2.6.

Ranije smo uveli pojam barionskog broja. Podsetimo se da je barionski kvantni broj bariona 1, antobariona -1 , dok ostale čestice imaju barionski broj nula. Barionski broj se održava u svim interakcijama. Zbir barionskog broja i stranosti čestice je hipernaboj

$$Y = B + S . \quad (2.4.5)$$

On je održan u jakim interakcijama, a narušen u slabim.

Električno nanelektrisanje Q je održano u svim interakcijama. Veza izmedju nanelektrisanja, hipernaboga i treće komponente izospina čestica je data Gel-Man-Nišidžimom (M. Gell-Mann, K. Nishijima) relacijom

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} . \quad (2.4.6)$$

Kada smo govorili o leptonima, uveli smo pojam leptonskog broja. Podsetimo se da postoje tri vrste leptonskog broja: leptonski elektronski L_e , mionski L_μ i taonski L_τ . Za elektron i elektronski neutrino $L_e = +1$, pozitron i antineutrino imaju $L_e = -1$ dok je za sve ove čestice leptonski mionski i taonski kvantni broj jednak nuli. Slično je i za ostale leptone. Leptonski broj je održan u svim procesima. Proverimo održanje leptonskih brojeva u slabom procesu raspada antimiona μ^+

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \\ L_\mu : -1 &= 0 + (-1) + 0 \\ L_e : 0 &= -1 + 1 . \end{aligned}$$

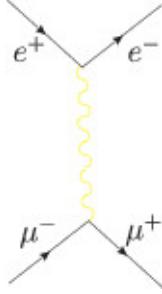
Za razliku od barionskog broja, vidimo da se leptonski broj održava po familijama. Na nivou Fajnmanovih dijagrama, to znači da nema mešanja leptonskih linija iz različitih familija u procesima. Na slici 2.2 je prikazan Fajnmanov dijagram za rasejanje elektrona i miona

$$\mu^+ + \mu^- \rightarrow e^+ + e^- .$$

2.5 Osmostruko svrstavanje hadrona

Uvodjenje novog kvantnog broja stranosti (ili hipernaboga), navelo je Gelmana (M. Gell-Mann) i Neemana (Y. Ne'eman) da, 1961. godine nezavisno formulišu klasifikaciju do tada otkrivenih hadrona u multiplete $SU(3)$ grupe. Ova klasifikacija je poznata kao Osmostruki put¹² ili osmostruko svrstavanje.

¹²Na engleskom "The eightfold way".



Slika 2.2: Rasejanje miona i elektrona.

$SU(3)$ grupu čine 3×3 unitarne matrice jedinične determinante. Elemente ove grupe možemo napisati u obliku

$$U = e^{i\varepsilon^a \frac{\lambda_a}{2}},$$

gde su ε^a realni parametri, a λ^a Gell-Mann-ove matrice:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & (2.5.1) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gelmanove matrice su normalizovane prema

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}. \quad (2.5.2)$$

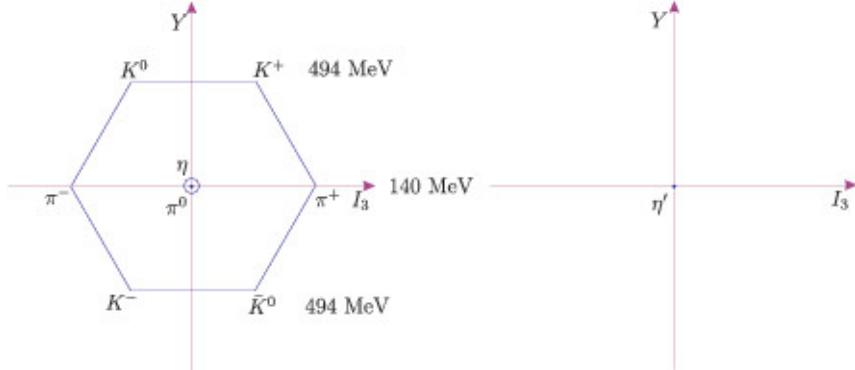
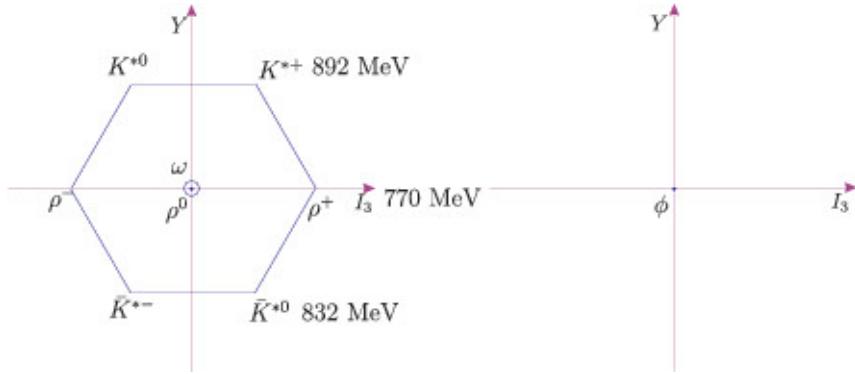
Rang grupe $SU(3)$ je 2, tj. maksimalan skup komutirajućih generatora je dva. Ta dva komutirajuća generatora su λ_3 i λ_8 . Ovo znači da je Kartanova podalgebra $su(3)$ algebre dvodimenzionala, pa su time i težinski dijagrami $su(3)$ algebre dvodimenzioni. Detalje konstrukcije težinskih dijagrama $su(3)$ algebre videćemo u glavi 2.7.

Gelman i Neeman su grupisali hadrone istog barionskog broja i istih spina i parnosti u jedan multiplet $SU(3)$, koji je karakterisan odgovarajućim težinskim dijagramom.

Tako su pseudoskalarni mezoni spina i parnosti 0^- grupisani u oktet i singlet $SU(3)$ grupe, kao na slici 2.3.

Vektorski mezoni, spina i parnosti 1^- , su takodje grupisani u oktet i singlet $SU(3)$ grupe, slika 2.4.

Barioni spina i parnosti $\frac{1}{2}^+$ su grupisani u oktet, dok su barioni spina i parnosti $\frac{3}{2}^+$ grupisani u dekuplet $SU(3)$ grupe, slika 2.5. Unutar multipleta, stanja (pojedine čestice)

Slika 2.3: Pseudoskalarni (0^-) mezoni.Slika 2.4: Vektorski (1^-) mezoni.

su karakterisana kvantnim brojevima koji odgovaraju generatorima Kartanove podalgebre: $\lambda_3 \rightarrow I_3$ i $\lambda_8 \rightarrow Y = S + B$. Podsetimo se da je I_3 treća komponenta izospina, dok su S i B stranost i barionski broj, respektivno.

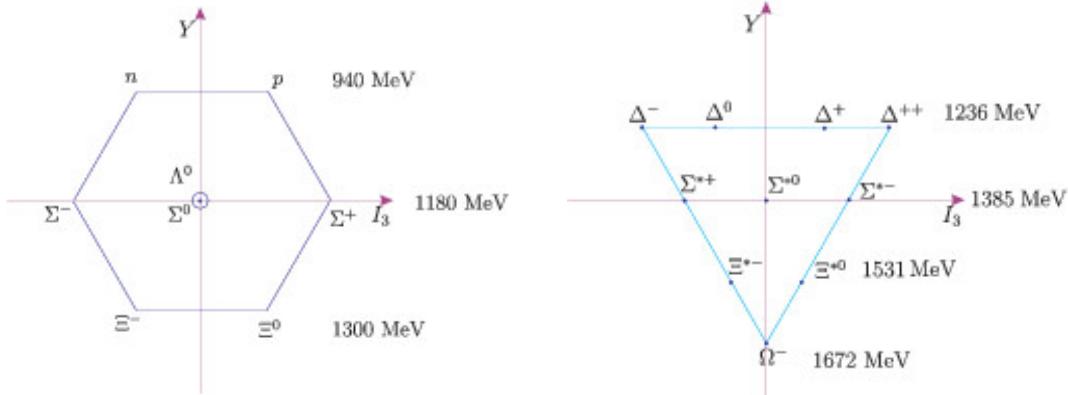
Čestice sa istom vrednošću hipernaboga su multipleti izospinske grupe $SU(2)$, koja je podgrupa od $SU(3)$. Tako su na primer p i n $SU(2)$ dublet, dok pioni π^+ , π^0 i π^- čine $SU(2)$ triplet.

U vreme kad su Gelman i Neeman objavili opisanu klasifikaciju, Ω^- barion iz barionskog dekupleta, nije bio otkriven. Koristeći se predviđanjima Osmostrukog puta za masu, spin, stranost i druge kvantne bojeve Ω^- bariona, tim naučnika iz Brookhejvena (Brookhaven National Laboratory) je eksperimentalno potvrđeno postojanje ove čestice. Ovo otkriće je predstavljalo važnu potvrdu Osmostrukog puta.

$SU(3)$ simetrija nije egzaktna, jer su mase čestica unutar jednog multipleta razlike. Mera narušenja ove simetrije se može prikazati kao

$$\frac{m_\Sigma - m_n}{m_\Sigma + m_n} \sim 0, 12 . \quad (2.5.3)$$

Vidimo da je $SU(3)$ simetrija više narušena nego $SU(2)$ izospinska simetrija (2.3.13).

Slika 2.5: Barioni u okviru $SU(3)$ grupe.

2.6 Reprezentacije $SU(n)$ grupe i Jangove šeme

Grupe $SU(2)$ i $SU(3)$ su značajne kao približne simetrije jake interakcije. U nastavku ćemo razmotriti $SU(n)$ grupe, njihove ireducibilne reprezentacije i vezu za elementarnim česticama i njihovim interakcijama.

Elementi $SU(n)$ grupe u definicionoj reprezentaciji su $n \times n$ unitarne matrice jedinične determinante:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad \det U = 1 . \quad (2.6.1)$$

Možemo ih zapisati u obliku $U = e^{iH}$, gde je H hermitska matriča nultog traga. Hermitska matriča ima n realnih dijagonalnih elemenata. Vandijagonalni elementi zadovoljavaju $(H_{ij})^* = H_{ji}$, pa su određeni sa $2\frac{n(n-1)}{2}$ realnih parametara. Dakle, hermitska matriča je određena sa n^2 parametara. Uslov $\text{Tr}H = 0$ smanjuje broj nezavisnih partometara matriće H za jedan. Dakle, broj nezavisnih partometara hermitske matriće nultog traga je $n^2 - 1$, što znači da $SU(n)$ grupa ima $n^2 - 1$ generatora. Rang algebre predstavlja maksimalan broj njenih komutirajućih generatora. Ovi generatori čine tzv. Kartanovu podalgebru. Broj dijagonalnih generatora je $n - 1$, pa je rang $su(n)$ algebre jednak $r = n - 1$.

Vektor

$$\psi_i = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in \mathbb{C}_n$$

se pri $SU(n)$ transformacijama transformiše po

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = U_{ij}\psi_j , \quad (2.6.2)$$

gde je U $SU(n)$ matriča. Ova reprezentacija se naziva definicionom reprezentacijom, ili prvom fundamentalnom reprezentacijom¹³. Lako se vidi da je i U^* takodje $SU(n)$ matriča. Konjugovanjem (2.6.2) dobijamo

$$\psi_i^* \rightarrow \psi_i^{*' *} = U_{ij}^*\psi_j^* = \psi_j^*U_{ji}^\dagger . \quad (2.6.3)$$

¹³ $SU(n)$ grupa ima $n - 1$ fundamentalnih reprezentacija.

Dakle, ψ_i^* se transformiše po konjugovanoj reprezentaciji. Dalje ćemo uvesti sledeću notaciju (konjugacija podiže indeks):

$$\psi^i \equiv \psi_i^*, \quad U_i^j \equiv U_{ij}, \quad U^i{}_j = U_{ij}^*. \quad (2.6.4)$$

Relacije (2.6.2) i (2.6.3) se onda mogu prepisati kao

$$\begin{aligned} \psi_i &\rightarrow \psi'_i = U_i{}^j \psi_j, \\ \psi^i &\rightarrow \psi'^i = U^i{}_j \psi^j. \end{aligned}$$

Veličina $\psi_i \xi^i$ je invarijanta, tj. transformiše se po singletnoj (jediničnoj) reprezentaciji $SU(n)$ grupe. Tenzori višeg ranga se pri $SU(n)$ transformacijama transformišu kao

$$\psi'^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = (U^{i_1}{}_{k_1} \dots)(U_{j_1}{}^{l_1} \dots) \psi^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}. \quad (2.6.5)$$

Kronekerov simbol $\delta^j{}_i$ je invarijantan tenzor

$$\delta^i{}_k = U^i{}_j U_k{}^l \delta^j{}_l. \quad (2.6.6)$$

Jasno je da δ_{ij} nije tenzor. Pored Kronekerovog simbola, simbol Levi-Čivita, $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ je takodje invarijantan tenzor

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = U_{i_1}{}^{j_1} \dots U_{i_n}{}^{j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \det U \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (2.6.7)$$

Kontrakcija proizvodi tenzore nižeg reda.

Proizvoljni tenzori višeg reda su najčešće reducibilni, tj. transformišu se po nekoj reducibilnoj reprezentaciji $SU(n)$ grupe. Reducibilni tenzori se mogu razložiti u ireducibilne komponente. $SU(n)$ transformacija ireducibilne tenzore prebacuju ponovo u te ireducibilne tenzore. Invarijantni tenzori se koriste za dobijanje ireducibilnih komponenti reducibilnih tenzora. Neka je na primer $T^i{}_j$ tenzor drugog reda. Množenjem ovog tenzora Kronekerovim simbolom $\delta^j{}_i$ dobijamo

$$T = \delta^j{}_i T^i{}_j = \text{Tr } \hat{T}.$$

Veličina T je skalar. Polazni tenzor $T^i{}_j$ onda možemo da razložimo u dva sabirka prema

$$T^i{}_j = (T^i{}_j - \frac{1}{n} T \delta^i{}_j) + \frac{1}{n} T \delta^i{}_j. \quad (2.6.8)$$

Prvi sabirak je tenzor nultog traga, a drugi je sam trag. Pri $SU(n)$ transformacijama tenzor nultog traga prelazi u tenzor nultog traga, a trag prelazi u trag. Oni su ireducibilni tenzori. Na ovaj način tenzor $T^i{}_j$ smo razložili u ireducibilne komponente.

2.6.1 Veza grupe $SU(n)$ i permutacione grupe S_n

Posmatrajmo sada tenzore samo sa gornjim indeksima. Zakon transformacije tenzora drugog reda je

$$\psi'^{ij} = U^i{}_k U^j{}_l \psi^{kl}. \quad (2.6.9)$$

Zamenom indeksa i i j dobijamo

$$\psi'^{ji} = U^j{}_l U^i{}_k \psi^{lk} = U^i{}_k U^j{}_l \psi^{lk}. \quad (2.6.10)$$

Permutacija indeksa je definisana delovanjem operatora P_{12} kao

$$P_{12} \psi^{ij} = \psi^{ji}.$$

Lako se vidi da se tenzori ψ^{ij} i ψ^{ji} transformišu na isti način, tj. permutacija indeksa ne menja zakon transformacije.

Definišimo simetričan i antisimetričan deo tenzora ψ^{ij} :

$$S^{ij} = \frac{1}{2} (\psi^{ij} + \psi^{ji}), \quad (2.6.11)$$

$$A^{ij} = \frac{1}{2} (\psi^{ij} - \psi^{ji}). \quad (2.6.12)$$

Tenzori S^{ij} i A^{ij} su svojstvena stanja operatora P_{12}

$$\begin{aligned} P_{12} S^{ij} &= S^{ij}, \\ P_{12} A^{ij} &= -A^{ij}. \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

Takodje je

$$\begin{aligned} S'^{ij} &= U^i{}_k U^j{}_l S^{kl}, \\ A'^{ij} &= U^i{}_k U^j{}_l A^{kl}. \end{aligned}$$

Dakle, pri $SU(n)$ transformacijama simetričan (antisimetričan) tenzor se transformišu u simetričan (antisimetričan) tenzor. Tenzor ψ^{ij} smo dekomponovali

$$\psi^{ij} = S^{ij} + A^{ij} \quad (2.6.14)$$

i videli smo da su S^{ij} i A^{ij} ireducibilne komponente. Simetričan i antisimetričan tenzor ne mogu se dalje dekomponovati. Ova procedura se može generalisati na tenzore višeg ranga koji ima ili samo gornje ili samo donje indekse. Možemo zaključiti da su bazisni vektori (tenzori) ireducibilnih reprezentacija $SU(n)$ grupe tenzori definisane permutacione simetrije indeksa.

Tenzor trećeg reda ξ^{ijk} se dekomponuje na sledeći način

$$\xi^{ijk} = \frac{1}{6} (\xi^{\{ijk\}} + (\xi^{\{j[i]k\}} + \xi^{\{i[j]k\}}) + (\xi^{\{i[j]k\}} + \xi^{\{j[i]k\}}) + \xi^{[ijk]}). \quad (2.6.15)$$

Prvi sabirak u (2.6.15) je totalno simetričan

$$\begin{aligned} \xi^{\{ijk\}} &= S_{123} \xi^{ijk} \\ &= (1 + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{13}P_{12} + P_{12}P_{13}) \xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} + \xi^{jik} + \xi^{kji} + \xi^{ikj} + \xi^{kij} + \xi^{jki}. \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Poslednji sabirak je totalno antisimetričan

$$\begin{aligned}\xi^{[ijk]} &= A_{123}\xi^{ijk} \\ &= (1 - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{13}P_{12} + P_{12}P_{13})\xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} - \xi^{jik} - \xi^{kji} - \xi^{ikj} + \xi^{kij} + \xi^{jki}.\end{aligned}\quad (2.6.17)$$

Ostali sabirci u (2.6.15) su tenzori mešane simetrije. Tenzor $\xi^{\{j[i]k\}}$ je simetričan po prvom i drugom indeksu:

$$\begin{aligned}\xi^{\{j[i]k\}} &= S_{12}A_{13}\xi^{ijk} \\ &= (1 + P_{12})(1 - P_{13})\xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} + \xi^{jik} - \xi^{jki} - \xi^{kji}.\end{aligned}\quad (2.6.18)$$

Prvo smo izvršili antisimetrizaciju po prvom i trećem indeksu pa zatim simetrizaciju po prvom i drugom. Dobijeni tenzor nije antisimetričan po prvom i trećem indeksu. Postoji još jedan tenzor simetričan po prvom i drugom indeksu, $\xi^{\{i[j]k\}}$. On je

$$\begin{aligned}\xi^{\{i[j]k\}} &= S_{12}A_{23}\xi^{ijk} \\ &= (1 + P_{12})(1 - P_{23})\xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} + \xi^{jik} - \xi^{ikj} - \xi^{kij}.\end{aligned}\quad (2.6.19)$$

Tenzor $\xi^{\{i[j]k\}}$ ne sadrži nova bazisna stanja u odnosu na tenzor $\xi^{\{j[i]k\}}$. Preostala dva tenzora mešane simetrije su antisimetrična po prvom i drugom indeksu:

$$\begin{aligned}\xi^{\{i[j]k\}} &= A_{12}S_{23}\xi^{ijk} \\ &= (1 - P_{12})(1 + P_{23})\xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} + \xi^{ikj} - \xi^{jik} - \xi^{kij}\end{aligned}\quad (2.6.20)$$

$$\begin{aligned}\xi^{[j[i]k]} &= A_{12}S_{13}\xi^{ijk} \\ &= (1 - P_{12})(1 + P_{13})\xi^{ijk} \\ &= \xi^{ijk} + \xi^{kji} - \xi^{jik} - \xi^{jki}.\end{aligned}\quad (2.6.21)$$

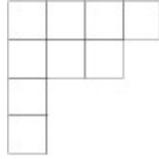
Ovi primeri ilustruju vezu izmedju $SU(n)$ grupe i grupe permutacija od n elemenata, S_n grupe. Ireducibilne (IR) reprezentacije permutacione grupe su klasifikovane Jangovim šemama. Veza Jangovih šema i IR reprezentacija $SU(n)$ grupe je definisana Fundamentalnom teoremom. Ona glasi:

Ako je p -čestično stanje ireducibilan tenzor permutacione grupe S_p i ako je ono konstruisano od jednočestičnih stanja koja su bazisni vektori ireducibilne n -dimenzijske reprezentacije $SU(n)$ grupe, onda to stanje odgovara ireducibilnom tenzoru $SU(n)$ grupe.

Dakle, Jangove šeme obeležavaju¹⁴ IR reprezentacije $SU(N)$ grupe. Primer jedne Jangove šeme dat je na 2.6.

Proizvoljna Jangova šema se sastoje od najviše n vrsta i svaki sledeći red (glezano odozgo na dole) sadrži isto ili manje kvadratiča nego prethodni.

¹⁴Jangove šeme nisu IR reprezentacije $SU(n)$ grupe. To se može videti tako što jednoj Jangovoj šemi



Slika 2.6: Jangova šema.

2.6.2 Osobine Jangovih šema

Kompaktna poluprosta Lijeva algebra ranga l ima l dijagonalnih operatora H_i , gde i uzima vrednosti $i = 1, 2, \dots, l$. Oni čine Kartanovu podalgebru. Zajednički svojstveni problem operatora H_i je

$$H_i \psi_m^{(j)} = m_i \psi_m^{(j)}, \quad (2.6.22)$$

gde (j) označava reprezentaciju, dok indeks m klasificiše vektore. Uvedimo vektore

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_1, m_2, \dots, m_l), \\ \mathbf{H} &= (H_1, H_2, \dots, H_l). \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Tada (2.6.22) postaje

$$\mathbf{H} \psi_m^{(j)} = \mathbf{m} \psi_m^{(j)}, \quad (2.6.24)$$

gde su \mathbf{m} težine.

Primer $SU(2)$ grupe

Standardna forma $su(2)$ algebre je

$$H_1 = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad E_1 = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2\sqrt{2}}, \quad E_{-1} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2\sqrt{2}}. \quad (2.6.25)$$

Bazisni vektori dvodimenzione definicione (fundamentalne) reprezentacije su

$$\psi_{1/2}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1, \quad \psi_{-1/2}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2.$$

Oni su svojstvena stanja operatora H_1

$$\begin{aligned} H_1 u_1 &= \frac{1}{2} u_1, \quad m(1) = +\frac{1}{2}, \\ H_1 u_2 &= -\frac{1}{2} u_2, \quad m(2) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

odgovara više IR reprezentacija različitih $SU(n)$ grupa. Na primer, šema



predstavlja trodimenzionu reprezentaciju $SU(2)$ grupe, šestodimenzionu reprezentaciju $SU(3)$ grupe, dvadesetodimenzionu reprezentaciju $SU(4)$ grupe, ...

Stanja u_1 i u_2 odgovaraju bazisnim spinskim stanjima u kvantnoj mehanici, ili bazisnim izospinskim stanjima kao u glavi 2.3. Bazisne vektore u_1 i u_2 prikazaćemo sa jednim kvadratičem u kojem piše broj 1, odnosno 2, kako na slici 2.7. Kvadratić će nam biti oznaka za dvodimenzionu ireducibilnu reprezentaciju $SU(2)$ grupe.

$$u_1 = \boxed{1} \quad u_2 = \boxed{2} \rightarrow \boxed{} - \text{ovo nam označava dvodimenzionu reprezentaciju } SU(2).$$

Slika 2.7: Stanja u dvodimenzionoj IR reprezentaciji $SU(2)$ grupe.

Proizvod dve dvodimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupe $SU(2)$ je reducibilna reprezentacija koja je direktni zbir singletne i trodimenzijske reprezentacije

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \rightarrow 1 \oplus 0 .$$

Vektori trodimenzijske reprezentacije

$$u_1 u_1, u_2 u_2, \frac{u_1 u_2 + u_2 u_1}{\sqrt{2}} \quad (2.6.26)$$

su simetrični, dok antisimetrično stanje

$$\frac{u_1 u_2 - u_2 u_1}{\sqrt{2}} \quad (2.6.27)$$

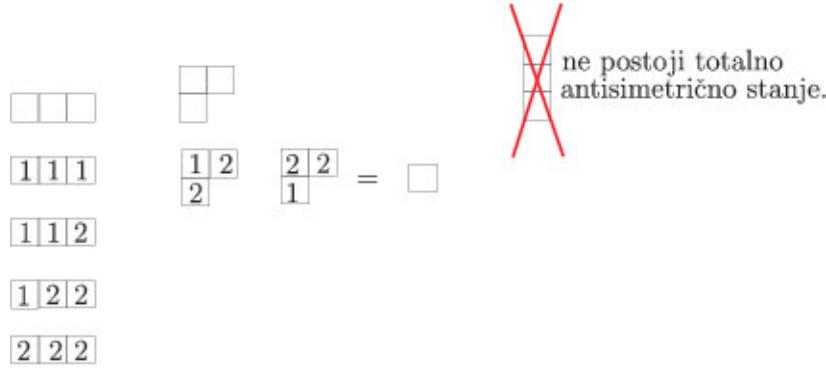
pripada jednodimenzionoj reprezentaciji.

$$\begin{aligned} J = 1 & \left\{ \begin{array}{c} u_1 u_1 \boxed{1|1} \\ u_2 u_2 \boxed{2|2} \\ \frac{u_1 u_2 + u_2 u_1}{\sqrt{2}} \boxed{1|2} \end{array} \right\} \boxed{} \text{ simetrično stanje} \\ J = 0 & \left\{ \frac{u_1 u_2 - u_2 u_1}{\sqrt{2}} \boxed{\frac{1}{2}} \right\} \boxed{} \text{ antisimetrično stanje.} \end{aligned}$$

Slika 2.8: Trodimenziona i singletna IR reprezentacija $SU(2)$ grupe.

Dva kvadratiča u vrsti označavaju simetrično stanje, dok dva kvadratiča u koloni predstavljaju antisimetrično stanje, slika 2.8.

Možemo dalje analizirati tročestično stanje. Ireducibilne reprezentacije su Jangove šeme $SU(2)$ grupe koje se sastoje od tri kvadratiča. Jangova šema sa tri kvadratiča u vrsti označava simetrična stanja. Pored njih postoji i stanje mešane simetrije. Očigledno je da ne postoji tročestično totalno antisimetrično stanje. Zato Jangova šema za $SU(2)$ grupu može imati najviše dve vrste. Jasno je da su bazisni tenzori simetrične reprezentacije

Slika 2.9: Tročestična stanja $SU(2)$ grupe. $SU(2)$ grupe:

$$\begin{aligned} u_1 u_1 u_1, \quad & \frac{1}{\sqrt{3}}(u_2 u_1 u_1 + u_1 u_2 u_1 + u_1 u_1 u_2), \\ & \frac{1}{\sqrt{3}}(u_2 u_2 u_1 + u_2 u_1 u_2 + u_1 u_2 u_2), \quad u_2 u_2 u_2. \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

Ova reprezentacija je prikazana na slici 2.9. Zaključujemo da je simetrična reprezentacija tročestičnog stanja četvorodimenziona, dok je reprezentacija mešane simetrije dvodimenziona.

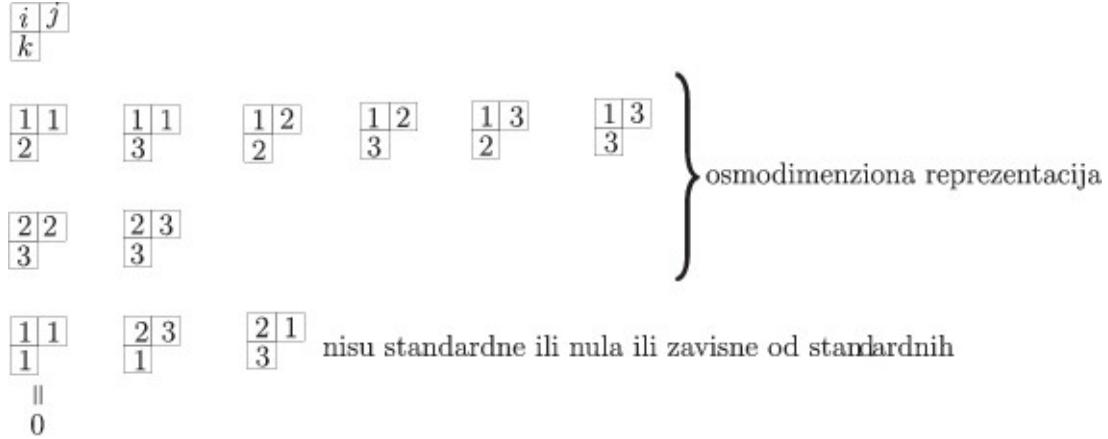
Primetimo da i za proizvoljnu $SU(N)$ grupu važi da simetričan tenzor S_{ij} reprezentujemo Jangovom šemom od dva kvadratiča u vrsti (prva Jangova šema na slici 2.10) a antisimetričan sa dva kvadratiča u koloni (druga šema na slici 2.10). Treća Jangova šema na slici 2.10 je totalno simetričan tenzor trećeg reda, dok poslednja šema predstavlja tenzor mešane simetrije.

$$\begin{aligned} S_{ij} \quad & \boxed{i\ j} \\ A_{ij} \quad & \boxed{\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} i & j & k \end{matrix}} \quad & \psi_{ijk} + \psi_{jik} + \psi_{kji} + \psi_{ikj} + \psi_{kij} + \psi_{jki} \\ & \equiv S(\psi_{ijk}) = (1 + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{13}P_{12} + P_{12}P_{13})\psi_{ijk} \\ \boxed{\begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix}} \quad & \text{tenzor sa mešanim indeksima} \\ & \psi_{ijk} + \psi_{jik} - \psi_{jki} - \psi_{kji} = S_{12}A_{13}\psi_{ijk} = \\ & (1 + P_{12})(1 - P_{13})\psi_{ijk} = \psi_{ijk} + \psi_{jik} - \psi_{kji} - \psi_{jki} \end{aligned}$$

Slika 2.10: Primeri tenzora $SU(n)$ grupe.

Standardno uredjenje

Razmotrimo tenzor mešane simetrije grupe $SU(n)$. Da bismo dobili standardno ure-



Slika 2.11: Standardno uredjenje.

djenje Jangove šeme $SU(n)$ grupe potrebno je da brojeve $1, \dots, n$ upisujemo u kvadratiće šeme ali tako da oni ne opadaju u vrsti, a rastu kad se gleda po kolonama odozgo na dole. To je uradjeno na slici 2.11 na primeru $SU(3)$ grupe. Sa slike se vidi da postoji osam standardno uredjenih Jangovih šema, pa je ova ireducibilna reprezentacija osmodimenziona. Šeme koje nisu standardne ili su jednake nuli ili se mogu svesti na standardne, pa ih ne razmatramo.

Računanje dimenzije ireducibilne reprezentacije $SU(n)$ grupe

Dimenzija ireducibilne reprezentacije je količnik D_1/D_2 . Da bismo dobili brojeve D_1 i D_2 , treba u svaki kvadratić Jangove šeme upisati po jedan broj na sledeći način. U prvi kvadratić upišemo broj n , u naredni u prvoj vrsti broj $n+1$ i tako do kraja vrste. U narednoj vrsti počinjemo brojem $n-1$, pa u sledeći kvadratić upisujemo n i tako redom do kraja vrste. Kada popunimo celu šemu, proizvod svih upisanih brojeva daje broj D_1 . Broj D_2 takodje predstavlja proizvod brojeva pridruženih svakom kvadratiću šeme. Ovi novi brojevi, za dati kvadratić predstavljaju broj kvadratića koji se od datog nalaze na desno i na dole, računajući i sam kvadratić. Na slici 2.12 su izračunate dimenzije dve Jangove šeme.

$$\begin{array}{c}
 \text{SU}(4) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 \text{opadaju} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{n \text{ rastu}} \\ \downarrow \end{array} \quad D = \frac{4 \ 5 \ 6 \ 7}{\begin{matrix} 3 \ 4 \ 2 \\ 6 \ 4 \ 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix}} = 5 \cdot 7 \cdot 3 = 105
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{SU}(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad D = \frac{3 \ 4}{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} = 8
 \end{array}$$

Slika 2.12: Dimenzije IR reprezentacija.

Razlaganje direktnog proizvoda IR reprezentacija

Proizvod IR $SU(n)$ grupe je reducibilna reprezentacija. Ireducibilne komponente nalazimo primenom sledećeg pravila:

1. U prvi red prve šeme upišemo a , u drugi b i tako redom dok ne popunimo celu šemu.

a	a	a
b	b	
c		

Slika 2.13: Razlaganje direktnog proizvoda IR reprezentacija, prvi korak.

2. Dodajemo kvadratić sa indeksom a na drugu šemu na sve moguće načine, tako da dobijena šema bude opet Jangova šema. Zatim to ponovimo za drugi a kvadratić i tako redom. U istoj koloni ne smeju da se nalaze dva a kvadratića (zbog antisimetričnosti). Ovaj postupak ponovimo i sa svim sa b , c i ostalim kvadratićima.
3. Kada iskoristimo sve kvadratiće sa slovima, sve dobijene šeme se pročitaju sa desna na levo u prvom redu, zatim u drugom i tako do kraja šeme. U dobijenom nizu slova mora broj a -ova biti veći ili jednak broju b -ova, a on veći ili jednak od broja c -ova itd., odnosno

$$N(a) \geq N(b) \geq N(c) \dots$$

Razmotrimo sledeći primer. Razložimo proizvod dve osmodimenzione reprezentacije, slika 2.14, grupe $SU(3)$ u direktni zbir ireducibilnih reprezentacija.

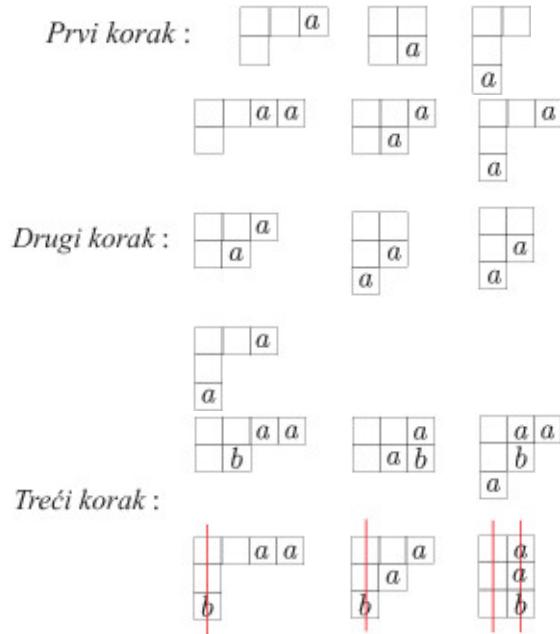
$$SU(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Slika 2.14: Proizvod dve osmodimenzione ireducibilne reprezentacije.

U prvu tablicu smo upisali slova po pravilu 1. Zatim u prvom koraku dodajemo kockicu sa slovom a drugoj tablici. Tako smo dobili prvi red na slici 2.15. Zatim dodajemo naredno a , ali tako da se u istoj koloni ne pojavljuju dva slova a . U narednom koraku dodajemo kvadratić sa slovom b , na sve moguće načine. Zadržavamo samo one šeme kod kojih je ispunjen uslov u pravilu 3. Konačno proizvod dve osmodimenzione ireducibilne reprezentacije je dat na slici 2.16.

Konjugovane reprezentacije

Vektor ψ_i se transformiše po definicijom (prvoj fundamentalnoj) ireducibilnoj reprezentaciji $SU(n)$ grupe. Njega predstavljamo jednim kvadratićem. Kako je $\psi^i \psi_i$ skalar, to se $\psi^i = (\psi_i)^*$ transformiše po konjugovanoj n^* ireducibilnoj reprezentaciji. Ova reprezentacija ima dimenziju n , ali je neekvivalentna sa polaznom, osim u slučaju $SU(2)$ grupe. Dve Jangove šeme predstavljaju medjusobno konjugovane reprezentacije ako, kad jednu Jangovu šemu zarotiramo za 180° i dodamo drugoj šemi, dobijemo jediničnu reprezentaciju. Ovo je prikazano na slici 2.17. Grupa $SU(n)$ ima $n - 1$ fundamentalnih reprezentacija i one su n -dimenzione.



Slika 2.15: Proizvod dve osmodimenzione reprezentacije po koracima.

$$8 \times 8 = 27 + 10^* + 2 \cdot 8 + 10 + 1$$

Slika 2.16: Proizvod IR reprezentacija $SU(3)$ grupe.

2.7 Kvark model u okviru $SU(3)$ grupe simetrije

U glavi 2.5 smo videli da su generatori $SU(3)$ grupe Gelmanove matrice. Od njih osam, samo matrice λ_3 i λ_8 komutiraju. One čine Kartanovu podalgebru $su(3)$ algebre

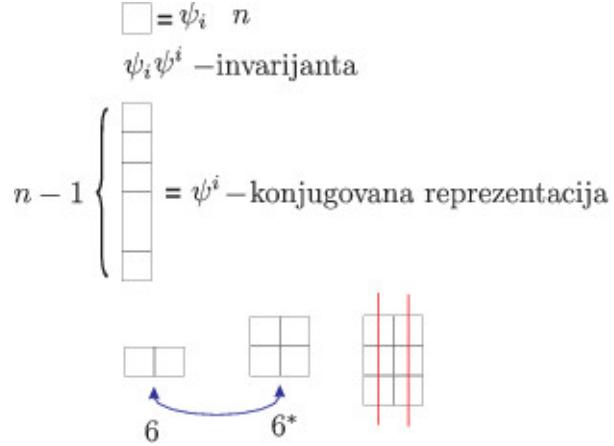
$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.7.1)$$

Zajednički svojstveni bazis ove dve matrice je

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uvedimo vektor

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2) \; .$$



Slika 2.17: Konjugovane reprezentacije.

Težine se lako nalaze:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) u_1 \Rightarrow \mathbf{m}(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) , \\
 \mathbf{H}u_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) u_2 \Rightarrow \mathbf{m}(2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) , \\
 \mathbf{H}u_3 &= \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right) u_3 \Rightarrow \mathbf{m}(3) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Težine su dvodimenzionalne. Ako reskaliramo koordinate težina kao

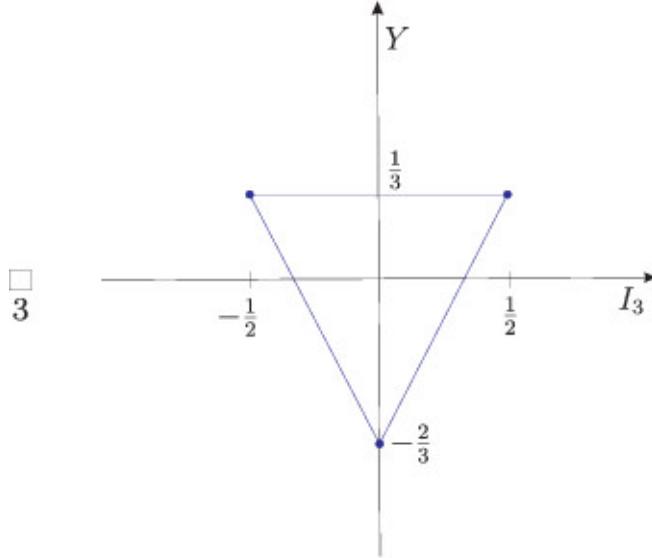
$$I_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} m_1, \quad Y = \sqrt{2} m_2 ,$$

onda su vektori težina u koordinatama (I_3, Y) dati sa

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}(1) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) , \\
 \mathbf{m}(2) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) , \\
 \mathbf{m}(3) &= \left(0, -\frac{2}{3} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Težinski dijagram trodimenzione reprezentacije je prikazan na slici 2.18.

Ako je $U = e^{i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}}$ onda konjugovanjem dobijamo $U^* = e^{-i\theta^a \frac{\lambda^{a*}}{2}}$, odakle sledi da su $-\frac{\lambda_a^*}{2} = -\frac{\lambda_a^T}{2}$ generatori konjugovane trodimenzione reprezentacije, $3^* = \bar{3}$. Konjugovana reprezentacija nije ekvivalentna prvoj fundamentalnoj za $SU(N)$, $N > 2$. Težinski dijagram $\bar{3}$ reprezentacije je prikazan na slici 2.19. $SU(3)$ grupa ima samo dve fundamentalne reprezentacije: 3 i $\bar{3}$ i one su medjusobno konjugovane. $\bar{3}$ je druga fundamentalna

Slika 2.18: Težinski dijagram 3 IR reprezentacije $SU(3)$

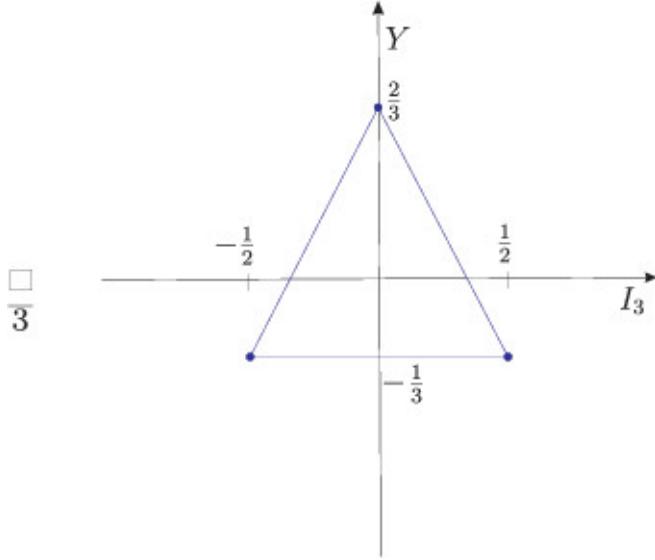
reprezentacija $SU(3)$ grupe. Višedimenzione reprezentacije dobijaju se množenjem fundamentalnih reprezentacija. Videli smo u glavi 2.5 da se mezoni i barioni nalaze se u singletnoj (jediničnoj), osmodimenzionoj i desetodimenzionoj reprezentaciji grupe $SU(3)$. Gelman i Cvajg (G. Zweig) su nezavisno, 1964. godine uveli kvarkove kao konstituente hadrona. U predloženom kvark modelu, kvarkovi su se nalazili u trodimenzionoj reprezentaciji $SU(3)$ grupe. $SU(3)$ simetrija se naziva flavour-nom simetrijom. Postoje tri vrste (tipa, "flavour") kvarkova: gornji ("up"), donji ("down") i strani ("strange"). Njihovi kvantni brojevi su dati u tabeli 2.5.

- $\boxed{1} = u \quad \text{up}$
- $\boxed{2} = d \quad \text{down}$
- $\boxed{3} = s \quad \text{strange}$

Vrsta	$m[MeV]$	s	Q	I	I_3	Y	S	B
u	300	$1/2$	$2/3$	$1/2$	$1/2$	$1/3$	0	$1/3$
d	300	$1/2$	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	0	$1/3$
s	500	$1/2$	$-1/3$	0	0	$-2/3$	-1	$1/3$

Tabela 2.5: Kvantni brojevi kvarkova.

Sva tri kvarka su fermioni, spina $1/2$. Izospin u i d kvarka je $1/2$, dok je s kvark ima izospin nula. s kvark ima stranost -1 . Naelektrisanje kvarkova se računa koristeći Gelman-Nišidžimu formulu (2.4.6). Ona daje $Q_u = 2/3$, $Q_d = Q_s = -1/3$, pa naelektrisanje kvarkova nije celobrojan umnožak elementarnog naelektrisanja. Barionski broj kvarkova je $1/3$.

Slika 2.19: Težinski dijagram $\bar{3}$ IR reprezentacije $SU(3)$ grupe.

Antikvarkovi su antičestice kvarkova. Oni su bazisni vektori konjugovane trodimenzione reprezentacije $\bar{3}$ i njihovi kvantni brojevi su dati u tabeli 2.6.

$$\boxed{\frac{1}{2}} \quad (0, \frac{2}{3}) = \bar{s}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}} \quad (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \bar{d}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}} \quad (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \bar{u}$$

Vrsta	m[MeV]	s	Q	I	I_3	Y	S	B
\bar{u}	300	1/2	-2/3	1/2	-1/2	-1/3	0	-1/3
\bar{d}	300	1/2	1/3	1/2	1/2	-1/3	0	-1/3
\bar{s}	300	1/2	1/3	0	0	2/3	1	-1/3

Tabela 2.6: Kvantni brojevi antikvarkova.

Mezoni

Mezoni su vezana stanja kvarka i antikvarka. Oni se, u okviru $SU(3)$ modela, nalaze u osmodimenzionoj i singletnoj reprezentaciji grupe $SU(3)$, slika 2.20.

Standardne tablice i basini tenzori osmodimenzione reprezentacije su date na slici 2.21. Težine za svaku komponentu tenzora smo izračunali koristeći aditivnost težina. Težinski dijagrami osmodimenzione i singletne reprezentacije su prikazani na slici 2.21. Pošto se sastoje od kvarka i antikvarka, mezoni su bozoni spina 0 ili 1. Težinski dijagrami pseudoskalarnih mezona i vektorskih mezona su prikazani na 2.3 i 2.4 slikama respektivno.

$$\begin{array}{c} \square \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \oplus \cdot \\ 3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \end{array}$$

Slika 2.20: Razlaganje proizvoda $3 \otimes \bar{3}$ u ireducibilne komponente.

$$\begin{array}{ccccccccc} \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ (\frac{1}{2}, 1) & (-\frac{1}{2}, 1) & (0, 0) & (-1, 0) & (-\frac{1}{2}, -1) & (-1, 0) & (0, 0) & (\frac{1}{2}, -1) \end{array}$$

Slika 2.21: Bazisna stanja osmodimenzionalne ireducibilne reprezentacije.

Odredimo kvarkovsku strukturu pseudoskalarnih mezona, koristeći Jangove šeme. Kako je η' singlet to je njegova talasna funkcija¹⁵

$$\eta' = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}}. \quad (2.7.4)$$

Talasna funkcija π^0 mezona ne sadrži s kvark, jer je masa π^0 mezona oko $140 MeV$. Takođe, ta talasna funkcija mora biti normirana i ortogonalna na talasnu funkciju η' mezona, jer se ove dve čestice nalaza u različitim multipletima. Iz ovih uslova dobijamo

$$\pi^0 = \frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}. \quad (2.7.5)$$

Konačno, talasna funkcija η mezona sadrži sva tri kvarka, normirana je i ortogonalana na talasnu funkciju η' i π^0 mezona. Ovi uslovi daju

$$\eta^0 = \frac{\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s}{\sqrt{6}}. \quad (2.7.6)$$

Preostale čestice, i njihova kvarkovska struktura su dati na slici 2.22.

Vektorski mezoni imaju spin 1. Oni imaju istu kvarkovsku strukturu kao i pseudoskalarni mezoni, pa se može reći da su vektorski mezoni pobudjena kvark-antikvark stanja pseudoskalarnih mezona. Na primer, ρ^+ i π^+ mezoni se sastoje od jednog u kvarka i \bar{d} antikvarka. Osim po spinu, oni se razlikuju i po masi. Masa ρ^+ mezona je oko $770 MeV$, a π^+ mezona oko $140 MeV$.

Barioni

Barioni su vezana stanja tri kvarka. Oni su fermioni, spina $1/2$ ili $3/2$. Ralaganjem proizvoda tri trodimenzione reprezentacije, $3 \otimes 3 \otimes 3$, dobijamo jednu desetodimenzionu, dve osmodimenzione i singletnu IR grupe $SU(3)$, slika 2.23. U glavi 2.5 smo videli da se barioni nalaze u osmodimenzionoj i desetodimenzionoj reprezentaciji $SU(3)$ grupe. Singleta reprezentacija ne odgovara realnim česticama.

¹⁵Ovde se ne misli na totalnu talasnu funkciju, već samo na deo vezan za $SU(3)$ simetriju.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{s}u = K^+$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{s}d = K^0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{u}s = K^-$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{d}s = \bar{K}^0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{d}u = \pi^+$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \sim \bar{u}d = \pi^-$$

Slika 2.22: Preostale čestice u mezonskom oktetu.

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square\square \oplus \square) \otimes \square = \square\square\square \oplus \square\square \oplus \square\square \oplus \square$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Slika 2.23: Razlaganje proizvoda $3 \otimes 3 \otimes 3$ na ireducibilne komponente.

Razmotrimo detaljnije talasne funkcije (po $SU(3)$ grupi samo) dobijenih čestica. Proizvod dve trodimenzione reprezentacije je direktni zbir jedne simetrične

$$u_{ij}^S = u_i u_j + u_j u_i \quad (2.7.7)$$

i jedne antisimetrične ireducibilne reprezentacije

$$u_{ij}^A = u_i u_j - u_j u_i. \quad (2.7.8)$$

Sada preostaje da ove tenzore pomnožimo još jednim tenzorom u_k . Proizvod $u_{ij}^A u_k$ dekomponujemo prema

$$\begin{aligned} u_{ij}^A u_k &= \frac{1}{3} [(u_{ij}^A u_k + u_{ki}^A u_j + u_{jk}^A u_i) \\ &\quad + (u_{ij}^A u_k - u_{ki}^A u_j) \\ &\quad + (u_{ij}^A u_k - u_{jk}^A u_i)] . \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Prvi red u (2.7.9) je antisimetričan tenzor

$$u_i u_j u_k - u_j u_i u_k + u_k u_i u_j - u_i u_k u_j + u_j u_k u_i - u_k u_j u_i , \quad (2.7.10)$$

tj. singletna reprezentacija. Drugi red u (2.7.9) je tenzor mešane simetrije iz osmodimenzione reprezentacije

$$u_i u_j u_k + u_i u_k u_j - u_j u_i u_k - u_k u_i u_j \quad (2.7.11)$$

dok je treći red

$$u_i u_j u_k + u_k u_j u_i - u_j u_i u_k - u_j u_k u_i . \quad (2.7.12)$$

Ireducibilni tenzori (2.7.11) i (2.7.12) su antisimetrični po prvom i drugom indeksu i sadrže iste bazisne vektore, pa ne predstavljaju nezavisne tenzore.

Sa druge strane, proizvod $u_{ij}^S u_k$ se razlaže kao

$$\begin{aligned} u_{ij}^S u_k &= \frac{1}{3} [(u_{ij}^S u_k + u_{ki}^S u_j + u_{jk}^S u_i) \\ &\quad + (u_{ij}^S u_k - u_{jk}^S u_i) \\ &\quad + (u_{ij}^S u_k - u_{ki}^S u_j)] . \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Prvi red u (2.7.13) je totalno simetričan tenzor iz desetodimenzione reprezentacije

$$u_i u_j u_k + u_j u_i u_k + u_k u_i u_j + u_i u_k u_j + u_j u_k u_i + u_k u_j u_i . \quad (2.7.14)$$

U drugom i trećem redu je nova osmodimenziona reprezentacija, u kojoj su stanja simetrična po prva dva indeksa. Tenzor u drugom redu je

$$u_i u_j u_k + u_j u_i u_k - u_k u_j u_i - u_j u_k u_i . \quad (2.7.15)$$

Tenzor u trećem redu nije nezavisna osmodimenziona reprezentacija.

Dakle, proizvod tri trodimenzione reprezentacije je direktni zbir singletne, dve osmodimenzione (jedne simetrične a druge antisimetrične po prva dva indeksa) i jedne desetodimenzione ireducibilne reprezentacije. Ova dekompozicija je ista kao i dekompozicije (2.6.15), jer se tenzori ξ_{ijk} i $u_i u_j u_k$ transformišu na isti način.

Barioni iz osmodimenzione reprezentacije imaju spin i parnost $1/2^+$ i njihov težinski dijagram je prikazan na slici 2.5. Na osnovu kvantnih brojeva lako možemo odrediti kvark strukturu ovih bariona:

$$\begin{aligned} p &= uud & n = udd & \Sigma^+ = uus & \Sigma^0 = \frac{ud + du}{\sqrt{2}} s & \Sigma^- = sdd \\ \Xi^0 &= ssu & \Xi^- = ssh & \Lambda^0 = \frac{ud - du}{\sqrt{2}} s . \end{aligned}$$

Funkcije stanja se mogu takodje lako naći. U slučaju osmodimenzione reprezentacije u kojoj su stanja simetrična po prva dva indeksa¹⁶, za talasne funkcije protona i neutrona

¹⁶Kojoj osmodimenzionoj reprezentaciji proton i neutron zaista pripadaju, može se odrediti samo na osnovu eksperimenta. Napomenimo da talasna funkcija protona još uvek nije potpuno odredjena, a najveći problem predstavlja komplikovana interakcija izmedju kvarkova u protonu.

dobijamo

$$\begin{aligned} p &= \frac{2uud - duu - udu}{\sqrt{6}}, \\ n &= \frac{udd + dud - 2ddu}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

Stanja desetodimenzione reprezentacije su totalno simetrična. Ona su data na slici 2.24. Barioni iz desetodimenzione reprezentacije imaju spin i parnost $3/2^+$. Vidimo da je

10

$$\begin{aligned} \boxed{1|1|1} &= uuu = \Delta^{++} \\ \boxed{1|1|2} &= \frac{uud+udu+duu}{\sqrt{3}} = \Delta^+ \\ \boxed{1|2|2} &= \frac{udd+dud+ddu}{\sqrt{3}} = \Delta^0 \\ \boxed{1|2|3} &= \frac{uds+dus+dsu+sdu+dus+uds}{\sqrt{6}} = \Sigma^{*0} \\ \boxed{2|2|2} &= ddd = \Delta^- \\ \boxed{1|1|3} \\ \boxed{1|3|3} \\ \boxed{2|3|3} \\ \boxed{2|2|3} \\ \boxed{3|3|3} &= sss = \Omega^- \end{aligned}$$

Slika 2.24: Stanja u desetodimenzionalnoj ireducibilnoj reprezentaciji.

Ω^- barion, čije je otkriće bilo potvrda Osmostrukog puta, vezano stanje tri s kvarka.

Narušenje $SU(3)$ simetrije i ω - ϕ mešanje

Znamo da $SU(3)$ simetrija nije egzaktna simetrija jake interakcije. Mera narušenja ove simetrije je data u (2.5.3). Osim razlike u masama čestica koje se nalaze u istim multipletima, postoji još jedan primer koji ukazuje na narušenje ove simetrije. To je takozvano ω - ϕ mešanje, to jest mešanje vektorskih mezona iz različitih multipleta. Osma komponenta vektorskog mezonskog multipleta i singletno stanje su

$$\begin{aligned} \omega_8 &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}}{\sqrt{6}} \\ \omega_1 &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Za obe je $I_3 = 0$ i $Y = 0$. Pokazuje se da u prirodi, to jest eksperimentima, vidimo njihove

linearne kombinacije ω (783 MeV) i ϕ (1020 MeV). ω i ϕ se mogu predstaviti kao

$$\begin{aligned}\omega &= \sin \theta \omega_8 + \cos \theta \omega_1 , \\ \phi &= \cos \theta \omega_8 - \sin \theta \omega_1 ,\end{aligned}\tag{2.7.18}$$

gde je θ ugao mešanja. Na osnovu eksperimenta je zaključeno da su

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} , \\ \phi &= s\bar{s} ,\end{aligned}\tag{2.7.19}$$

to jest da je eksperimentalna vrednostугла mešanja $\theta = 39^\circ$. Ovo mešanje čestica iz različitih multipleta ne bi bilo moguće kada bi $SU(3)$ bila egzaktna simetrija.

Gelman-Okubo masena formula

Razmotrimo detaljnije odsustvo degeneracije masa u multipletima $SU(3)$ grupe. Hamiltonijan jake interakcije se može prikazati kao suma dva sabirka, $H = H_0 + H'$. Dominantan deo hamiltonijana, H_0 je $SU(3)$ invarijantan. Drugi sabirak, H' odgovoran je za narušenje simetrije. On predstavlja malu korekciju i nije skalar $SU(3)$ grupe. Mase hadrona predstavljaju očekivane vrednosti hamiltonijana,

$$M = \langle I, I_3, Y | H | II_3, Y \rangle = \langle I, I_3, Y | H_0 | II_3, Y \rangle + \langle I, I_3, Y | H' | II_3, Y \rangle .\tag{2.7.20}$$

Vodeći član je $M_0 = \langle I, I_3, Y | H_0 | II_3, Y \rangle$. Sada je potrebno da odredimo korekciju mase. Možemo napraviti aproksimaciju da je degeneracija mase unutar izospinskih podmultipleta zanemarljiva. Prema tome, H' mora komutirati sa I_3 . Najjednostavnije je pretpostaviti da je korekcija H' proporcionalna operatoru hipernaboga. Međutim, to nije dovoljno, pa ćemo uključiti i kvadratne članove. To mogu biti kvadrat izospina, \mathbf{I}^2 i kvadrat hipernaboga, jer ovi operatori komutiraju sa I_3 . Dakle, masa bariona je odredjena sa

$$M = M_0 + bY + cI(I+1) + dY^2 ,\tag{2.7.21}$$

gde su b, c i d koeficijenti. Poredjenje sa eksperimentalnim rezultatima daje

$$d = -\frac{1}{4}c .$$

Tako konačno dolazimo do

$$M = M_0 + bY + c\left(I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right) .\tag{2.7.22}$$

Ovo je Gelman-Okubo (S. Okubo) masena formula. Ona važi za barionske multiplete. Lako se proverava da u barionskom oktetu važi

$$\frac{1}{2}(M_n + M_{\Xi}) = \frac{3}{4}M_\Lambda + \frac{1}{4}M_\Sigma .\tag{2.7.23}$$

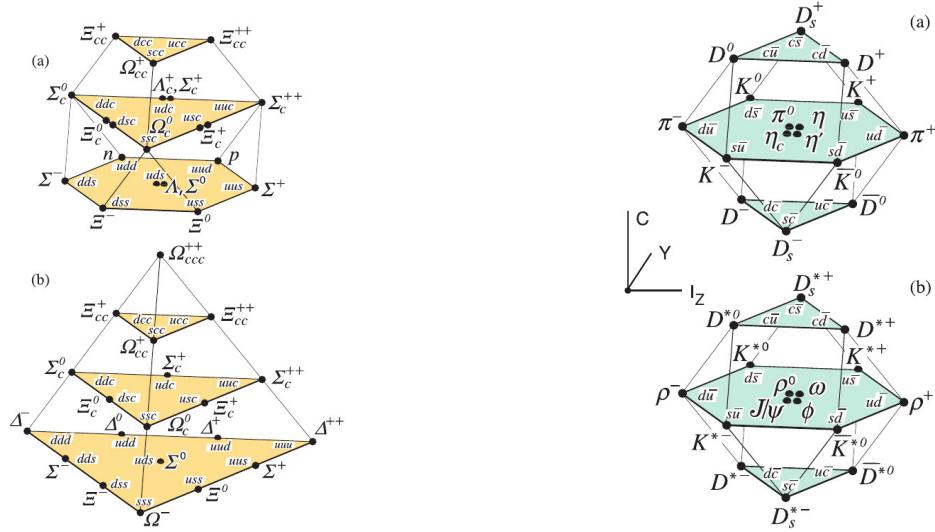
Za mezone važi analogna formula samo što umesto mase figuriše njen kvadrat.

2.8 Kvark model i $SU(6)$ grupa simetrije

Kvark model sa $SU(3)$ simetrijom je vrlo uspešno opisivao hadrone koji su otkriveni do 1960ih godina. Paralelno sa razvojem kvark modela, razvijao se i model elektro-slabe interakcije. Ovaj model je trebalo da kozistentno opiše slabu interakciju i o njemu ćemo govoriti u glavi 6. Jedno od predviđanja ovog modela, takozvani GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani) mehanizam, je postojanje četvrtog kvarka.

1974. godine otkrivena je nova čestica, J/ψ -mezon. Do ovog otkrića došle su nezavisno dve grupe, jedna u Fermilabu (Fermilab) pod rukovodstvom Rihtera (B. Richter), a druga u Brukhevenu u grupi pod rukovodstvom Tinga (S. Ting). Eksperiment Rihterove grupe se bazirao na rasejanju elektrona i pozitrona, dok je Tingova grupa otkrila ovaj mezon u suđarima protona sa berilijskom metom. Masa dobijene čestice je velika i iznosi 3100MeV, dok je njegova širina raspada mala, oko $\Gamma = 0,07\text{MeV}$. Dakle, radilo se o veoma uskoj rezonanci. Širina raspada drugih mezona grupisanih u $SU(3)$ multiplete je znatno veća od širine raspada J/ψ -mezona. Na primer, širina ρ mezona je 150MeV, dok je njegova masa oko 700MeV. Kako je J/ψ -mezon znatno veće mase od mase ρ -mezona, to bi njegova širina, zbog većeg faznog prostora, trebalo da bude znatno veća. Očekivalo se da bi ona trebala biti nekoliko stotina MeV. Kako to nije bio slučaj, jedino objašnjenje je bilo postojanje novog kvarka. Dakle, možemo zaključiti da je J/ψ -mezon vezano stanje novog kvarka i odgovarajućeg antikvarka.

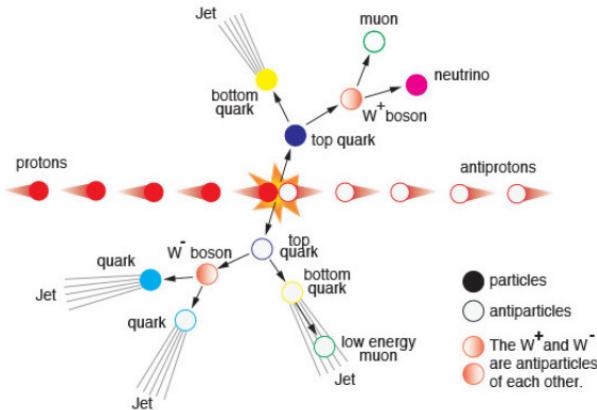
Novi, četvrti kvark, je poznat kao šarm ("charm"), c -kvark. Onda je $J/\psi \sim c\bar{c}$. Kvark c nosi novi kvantni broj: šarm, $C = +1$, pa se $SU(3)$ simetrija mora proširiti na $SU(4)$ simetriju. Rang $SU(4)$ grupe je tri, pa postoje tri aditivna kvantna broja: treća komponenta izospina I_3 , hipernaboj Y , i šarm C . Oni se održavaju u jakim interakcijama. Šarm c kvarka je $+1$, šarm c -antikvarka je -1 , dok je šarm kvarkova u, d i s jednak nuli. Težinski dijagrami bariona i mezona u okviru $SU(4)$ grupe su prikazani na slici 2.25.



Slika 2.25: Barioni i mezoni u $SU(4)$ modelu.

1977. godine Lederman (L. Lederman) je otkrio Υ -mezon u sudarima protona sa metom od platine. Masa ove čestice je 9460MeV , a širina raspada $\Gamma = 0,0053\text{MeV}$. Kao i kod J/Ψ -mezona, Υ -mezon ima znatno manju širinu nego što bi se očekivalo u okviru $SU(4)$ simetrije. Zato je potrebno grupu simetrije proširiti, to jest uvesti novi kvark. Υ -mezon se sastoji od b kvarka i \bar{b} antikvarka. Slovo b potiče od reči "bottom" (donji) ili "beauty" (lepota). Novi aditivni kvantni broj, koji odgovara novom b kvarku obeležili smo sa \mathcal{B} . Tako b kvark ima $\mathcal{B} = -1$, \bar{b} antikvark ima $\mathcal{B} = +1$, dok ostali kvarkovi imaju $\mathcal{B} = 0$. Grupa simetrije je proširena na $SU(5)$ simetriju. Rang $SU(5)$ grupe je 4, pa su njeni težinski dijagrami četvorodimenzionalni i ne možemo ih prikazati na slici.

Iz razloga simetrije sa leptonima¹⁷ morao je postojati i šesti kvark, t kvark, "top" (gornji) ili "true" (istina) kvark. Ovaj kvark je otkriven 1995. godine u Fermilabu na Tevatron akceleratorskom kompleksu u sudarima protona i antiprotona. Masa t kvarka je mnogo veća od mase ostalih kvarkova i iznosi oko 173GeV . Za razliku od ostalih kvarkova, t kvark ne gradi vezana stanja, već se odmah po kreaciji raspada slabom interakcijom na b kvark i W^+ bozon. b kvark se dalje raspada na lakše kvarkove, koji hadronizuju i formiraju džetove (malzove, "jets") hadrona. Nastanak i raspadi t kvarka na Tevatronu su prikazani na slici 2.26.



Slika 2.26: Otkriće t kvarka na Tevatronu.

Konačno, vidimo da je ukupna grupa simetrije vezana za vrste kvarkova $SU(6)$ simetrija. Ova simetrija se naziva flejvorna simetrija¹⁸ kvarkova. Dakle, postoji šest kvarkova. Kvarkovi su grupisani u tri generacije

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.8.1)$$

Kvarkovi se nalaze u prvoj fundamentalnoj, šetodimenzionalnoj, reprezentaciji $SU(6)$ grupe. Gelman-Nišudžima formula za nanelektrisanje (2.4.6) se generalizuje na sledeći način:

$$Q = I_3 + \frac{B + S + C + \mathcal{B}}{2}, \quad (2.8.2)$$

¹⁷Setimo se da je τ lepton otkriven 1977. godine, a njegov neutrino 2000. godine.

¹⁸"Flavour" na engleskom znači vrsta, tip.

gde su C i \mathcal{B} novi kvantni brojevi pored I_3 i S . Kvantni broj t kvarka, T , nismo dodali u ovu formulu, jer t kvark ne gradi vezana stanja, pa ne postoje čestice na koje bi se ova formula, sa dodatim kvantnim brojem t kvarka, mogla primeniti.

Kvantni brojevi kvarkova su dati u tabeli 2.7.

čestica	$m [GeV]$	spin	Q	B	I	I_3	S	C	\mathcal{B}	T
u	~ 0.3	$1/2$	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	0	0
d	~ 0.3	$1/2$	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0
s	~ 0.5	$1/2$	$-1/3$	$1/3$	0	0	-1	0	0	0
c	~ 1.5	$1/2$	$2/3$	$1/3$	0	0	0	1	0	0
b	~ 5.0	$1/2$	$-1/3$	$1/3$	0	0	0	0	-1	0
t	~ 170	$1/2$	$2/3$	$1/3$	0	0	0	0	0	1

Tabela 2.7: Kvantni brojevi kvarkova.

Kao što smo ranije rekli, ne postoje slobodni kvarkovi. Zbog prirode jake interakcije, kvarkovi su zarobljeni unutar hadrona. Ova pojava se naziva zarobljenost ili konfajnment ("confinement") kvarkova. Navešćemo dva indirektna dokaza za postojanje kvarkova:

1. Rasejanja $\ell N \rightarrow \ell' + \times$.

Posmatramo rasejanje lakih leptona (elektrona najčešće) na protonu (neutronu). Ovaj tip eksperimenta je sličan Raderfordovom (E. Rutherford) eksperimentu za otkriće jezgra. U rasejanjima elektrona energija oko 10GeV na protonima i neutronima, vide se tri centra rasejanja, što ukazuje na to da se protoni (neutroni) sastoje od tri čestice.

Takodje, poznato je da su magnetni dipolni momenti protona i neutrona $\mu_p = 2.79\mu_N$ i $\mu_n = -1.91\mu_N$, gde je nuklearni magneton $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$. Kada bi proton i neutron zaista bili elementarne čestice, njihovi magnetni dipolni momenti bi bili $\mu_p = \mu_N$ i $\mu_n = 0$. Odstupanje od ovih vrednosti ukazuje na postojanje podstrukture protona i neutrona.

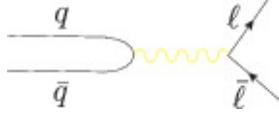
2. Posmatrajmo raspad vektorskog mezona u lepton-antilepton par

$$V^0 \rightarrow l\bar{l}, \quad l \in (e, \mu).$$

Proces se odvija preko elektromagnetne interakcije, pa je širina raspada proporcionalna kvadratu nadelektrisanja e_q^2

$$\Gamma(V^0 \rightarrow l\bar{l}) \sim e_q^2.$$

Ovo se lako vidi iz Fajnmanovog dijagrama datog na slici 2.27.

Slika 2.27: Raspad vektorskog mezona u $l\bar{l}$.

U sledećoj tabeli date su talasne funkcije tri vektorska mezona kao i vrednost e_q^2 za svaki od njih:

$$\begin{aligned}\rho^0 &= \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} & e_q^2 = \left[\frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \\ \omega^0 &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} & e_q^2 = \left[\frac{\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{18} \\ \phi &= s\bar{s} & e_q^2 = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Lako se vidi da je odnos širina raspada

$$\Gamma(\rho^0 \rightarrow \ell\bar{\ell}) : \Gamma(\omega^0 \rightarrow \ell\bar{\ell}) : \Gamma(\phi \rightarrow \ell\bar{\ell}) = 9 : 1 : 2,$$

što je u skladu sa eksperimentalnim rezultatom.

2.9 Boja kao novi kvantni broj

$SU(3)$ kvark model koji su formulisali Gelman i Zvajg nije bio opšte prihvaćen u prvo vreme. Osnovni prigovori kvark modelu su bili to što u prirodi nema slobodnih kvarkova, kao i necelobrojna nanelektrisanja kvarkova. Ipak, postojao je još jedan problem, koji ćemo sada izložiti.

Δ^{++} barion je vezano stanje tri u kvarka i nalazi se u barionskom dekupletu. To znači da ima spin $3/2$, pa može postojati u stanju sa $s_z = +3/2$. Ovo stanje je simetrično po spinu. Na osnovu položaja u dekupletu, vidimo da mu je treća komponenta izospina $+3/2$, pa je talasna funkcija po izospinu takodje simetrična. U osnovnom stanju orbitalni moment ove čestice je $l = 0$, pa je talasna funkcija po ovom delu totalno simetrična. Možemo zaključiti da je totalna talasna funkcija tri u kvarka u čestici Δ^{++} totalno simetrična funkcija. Kako Δ^{++} ima spin $3/2$ i fermion je, ovim bi bio narušen Paulijev princip. Jedan način da se ovo izbegne je da se uvede novi stepen slobode (kvantni broj) za kvarkove i da se zahteva da u odnosu na taj kvantni broj, talasna funkcija Δ^{++} čestice bude antisimetrična.

1964. godine Grenberg (O.W. Greenberg) je predložio da se uvede novi kvantni broj za kvarkove i da se nazove boja ("colour"). Po njegovom modelu, svaki kvark može biti u tri boje, preciznije, svaki kvark je triplet $SU(3)_c$ grupe.

flavour	colour		
u	u_R	u_G	u_B
d	d_R	d_G	d_B
s	s_R	s_G	s_B
c	c_R	c_G	c_B
t	t_R	t_G	t_B
b	b_R	b_G	b_B

Tabela 2.8: Boje kvarkova.

$SU(3)_c$ grupa se naziva je $SU(3)$ kolorna grupa i nema nikakve veze sa $SU(3)$ simetrijom vezanom za tip kvarka ($SU(3)$ flavour). Problem sa narušenjem Paulijevog principa kod Δ^{++} bariona je rešen tako što je pretpostavljeno da su svi hadroni su $SU(3)_c$ singleti, to jest da im je talasna funkcija po boji totalno antisimetrična. Kolorna talasna funkcija vezanog stanja tri up kvarka u Δ^{++} rezonanci je

$$\Psi_{\Delta,c} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} u_\alpha u_\beta u_\gamma = u_R u_G u_B - u_G u_R u_B - u_R u_B u_G + u_B u_R u_G - u_B u_G u_R + u_G u_B u_R ,$$

pa je totalna talasna funkcija antisimetrična i u skladu sa Paulijevim principom. Talasna funkcija mezona je takodje singlet $SU(3)_c$ grupe

$$\Psi_{\text{mezoni},c} = q_R \bar{q}_R + q_B \bar{q}_B + q_G \bar{q}_G .$$

Novi kvantni broj nije bio dobro prihvaćen na početku. Ipak, eksperimenti su pokazali da ovaj kvantni broj zaista mora da postoji. Videćemo u glavi 7, da je boja zapravo naboј za jaku interakciju i da ovaj kvantni broj poseduju kako kvarkovi, tako i gluoni, koji su prenosioci jake interakcije.

Eksperiment koji potvrđuje postojanje boje je rasejanje elektrona i pozitrona u hadrone ili u mion i antimion. Oba procesa su elektromagnetska, pa je efikasne preseke relativno jednostavno izračunati. Na primer, efikasni presek za rasejanje $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$ je dat sa

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}) \sim \frac{1}{p^4} \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{p^2}} \sim \frac{1}{s^5} = \frac{1}{E^{\frac{5}{2}}} ,$$

gde je p ukupni četvoroimpuls pozitrona i elektrona. Sličnog oblika je i efikasni presek za rasejanje $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Odnos ova dva efikasna preseka definiše R faktor

$$R = \frac{\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{hadroni})}{\sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+)} = \sum_{\text{tip.kvark.}} e_q^2 . \quad (2.9.3)$$

Mase prva tri kvarka¹⁹ su

$$m_u = m_d \simeq 300 \text{ MeV}, \quad m_s \sim 600 \text{ MeV}, \quad m_c \sim 1600 \text{ MeV} .$$

Rezultati eksperimenta pokazuju sledeće:

¹⁹Ovo su mase kvarkova kao konstituenata hadrona, to nisu mase slobodnih kvarkova, koje bismo stavili u lagranžijan. Masa protona je oko 900 MeV pa je masa u i d kvarka oko 300 MeV .

Slika 2.28: Rasejanje $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$.

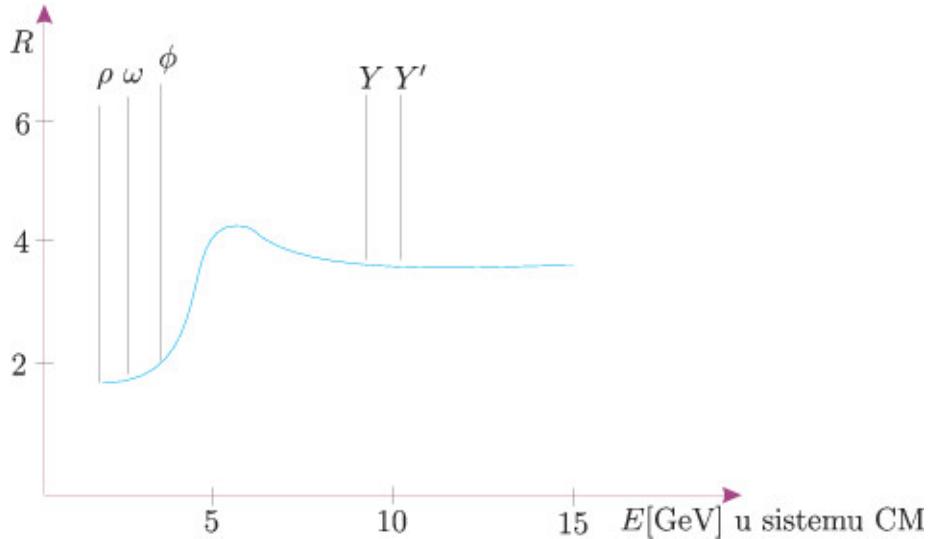
1. Za energije elektrona i pozitrona u sistemu centra mase koje su ispod $2m_c = 3000\text{GeV}$, u izrazu (2.9.3) sumiramo po u , d i s kvarku:

$$R = 3 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 .$$

2. Ukoliko je energija takva da se mogu kreirati u , d , s i c kvarkovi, to jest $E < 10000\text{GeV}$, onda je

$$R = 3(e_u^2 + \dots + e_c^2) = \frac{10}{3} .$$

Obe sume smo množili brojem 3, zbog boje kvarkova. Gornji rezultati za R su u saglasnosti sa eksperimentalnim rezultatom koji je prikazan na slici 2.29.

Slika 2.29: R -faktor za elektron-pozitron rasejanje.

2.10 Parnost i C-parnost mezona

Videli smo da su mezoni vezana stanja kvarka i antikvarka. Spin kvarkova je $1/2$, pa spin mezona može biti 0 ili 1 . Ukupni spin kvarka i antikvarka je $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Projekcija spina kompozitnog sistema je $m_s = m_1 + m_2$, gde su projekcije spina na z -osu kvarka i

antikvarka m_1 , odnosno m_2 . Spinska talasna funkcija mezona je $\chi_{m_s}^s(m_1, m_2)$. Da bismo odredili ukupni ugaoni moment mezona moramo spin \mathbf{s} sabrati sa relativnim orbitalnim ugaonim momentom stanja kvark-antikvark **I**. Ukupni angularni moment mezona je

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \quad (2.10.1)$$

i on je zapravo spin mezona. Svojstvene vrednosti operatora \mathbf{J}^2 daju spin mezona. Stanje mezona je $|\text{mezon}, J, l, s\rangle$, gde su: J ukupni ugaoni moment, l orbitalni ugaoni moment i s spinski ugaoni moment. Stanje mezona u sistemu centra mase je proizvod funkcija u orbitalnom, spiskom i kolornom sektoru:

$$|\text{mezon}, J, l, s\rangle = \sum_{m_1, m_2} \int d^3 p Y_{l, m_1}(\hat{\mathbf{p}}) \phi(|\mathbf{p}|) \chi_{m_s}^s(m_1, m_2) \langle J, l, s | m_l m_s \rangle \\ \delta_{ab} |q_a(\mathbf{p}, m_1)\rangle \otimes |\bar{q}_b(-\mathbf{p}, m_2)\rangle. \quad (2.10.2)$$

Sferni harmonik, $Y_{l, m_1}(\hat{\mathbf{p}})$ potiče od orbitalnog dela. Faktor $\phi(|\mathbf{p}|)$ označava radijalni deo talasne funkcije u impulsnom prostoru. U izrazu (2.10.2) prisutni su i CG koeficijenti, $\langle J, l, s | m_l m_s \rangle$. Poslednji član u (2.10.2) je proizvod kolornih stanja kvarka i antikvarka, gde su a i b kolorni indeksi.

Pri transformaciji parnosti impuls menja znak, što je ekvivalentno smeni $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ u izrazu (2.10.2). To dovodi do pojave faktora $(-1)^l$ koji potiče od sfernih harmonika. Kvark-antikvark vezano stanje imaju unutrašnju parnost -1 , pa je parnost mezona

$$\mathcal{P} |\text{mezon}, J, l, s\rangle = -(-1)^l |\text{mezon}, J, l, s\rangle. \quad (2.10.3)$$

π mezoni, K mezoni, kao i η mezon imaju $l = 0$ i $s = 0$, pa time i $j = 0$. Zbog toga je parnost čestica u ovom skalarnom mezonskom oktetu -1 . On se zato naziva pseudoskalarni oktet. Spin vektorskog multipleta je 1, dok je orbitalni ugaoni moment 0, pa je ukupni ugaoni moment vektorskih mezona 1. Dakle, spin vektorskih mezona je 1, pa je njihova parnost je -1 .

Konjugacija naboja transformiše kvark u antikvark i obrnuto. Analizom stanja mezona dobija se da je C parnost mezona $(-1)^{l+s}$. C parnost pseudoskalarnog multipleta je $+1$, a vektorskog -1 . Multipleti se označavaju sa J^{PC} , pa je pseudoskalarni multiplet 0^{-+} , a pseudovektorski 1^{--} .

Na osnovu ove analize možemo lako da objasnimo zašto se π^0 mezon raspada na dva, a ne na tri fotona. C -parnost π^0 mezona je $+1$, a kako foton ima C -parnost -1 to se zbog očuvanaj C parnosti u elektromagnetskim interakcijama pion raspada na dva a ne na tri fotona.

Analiza barionskog multipleta je komplikovanija i mi nećemo ulaziti u nju. Recimo na kraju da barioni u $1/2$ i $3/2$ multipletima imaju parnost $+1$.

Zadaci

2.1. Elektron u atomu vodonika se nalazi u orbitnom stanju $|2, -1\rangle$ i spiskom stanju $|1/2, 1/2\rangle$. Koje vrednosti će se dobiti kada se meri J^2 elektrona i sa kojom verovatnoćom?

2.2. Ako je \vec{V} vektorski operator²⁰ pokazati da su

$$T_1^{(1)} = -\frac{V_x + iV_y}{\sqrt{2}}, \quad T_0^{(1)} = V_z, \quad T_{-1}^{(1)} = \frac{V_x - iV_y}{\sqrt{2}}$$

ireducibilni vektorski operatori.

2.3. Koristeći operatore I_{\pm} , odrediti CG koeficijente u razlaganju direktnog proizvoda ireducibilnih reprezentacija $I = 1/2$ i $I = 1$. Uporediti dobijene rezultate sa tabličnim vrednostima za CG koeficijente.

2.4. Koristeći rezultate zadatka 2.3 odrediti:

- a) odnos širina raspada $\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0$ i $\Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$.
- b) odnos efikasnih preseka za rasejanja:

$$\begin{aligned} p + \pi^+ &\rightarrow p + \pi^+, \\ p + \pi^- &\rightarrow p + \pi^- \\ p + \pi^- &\rightarrow n + \pi^0. \end{aligned}$$

- c) odnos efikasnih preseka za rasejanja

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow d + \pi^+, \\ p + n &\rightarrow d + \pi^0, \end{aligned}$$

gde je d oznaka za deuterijum, koji je izospinski singlet.

2.5. Naći strukturne konstante f_c^{ab} i Kartanov tenzor za $SU(3)$ grupu.

2.6. Pokazati da je $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \psi^{i_1 i_2 \dots i_n}$ skalar.

2.7. Koristeći Jangove šeme, razložiti sledeće direktne proizvode ireducibilnih reprezentacija na direktne zbirove. Rezultate proveriti računajući dimenzije reprezentacija:

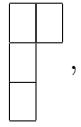
a) $SU(3)$:  \otimes 

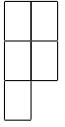
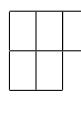
b) $SU(4)$:  \otimes 

c) $SU(4)$:  \otimes 

²⁰Pri rotacijama se transformiše na sledeći način

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{V} \times \epsilon \vec{n}.$$

d) $SU(5)$:  \otimes 

e) $SU(5)$:  \otimes 

2.8. a) Razložiti $SU(3)$ oktet i dekuplet na izospinske podmultiplete (multiplete $SU(2)$ grupe).

b) Razložiti sledeće reprezentacije $SU(4)$ grupe na multiplete $SU(3)$ grupe:


i


2.9. Pokazati da se \bar{u}^i i $\epsilon^{ijk} u_j u_k$ transformišu na isti način pri $SU(3)$ transformacijama.

2.10. a) Koristeći Jangove šeme u okviru $SU(3)$ "flavor" grupe simetrije, nacrtati težinske dijagrame za 3, 3^* , 8 i 10 dimenzione reprezentacije.

b) Koristeći se ovim rezultatom, odrediti $SU(3)$ talasne funkcije okteta pseudoskalarnih mezona i barionskog dekupleta.

2.11. Na osnovu kvantnih brojeva kvarkova, odrediti kvark strukturu sledećih čestica: Δ^{++} , π^0 , $\bar{\kappa}^0$, Σ^{*+} , Ω^- , Λ^0 , Ξ^- , Σ^0 , κ^- , p .

2.12. U kojim reprezentacijama se nalaze barioni i mezoni u okviru $SU(5)$ kvark modela?

2.13. Odrediti u kojim reprezentacijama se nalaze barioni i mezoni u okviru $SU(4)$ kvark modela. Koristeći dobijeni rezultat, proveriti da li se u sudaru bariona iz 20-dimenzione reprezentacije i mezona iz 15-dimezionate reprezentacije, mogu dobiti barion iz 20^* -dimenziione reprezentacije, ili mezon iz 15-dimezionate reprezentacije.

2.14. Da li su mogući sledeći procesi? Preko kojih interakcija se odvijaju?

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0, \\ \mu^- &\rightarrow e^+ + \nu_e + \nu_\tau, \\ \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + \tau^- + \bar{\nu}_\tau, \\ \Delta^+ &\rightarrow n + p, \\ \Omega^- &\rightarrow \Xi^0 + \pi^-, \\ \pi^0 + p &\rightarrow K^+ + K^0 + n, \\ \pi^0 + n &\rightarrow K^+ + K^-, \\ K^- + p &\rightarrow \pi^0 + \Lambda^0, \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \gamma, \\ \Sigma^+ + p &\rightarrow K^+ + p. \end{aligned}$$

2.15. Na osnovu zakona održanja dopuniti sledeće procese:

$$\begin{aligned}\pi^- &\longrightarrow ? + \bar{\nu}_\mu, \\ \tau^- &\longrightarrow e^- + ? + ?, \\ e^- + p^+ &\longrightarrow \nu_e + ?, \\ \Delta^- &\longrightarrow n + ?, \\ \Sigma^- + ? &\longrightarrow \Lambda^0 + n.\end{aligned}$$

Glava 3

Klasična teorija polja

Ova glava posvećena je klasičnim poljima. Na kursu Elektrodinamike već ste se susreli sa elektromagnetnim poljem. Polja možemo shvatiti kao generalizaciju diskretnih mehaničkih sistema na sisteme sa beskonačno puno stepeni slobode. Na početku ove glave ćemo primenom Hamiltonovog principa minimalnog dejstva izvesti jednačine kretanja polja. Zatim ćemo diskutovati vezu izmedju simetrija i očuvanih veličina i formulisati Neterinu teoremu.

Ova glava se dosta poklapa sa prvom glavom u [12].

3.1 Ojler-Lagranževe jednačine kretanja

3.1.1 Mehanički sistemi

U klasičnoj mehanici stanje sistema je jednoznačno određeno generalisanim koordinatama: q_1, \dots, q_n . Centralna veličina u analitičkoj mehanici koja sadrži svu informaciju o sistemu je lagranžijan. On je funkcija generalisanih koordinata i generalisanih brzina, $L = L(q, \dot{q}, t)$. Sa q odnosno \dot{q} smo obeležili sve generalisane koordinata, odnosno brzine. Lagranžijan idealnih sistema sa potencijalnim silama je razlika kinetičke i potencijalne energije, $L = T - U$.

Dejstvo je vremenski integral lagranžijana:

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt . \quad (3.1.1)$$

Sa t_i i t_f obeležili smo početni i krajnji trenutak. Sa matematičke tačke gledišta dejstvo je funkcional, jer trajektorije preslikava u realne brojeve. Trajektorija po kojoj se sistem kreće od početne konfiguracije $(q_1^{(i)}, \dots, q_n^{(i)})$ do finalne $(q_1^{(f)}, \dots, q_n^{(f)})$ u konfiguracionom prostoru odredjena je Hamiltonovim principom najmanjeg dejstva¹. Po ovom principu

¹Neka je $F[f(x)]$ funkcional koji funkcije $f(x)$ preslikava u brojeve. Funkcionalni izvod $\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$ je definisan sa

$$\delta F = \int dy \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) .$$

trajektorija po kojoj se sistem kreće je ona za koju je dejstvo stacionarno, tj. za koju je

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0 , i = 1, \dots, n . \quad (3.1.2)$$

Podrazumeva se da su varijacije generalisanih koordinata u početnom i krajnjem trenutku jednakе nuli. Na kursu analitičke mehanike pokazano je da uslov stacionarnosti dejstva daje Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , i = 1, \dots, n . \quad (3.1.3)$$

Dakle, Hamiltonov princip daje jednačine kretanja sistema.

3.1.2 Klasična polja

Gornja analiza se lako generalizuje na teoriju polja. Polja su funkcije prostorno-vremenskih koordinata $\phi_r = \phi_r(t, \mathbf{x})$. Indeks $r = 1, \dots, N$ je diskretan i on prebrojava polja. U klasičnoj teoriji polja, generalisane koordinate zamenjujemo poljima:

$$q_i(t) \rightarrow \phi_{r\mathbf{x}}(t) = \phi_r(x) . \quad (3.1.4)$$

Iz prethodnog izraza vidimo da su polja fizički sistemi sa beskonačno puno stepeni slobode, jer je $\mathbf{x} \in V \subset \mathbb{R}^3$.

Relativistička polja poseduju odredjena transformaciona svojstva pri Lorencovim transformacijama. Koordinate x^μ se pri Lorencovim transformacijama transformišu kao (1.1.2). U glavi 1 smo pokazali da se klasična (i kvantna) polja transformišu po reprezentacijama Lorencove grupe, videti (1.1.35).

Pri Poenkareovim transformacijama skalarno, Dirakovo i vektorsko polje se transformišu na sledeći način

$$\begin{aligned} \phi'(x' = \Lambda x + a) &= \phi(x) , \\ A'^\mu(x' = \Lambda x + a) &= \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) , \\ \psi'(x' = \Lambda x + a) &= e^{-i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4} \psi(x) , \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

respektivno.

Transformacije možemo interpretirati kao aktivne i kao pasivne. Aktivne transformacije deluju na fizički sistem transformišući ga, dok je pri tome koordinatni sistem fiksiran. Nasuprot tome, kod pasivne transformacije fizički sistem je fiksiran, a transformacija deluje na koordinatni sistem. Aktivna i pasivna transformacija su ekvivalentne.

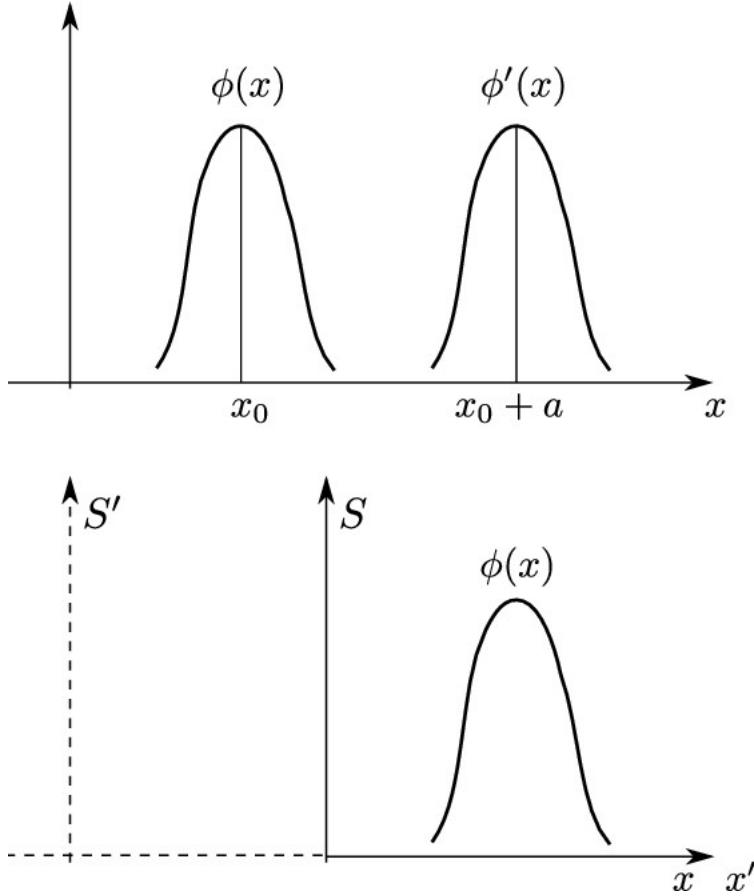
Ako skalarno polje $\phi(x)$ transliramo za a duž x -ose (prva slika u 3.1) dobićemo novu funkciju $\phi'(x)$ datu sa

$$\phi'(x) = \phi(x - a) , \quad (3.1.6)$$

odnosno

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x).$$

Translacija je delovala aktivno; koordinatni sistem je fiksiran, a polje smo transformisali. Transliranje skalarnog polja udesno u fiksnom koordinatnom sistemu ekvivalentno je transliranju koordinatnog sistema uлево za a , dok je polje fiksirano. U ovom, drugom slučaju kažemo da transformacija deluje pasivno. Na drugoj slici u 3.1 prikazana je pasivna translacija. Sa $\phi'(x')$ smo obeležili novo polje u novom koordinatnom sistemu. Ono je



Slika 3.1: Aktivna i pasivna interpretacija translacije.

dato sa

$$\phi'(x' = x + a) = \phi(x).$$

3.1.3 Ojler–Lagranževe jednačine kretanja

U teoriji polja dejstvo je oblika

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L},$$

gde je lagranžian

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}.$$

Oblast prostora V može biti konačan deo prostora ili ceo \mathbb{R}^3 prostor. Veličina \mathcal{L} je gustina lagranžijana. Gustina lagranžijana je funkcija polja i izvoda polja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) . \quad (3.1.7)$$

Pošto želimo da konstruišemo teoriju koja je relativistički kovariantna dejstvo mora biti Lorensov skalar. Kako je mera d^4x skalar, to zaključujemo da gustina lagranžijana mora biti skalar.

Jednačine kretanja za polja se dobijaju iz Hamiltonovog principa. Pri varijacijama polja

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) , \quad (3.1.8)$$

infinitezimalna promena dejstva (tj. varijacija dejstva) je

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left(\mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu \phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)) \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta(\partial_\mu \phi_r) \right) . \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Jasno je da je $\delta(\partial_\mu \phi_r(x)) = \partial_\mu \delta\phi_r(x)$. Primenom poslednje formule i parcijalne integracije u drugom članu dolazimo do

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \delta\phi_r \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \right) \delta\phi_r + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r d\Sigma_\mu . \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

U poslednjem koraku primenili smo parcijalnu integraciju. Površinski član je jednak nuli, jer su varijacije polja na granici oblasti integracije jednake nuli. Kao rezultat dobijamo

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \right) \delta\phi_r . \quad (3.1.11)$$

Po Hamiltonovom principu, jednačine kretanja se dobijaju iz uslova ekstremalnosti dejstva, $\delta S = 0$. Pošto su polja $\phi_r(x)$ nezavisna to dobijamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) = 0 . \quad (3.1.12)$$

Ovo su Ojler-Lagranževe jednačine za polje ϕ_r .

Lagranžian nije jednoznačno određen. Lagranžianu možemo da dodamo divergenciju neke funkcije polja

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu(\phi_r) . \quad (3.1.13)$$

Ovo je pokazano u zadatku 5.4 u [11].

3.1.4 Primeri

Sad ćemo navesti nekoliko primera u kojima ćemo naći jednačine kretanja. Gustina lagranžijana za slobodno skalarno polje je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (3.1.14)$$

Da bismo odredili jednačine kretanja, trebaju nam sledeći parcijalni izvodi:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi . \quad (3.1.15)$$

Jednačina kretanja je Klajn-Gordonova jednačina

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (3.1.16)$$

Od dva realna skalarna polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ možemo konstruisati kompleksna skalarna polja ϕ , ϕ^\dagger sa

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} . \quad (3.1.17)$$

Gustina lagranžijana u ovom slučaju je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) . \quad (3.1.18)$$

Uvodjenjem kompleksnih polja gustina lagranžijana (3.1.18) postaje

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi . \quad (3.1.19)$$

U (3.1.19) kompleksna polja ϕ i ϕ^\dagger su nezavisna. Jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} &(\square + m^2)\phi = 0 \\ &(\square + m^2)\phi^\dagger = 0 . \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

I za realna, kao i za kompleksna polja parametar m je masa polja.

Gustina lagranžijana (3.1.14) opisuje slobodno skalarno polje. Lagranžijan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (3.1.21)$$

je primer interakcione teorije, tzv. ϕ^4 teorije. Poslednji član u lagranžijanu opisuje interakciju polja samog sa sobom. Konstanta λ je konstanta interakcije.

Dirakovo polje opisuje čestice spina $s = 1/2$. Gustina Lagranžijana slobodnog Dirakovog polja je

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi . \quad (3.1.22)$$

ψ i $\bar{\psi}$ su nezavisna polja pa dobijamo dve jednačine kretanja

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 \\ i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Dobili smo Dirakove jednačine za polja ψ i $\bar{\psi}$.

Lagranžian slobodnog vektorskog masenog polja je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad (3.1.24)$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Variranjem ovog dejstva dobija se Prokina jednačina

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (3.1.25)$$

Lagranžian elektromagnetcog polja

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (3.1.26)$$

gde je j^μ četvorovektor gustine struje. Poslednji član je interakcioni član.

Da bismo napisali jednačine kretanja za potencijal A_μ , moramo prvo odrediti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta \quad (3.1.27)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \\ &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}) \\ &= -F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

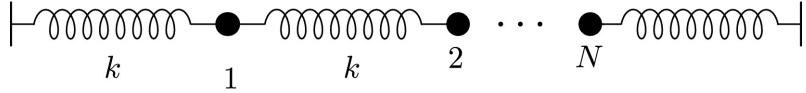
Jednačine kretanja su Maksvelove jednačine za elektromagnetno polje u vakuumu i glase

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta, \quad (3.1.28)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu \\ \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu &= j^\nu. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Sledeći primer je polje koje nije relativističko. Neka je n malih kuglica masa m vezano oprugama konstanti elastičnosti k i nominalne dužine l , kao na slici 3.2. Rastojanje izmedju



Slika 3.2: Lanac tačkastih masa

susednih kuglica je l . Razmotrimo longitudinalne oscilacije ovog sistema. Neka je ξ_i odstupanje, tj. elongacija i -te kuglice od ravnotežnog položaja. Lagranžijan sistema je

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l \left(\frac{m}{l} \dot{\xi}_i^2 - kl \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{l} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Uzmimo sada da rastojanje izmedju kuglica l teži nuli, ali tako da je veličina $m/l = \mu$ konstantna. Ova veličina je masa jedinice dužine žice. U ovom limesu, diskretni stepeni slobode $\xi_i(t)$ postaju polje $\xi = \xi(t, x)$. Suma prelazi u integral po promenljivoj x . Lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2} \int_0^d dx \left(\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (3.1.31)$$

gde je $Y = kl$ modul elastičnosti. Lagranževa jednačina kretanja je

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0,$$

gde smo tačkom i primom obeležili izvod po vremenu, odnosno po koordinati x . Lako se dobija da je jednačina kretanja

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1.32)$$

Jednačina kretanja je talasna jednačina, iz koje možemo pročitati faznu brzinu longitudinalnih talasa u žici:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}. \quad (3.1.33)$$

3.1.5 Hamiltonova formulacija

Hamiltonova formulacija teorije polja je generalizacija Hamiltonove formulacije za mehaničke sisteme na teoriju polja. Podsetimo se prvo Hamiltonove formulacije u analitičkoj mehanici.

Generalisani impulsi su definisani kao

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.1.34)$$

Da bi se ove jednačine rešile po generalisanim brzinama potrebno je da

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0 . \quad (3.1.35)$$

Hamiltonian je Ležandrova transformacija lagranžijana definisan kao

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) . \quad (3.1.36)$$

Hamiltonian je funkcija generalisanih koordinata i impulsa. Hamiltonove jednačine se dobijaju iz Hamiltonovog principa, pri čemu se lagranžian izražava preko hamiltonijana. Iz

$$\delta \int dt \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right] = 0 , \quad (3.1.37)$$

dobijaju se Hamiltonove jednačine:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} , \quad (3.1.38)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} . \quad (3.1.39)$$

Poasonova zagrada definisana je sa

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) . \quad (3.1.40)$$

Recimo na kraju da je Poasonova zagrada antisimetrična i da zadovoljava Jakobijev identitet.

Prelazak na teoriju polja je pravolinijski. Generalisani impulsi su izvodi gustine lagranžijana po $\dot{\phi}_r$, tj.²

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} . \quad (3.1.41)$$

Kao i u analitičkoj mehanici, hamiltonian je Ležandrova transformacija lagranžijana. On zavisi od generalisanih impulsa i polja i definisan je kao

$$H = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \right] . \quad (3.1.42)$$

Veličina

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \quad (3.1.43)$$

²Tačkom smo obeležili parcijalni izvod po vremenu, tj. $\dot{\phi} = \partial_0 \phi$.

je gustina hamiltonijana. Lako se vidi da je gustina hamiltonijana realnog slobodnog skalarne polja data sa

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (3.1.44)$$

Da bismo našli Hamiltonove jednačine kretanja varirajući dejstvo

$$S_H = \int dt \int d^3x \left(\sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{H} \right) ,$$

u kome je lagranžijan izražen preko hamiltonijana. Variracija fazne trajektorije podrazumeva

$$\begin{aligned} \phi_r(x) &\rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) , \\ \pi_r(x) &\rightarrow \pi_r(x) + \delta\pi_r(x) , \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

gde su varijacije polja i generalisanih impulsa nezavisne. Jedino se zahteva da je varijacija polja na granici oblasti integracije jednaka nuli. Varijacija dejstva je

$$\delta S_H = \int dt \int d^3x \left[\delta\pi_r \dot{\phi}_r + \pi_r \delta\dot{\phi}_r - \frac{\delta H}{\delta\phi_r} \delta\phi_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r} \delta\pi_r \right] . \quad (3.1.46)$$

Drugi sabirak u podintegralnoj funkciji u poslednjem izrazu napisaćemo kao

$$\pi_r \delta\dot{\phi}_r = \frac{\partial}{\partial t} (\pi_r \delta\phi_r) - \dot{\pi}_r \delta\phi_r ,$$

pa je

$$\delta S_H = \int d^4x \left[\left(\dot{\phi}_r - \frac{\delta H}{\delta\pi_r} \right) \delta\pi_r - \left(\dot{\pi}_r \delta\phi_r + \frac{\delta H}{\delta\phi_r} \delta\phi_r \right) \right] . \quad (3.1.47)$$

Odavde, na osnovu Hamiltonovog principa, dobijamo Hamiltonove jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi_r}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta\phi_r} , \\ \frac{\partial\phi_r}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\pi_r} . \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

Nadjimo Hamiltonove jednačine za slobodno skalarne polje. Prvo imamo

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{x}, t)} = \int d^3y \pi(\mathbf{y}, t) \frac{\delta\pi(\mathbf{y}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}, t)} = \pi(\mathbf{x}, t) , \quad (3.1.49)$$

i slično

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{x}, t)} &= \int d^3y \left(\partial_i \phi(\mathbf{y}, t) \partial_i^y \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + m^2 \phi(\mathbf{y}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &= -\Delta\phi(\mathbf{x}) + m^2\phi(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

Hamiltonove jednačine za slobodno skalarno polje su:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial t} &= \Delta\phi - m^2\phi, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \pi.\end{aligned}\quad (3.1.51)$$

Kombinovanjem ovih jednačina dobijamo Klajn-Gordonovu jednačinu.

Neka su F i G funkcije faznih promenljivih. Njihova (istovremena) Poasaonova zagrada je definisana sa

$$\{F(t, \mathbf{x}), G(t, \mathbf{y})\} = \int d^3z \left(\frac{\delta F(t, \mathbf{x})}{\delta \phi_r(t, \mathbf{z})} \frac{\delta G(t, \mathbf{y})}{\delta \pi_r(t, \mathbf{z})} - \frac{\delta F(t, \mathbf{x})}{\delta \pi_r(t, \mathbf{z})} \frac{\delta G(t, \mathbf{y})}{\delta \phi_r(t, \mathbf{z})} \right). \quad (3.1.52)$$

Lako se vidi da je

$$\{\phi_r(t, \mathbf{x}), \pi_s(t, \mathbf{y})\} = \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.1.53)$$

Hamiltonove jednačine (3.1.51) možemo prepisati pomoću Poasonove zgrade na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_r}{\partial t} &= \{\pi_r, H\} \\ \frac{\partial \phi_r}{\partial t} &= \{\phi_r, H\}.\end{aligned}\quad (3.1.54)$$

3.2 Neterina teorema

U glavama 1 i 2 smo detaljno analizirali prostorno-vremenske i unutrašnje simetrije elementarnih čestica sa kinematičkog aspekta. U ovoj glavi, kao i u narednim glavama, analiziraćemo uticaj simetrije na dinamiku sistema. Najpre ćemo u nastavku ove glave formulati Neterinu teoremu i uverićemo se da su zakoni održanja fizičkih veličina posledica kontinualne globalne simetrije sistema. Ovaj iskaz je sadržaj prve Netrine teoreme.

Neka su neprekidne infinitezimalne transformacijama koordinata i polja date sa

$$\begin{aligned}x^\mu \rightarrow x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') &= \phi_r(x) + \delta \phi_r(x).\end{aligned}\quad (3.2.55)$$

Dejstvo se pri transformacijama (3.2.55) menja jer se menja mera integracije kao i podintegralna funkcija, odnosno gustina lagranžijana. Varijacija dejstva pri transformacijama (3.2.55) je razlika dejstva pre i nakon transformacije, tj.

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu \phi'_r(x')) - \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x)).$$

Ω i Ω' su jedna te ista oblast prostora Minkovskog parametrizovana jednom sa x , a drugi put sa x' koordinatama (pasivna transformacija). Element zapremine prostora Minkovskog se menja na sledeći način

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4x.$$

Lako se vidi da je Jakobijan transformacije koordinata dat sa

$$\left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \det \left[\delta^\mu_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta x^\mu \right] \approx 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) ,$$

gde smo primenili

$$\det(1 + A) = e^{\text{Tr} \ln(1+A)} = e^{\text{Tr} A + \dots} = 1 + \text{Tr} A + \dots .$$

Dakle,

$$d^4x' \approx (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu))d^4x . \quad (3.2.56)$$

Totalna varijacija polja definisana je kao

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) .$$

Ona predstavlja razliku transformisanog polja u novim koordinatama i početnog polja u polaznim koordinatama. Promena oblika polja u istom koordinatnom sistemu,

$$\delta_0\phi = \phi'(x) - \phi(x)$$

je tzv. varijacija forme polja. Veza izmedju varijacije forme i totalne varijacije polja je

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) \\ &= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) \\ &= \delta_0\phi(x') + \partial_\mu\phi\delta x^\mu \\ &= \delta_0\phi(x) + \partial_\mu\phi\delta x^\mu . \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

U poslednjem koraku umesto koordinata x' napisali smo x , jer računamo u prvom redu po δx . Lako se vidi da diferenciranje komutira sa varijacijom forme:

$$\delta_0\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta_0\phi .$$

Varijacija forme Lagranžijana je

$$\begin{aligned} \delta_0\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu\phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\partial_\mu\phi . \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Totalna varijacija lagranžijana je

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu\phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \\ &= \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\mu\phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial'_\mu\phi_r(x')) + \mathcal{L}(\phi_r(x'), \partial'_\mu\phi_r(x')) \\ &\quad - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu . \quad (3.2.59)$$

Primenom (3.2.56) i (3.2.59), dobijamo da je infinitezimalna promena dejstva

$$\begin{aligned}\delta S &= \int (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}) - \int d^4x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) \\ &= \int d^4x (\delta_0 \mathcal{L} + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L})) .\end{aligned}\quad (3.2.60)$$

Zamenjujući (3.2.58) u dobijeni izraz, dolazimo do

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta_0 \phi_r + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \right) \delta_0 \phi_r + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right) \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \\ &= \int d^4x \partial_\mu J^\mu .\end{aligned}\quad (3.2.61)$$

Polja $\phi_r(x)$ zadovoljavaju jednačine kretanja, što smo iskoristili u drugom redu. Dakle, pokazali smo da je promena dejstva, za polja koja zadovoljavaju jednačine kretanja integral četvorodivergencije.

Jednačine kretanja se pri transformacijama (3.2.55) ne menjaju ukoliko se dejstvo ne promeni, tj. ako je $\delta S = 0$ ³ onda je

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.2.62)$$

gde je Neterina gustina struja J_μ data sa

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu . \quad (3.2.63)$$

Veličina

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \partial_\nu \phi_r - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu \quad (3.2.64)$$

je tenzor energije-impulsa.

³Opštije: Dejstvo poseduje simetriju ukoliko je

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu K^\mu ,$$

gde je K^μ četvorovektor. Izraz za Neterinu gustinu struje postaje

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta_0 \phi_r + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) - K^\mu .$$

Kontinualne globalne transformacije se parametrizuju konstantnim nezavisnim parametrima θ^a . Gustina struje ima oblik $J_\mu = J_\mu^a \theta^a$. Iz (3.2.62), sledi da je $\partial^\mu J_\mu^a = 0$. Definišimo naboje kao

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(t, \mathbf{x}) . \quad (3.2.65)$$

Izračunajmo vremenski izvod naboja Q^a :

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \frac{\partial J_0^a(t, \mathbf{x})}{\partial t} . \quad (3.2.66)$$

Primenom Neterine teoreme i Gausove teoreme dobijamo

$$\frac{dQ^a}{dt} = \int d^3x \text{div} \mathbf{J}_a(t, \mathbf{x}) = \oint \mathbf{J}^a(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (3.2.67)$$

Oblast integracije je najčešće ceo realan trodimenzionalan prostor i Neterine struje dovoljno brzo teže nuli kad $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, tako da je njihov fluks jednak nuli. Dakle, uz odgovarajuću asimptotiku polja u beskonačnosti, dobijamo da su naboji konstante kretanja, tj.

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0 . \quad (3.2.68)$$

Ovim smo pokazali Neterinu teoremu: Ako je dejstvo invarijantno na neprekidne globalne transformacije, koje čine n -parametarsku Lijevu grupu, onda postoji n veličina koje su konstante kretanja. To su očuvani naboji i njih ima onoliko koliko grupe simetrije ima generatora.

3.2.1 Fazna invarijantnost

U ovom paragrafu analiziraćemo faznu simetriju slobodnih lagranžijana skalarnog i Dirakovog polja, kao i faznu invarijantnost u kvantnoj mehanici.

Gustina lagranžijana kompleksnog slobodnog polja

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi , \quad (3.2.69)$$

je invarijantna na fazne, tj. $U(1)$ transformacije

$$\phi \rightarrow e^{iq\theta} \phi, \quad \phi^\dagger \rightarrow e^{-iq\theta} \phi^\dagger . \quad (3.2.70)$$

Parametar q je konstanta, za koju ćemo kasnije videti da je nanelektrisanje čestica koje su eksitacije ovog polja. Fazne transformacije su tzv. unutrašnje transformacije, jer je $x' = x$. Infinitezimalne promene polja i koordinata pri faznim transformacijama su

$$\begin{aligned} \delta\phi &= iq\theta\phi, \\ \delta\phi^\dagger &= -iq\theta\phi^\dagger, \\ \delta x^\mu &= 0 . \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

Neterina struja je

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger - T_\nu^\mu \delta x^\nu \\ &= iq\theta(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi^\dagger \partial^\mu \phi). \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

Očuvan naboj je

$$Q = iq \int d^3x (\phi^\dagger \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^\dagger). \quad (3.2.73)$$

Kao što je poznata iz kursa Kvantne mehanike, talasna funkcija je odredjena do na fazu. Pri transformacijama

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle,$$

gde je $\theta = \text{const}$ kvadrat modula talasne funkcije se ne menja

$$|\psi|^2 = |\psi'|^2.$$

Slično je i sa matričnim elementima operatora

$$\langle \psi' | \hat{O} | \varphi' \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \varphi \rangle.$$

Fazne transformacije su $U(1)$ transformacije. Dejstvo za "Šredingerovo polje" je

$$S = \int d^4x \left[\psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi^*) \nabla \psi + V(\mathbf{r}) \psi^* \psi \right]. \quad (3.2.74)$$

Ovo dejstvo opisuje nerelativističku kvantnu česticu u potencijalu $V(\mathbf{r})$. Variranjem dejstva (3.2.74) po ψ i ψ^* dobijaju se Šredingerova jednačina

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right) \psi$$

i njoj kompleksno konjugovano jednačina. Dejstvo, a i Šredingerova jednačina, su invariantni na $U(1)$ transformacije

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi, \quad \psi^* \rightarrow e^{-i\theta} \psi^*.$$

Nulta komponenta Neterine struje je

$$j^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} \delta\psi + \delta\psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = \hbar\theta \psi^* \psi. \quad (3.2.75)$$

Slično se nalaze i prostorne komponente

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar^2 \theta}{2m} (\nabla \psi^* \psi - \psi^* \nabla \psi). \quad (3.2.76)$$

Komponente j^0 i \mathbf{j} zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta. Definišući

$$\begin{aligned} j^0 &= \rho = \psi^* \psi \\ \mathbf{j} &= \frac{i\hbar}{2m} (\nabla \psi^* \psi - \psi^* \nabla \psi) , \end{aligned} \quad (3.2.77)$$

dobijamo dobro poznate izraze za gustinu verovatnoće i struje sa kursa Kvantne mehanike.

Dirakov lagranžian

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi$$

je takođe invarijantan na fazne transformacije:

$$\psi \rightarrow e^{iq\theta} \psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-iq\theta} \bar{\psi} .$$

Neterina gustina struje u ovom slučaju je

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &= -q\theta(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) . \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

Kako je θ konstantan parametar, to ga možemo odbaciti, pa je gustina Neterine struje

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi . \quad (3.2.79)$$

Na kursu Relativističke kvantne mehanike pokazano je, kao posledica Dirakove jednačine, da je divergencija ove struje nula. Očuvani naboj je

$$Q = q \int d^3x \psi^\dagger \psi . \quad (3.2.80)$$

Posledica fazne invarijantnosti teorije je očuvanje električnog naielktrisanja.

3.2.2 Translaciona invarijantnost i tenzor energije impulsa

U ovom poglavljju analiziraćemo translacionu simetriju slobodnog skalarnog polja. Pri translacijama koordinate se menjaju prema

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu ,$$

gde su ϵ^ν infinitezimalni parametri. Skalarno polje je nepromenjeno pri translacijama, $\phi'(x + \epsilon) = \phi(x)$. Totalna varijacija skalarnog polja je $\delta\phi = 0$, pa je varijacija forme $\delta_0\phi = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi$. Dejstvo slobodnog skalarnog polja je invarijantno na translacije. Neterina gustina struje je

$$J_\mu = (-\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L} g_{\mu\nu}) \epsilon^\nu = -T_{\mu\nu} \epsilon^\nu . \quad (3.2.81)$$

Očuvana veličina je četvoroimpuls skalarnog polja

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} . \quad (3.2.82)$$

Nulta komponenta impulsa je Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H = P^0 &= \int d^3x T^{00} \\
 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \\
 &= \int d^3x \mathcal{H} .
 \end{aligned} \tag{3.2.83}$$

Vidimo da (00)-komponenta tenzora energije impulsa predstavlja gustinu energija polja. Impuls slobodnog skalarnog polja je

$$P^i = - \int d^3x \partial_0 \phi \partial_i \phi . \tag{3.2.84}$$

Tenzor energije impulsa skalarnog polja je simetričan tenzor. U opštem slučaju, za proizvoljno polje, ovaj tenzor nije simetričan. Procedura simetrizacije tenzora energije impulsa je opisana u zadatku 5.18 u referenci [11].

U ovom poglavlju smo odredili energiju i impuls slobodnog skalarnog polja. Te veličine su očuvane veličine i predstavljaju generatore vremenske, odnosno prostorne translacija.

3.2.3 Lorencova simetrija i ugaoni moment

Podsetimo se da se pri infinitezimalnim Lorencovim transformacijama koordinate menjaju prema

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \approx (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu ,$$

gde su $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ antisimetrični parametri Lorencovih transformacija, tj. bustova i rotacija. Dakle $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu$. Polja $\phi_r(x)$ se pri Lorencovim transformacijama menjaju po

$$\phi'_r(x' = \Lambda x) = S_{rs}(\omega) \phi_s(x) = \left(e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} \right)_{rs} \phi_s(x) , \tag{3.2.85}$$

gde su $\Sigma_{\mu\nu}$ generatori Lorencove grupe u prostoru komponenti polja, videti (1.1.35). Totalna varijacija polja je

$$\delta \phi_r(x) = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} \left(\Sigma_{\mu\nu} \right)_{rs} \phi_s(x) , \tag{3.2.86}$$

pa je Neterina gistica struje

$$\begin{aligned}
 J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r - T^\mu_\nu \delta x^\nu \\
 &= -\frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \omega^{\nu\rho} (\Sigma_{\nu\rho})_{rs} \phi_s(x) - T^\mu_\nu \omega^{\nu\rho} x_\rho .
 \end{aligned}$$

Parametri Lorencovih transformacija su antisimetrični, tako da član $x_\rho T^\mu_\nu$ moramo antisimetrizovati po indeksima ν i ρ . Tako dobijamo

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}\left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^\mu_\rho - x_\rho T^\mu_\nu)\right] \\ &= \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho}M^\mu_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (3.2.87)$$

gde je

$$M^\mu_{\nu\rho} = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^\mu_\rho - x_\rho T^\mu_\nu). \quad (3.2.88)$$

Očuvana veličina je integral nulte komponente gustine struje, tj.

$$\begin{aligned} M_{\nu\rho} &= \int d^3x M^0_{\nu\rho} \\ &= \int d^3x \left[-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi_r)}(\Sigma_{\nu\rho})_{rs}\phi_s(x) + (x_\nu T^0_\rho - x_\rho T^0_\nu) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

Prvi sabirak je spinski, a drugi orbitalni ugaoni moment. Veličine M_{0i} su generatori bustova, a M_{ij} generatori rotacije. Veličine $M_{\mu\nu}$ nazivamo generalisanim momentom impulsa polja.

3.2.4 Primer neabelove simetrije

Razmotrimo sada primer neabelove globalne simetrije. Neka je

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

dublet $SU(2)$ grupe. Gustina Lagranžijana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi$$

je invarijantna na $SU(2)$ transformacije

$$\Psi \rightarrow e^{i\frac{\theta\cdot\vec{\sigma}}{2}}\Psi,$$

gde su θ^a konstantni parametri, σ^a Paulijeve matrice i $a = 1, 2, 3$. Neterina struja je

$$j_\mu^a = \bar{\Psi}\frac{\sigma^a}{2}\gamma^\mu\Psi.$$

U slučaju da je

$$\Psi = N = \begin{pmatrix} \psi_{\text{proton}} \\ \psi_{\text{neutron}} \end{pmatrix},$$

očuvane veličine $Q^a = \frac{1}{2}\int d^3x\psi_i^\dagger\tau_{ij}^a\psi_j$ predstavljaju izospin.

Zadaci

3.1. Odrediti jednačine kretanja za sledeća dejstva:

- a) $S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\psi\phi \right),$
- b) $S = \int d^4x \left(\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right),$
- c) $S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c\theta^{\alpha\beta}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta} - 4F_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}F_{\nu\beta}) \right).$

Ovde su μ , g i c realne pozitivne konstante, a $\theta^{\alpha\beta}$ je realna, konstantna antisimetrična matrica.

3.2. Dat je lagranžijan

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2,$$

gde je ϕ kompleksno skalarno polje. Odrediti jednačine kretanja za ovu teoriju. Zatim naći konjugovane impulse i hamiltonijan teorije. Pokazati da je dati lagranžijan invarijantan u odnosu na $U(1)$ globalne transformacije $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\alpha}\phi$, gde je α konstantan realni parametar i naći očuvanu struju. Proveriti eksplicitno da je struja očuvana.

3.3. Dat je lagranžijan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - \frac{\mu}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi,$$

gde su ϕ_1 i ϕ_2 realna skalarna polja, a ψ je Dirakovo polje. Pokazati da je ovaj lagranžijan invarijantan na transformacije:

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \phi'_1 = \phi_1 \cos \alpha - \phi_2 \sin \alpha \\ \phi_2 &\rightarrow \phi'_2 = \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \cos \alpha \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\frac{\alpha\gamma_5}{2}}\psi, \end{aligned}$$

a zatim odrediti očuvanu struju i naboje. Proveriti da li dodavanje masenog član za polje ψ , $m\bar{\psi}\psi$ narušava ovu simetriju.

3.4. Dat je lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

gde je $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ dublet spinorskih polja. Odrediti jednačine kretanja za ovaj lagranžijan. Zatim pokazati da je \mathcal{L} invarijantan na globalne $SU(2)$ transformacije, pa naći Neter struju i pokazati da je ona očuvana. Pokazati da (posle kvantizacije teorije) očuvani naboji zadovoljavaju algebru

$$[Q^a, Q^b] = i\epsilon^{abc}Q^c.$$

3.5. Pri dilatacijama se koordinate transformišu kao $x^\mu \rightarrow x'^\mu = e^{-\rho}x^\mu$, dok se skalarno polje transformiše kao $\phi \rightarrow \phi' = e^\rho\phi$. Ovde je ρ konstantni parametar. Odrediti varijaciju forme skalarnog polja pri dilatacijama. Da li je dejstvo za slobodno skalarno polje invarijantno na dilatacije? Naći Neter struju i proveriti da li je ona očuvana.

Glava 4

Gradijentna simetrija

U prethodnim glavama smo se uverili u značaj simetrija u fizici elementarnih čestica. Simetrije koje smo do sada analizirali su globalne simetrije: parametri transformacija su konstante (ne zavise od koordinata prostor-vremena). Ove simetrije su imale primenu u klasifikaciji elementarnih čestica. U ovom poglavlju ćemo uvesti pojam lokalne (gradijentne, kalibracione, "gauge") simetrije. Analiziraćemo detaljno teorije sa lokalnom simetrijom i videti kako je lokalizacija simetrije neraskidivo povezana sa uvodjenjem interakcije.

4.1 Čestica u elektromagnetskom polju

Krenimo od jednostavnog primera nanelektrisane čestice u elektromagnetskom (EM) polju. Neka se čestica mase m i nanelektrisanja q nalazi u spolnjem EM polju opisanom četvorovektorskim potencijala $A^\mu = (\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A})$. Lagranžijan ove čestice je dat sa:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} . \quad (4.1.1)$$

Generalisani impuls konjugovan vektoru položaju čestice je:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} , \quad (4.1.2)$$

gde je \mathbf{p} mehanički impuls čestice. Ležandrovom transformacijom iz Lagranžijana dobijamo Hamiltonijan

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \sqrt{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + q\varphi . \quad (4.1.3)$$

Gornji izraz možemo prepisati u obliku

$$\frac{(H - q\varphi)^2}{c^2} - (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 = m^2 c^2 . \quad (4.1.4)$$

Podsetimo se da za slobodnu relativističku česticu važi relacija:

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 . \quad (4.1.5)$$

Primetimo da ako u (4.1.5) napravimo smenu

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\rightarrow H - q\varphi, \\ \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{P} - q\mathbf{A},\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

dobijamo (4.1.4).

U kvantnoj teoriji, Hamiltonian i impuls slobodne čestice su u koordinatnoj reprezentaciji reprezentovani diferencijalnim operatorima

$$H \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{P} \rightarrow -i\nabla.$$

Iz (4.1.6) sledi da pri prelasku iz slobodne teorije na teoriju koja opisuje relativističku česticu u elektromagnetnom polju pravimo sledeću smenu:

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi, \\ -i\nabla &\rightarrow -i\nabla - q\mathbf{A}.\end{aligned}$$

Ova smena se može zapisati u manifestno kovarijantnom obliku

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \equiv D_\mu,\tag{4.1.7}$$

gde je D_μ kovarijantni izvod. Zamena parcijalnog izvoda ∂_μ kovarijantnim izvodom D_μ , odgovara prelasku sa slobodne na interagujuću teoriju i naziva se princip minimalne zamene ("minimal coupling").

Razmotrimo sada Šredingerovu jednačinu za slobodnu česticu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi.\tag{4.1.8}$$

Ova jednačina je invarijantna na globalne $U(1)$ (fazne) transformacije:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x),\tag{4.1.9}$$

gde je parametar θ konstanta. Ako se čestica nalazi u EM polju, njen Hamiltonian je:

$$H = \frac{(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi,$$

pa Šredingerova jednačina za česticu koja interaguje sa elektromagnetskim poljem ima oblik

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi \right] \psi,$$

odnosno

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right) \psi = \left[-\frac{(\nabla - iq\mathbf{A})^2}{2m} \right] \psi.\tag{4.1.10}$$

Dobijena jednačina (4.1.10) ima oblik u skladu sa našom preskripcijom. Naime, ona je dobijena iz (4.1.8) zamenom običnog izvoda kovarijantnim. Jednačina (4.1.10) ima veću simetriju od globalne fazne invarijantnosti. Ta simetrija je

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{r}) &\rightarrow e^{-iq\theta(t, \mathbf{r})} \psi(t, \mathbf{r}) \\ A^\mu &\rightarrow A^\mu + \partial^\mu \theta.\end{aligned}\quad (4.1.11)$$

Ovo je lokalna $U(1)$ simetrija. Termin "lokalna" znači da parametar θ nije konstanta, kao u slučaju globalne simetrije, već je funkcija prostorno-vremenskih koordinata. Lokalana simetrija se naziva i kalibraciona ili gradijentna simetrija. Jednačina za slobodnu česticu (4.1.8) nije invarijantna na lokalne $U(1)$ transformacije. Vidimo da, zahtevajući invarijantnost na lokalne transformacije, od slobodne teorije (4.1.8) prelazimo na interagujuću teoriju nanelektrisane čestice u EM polju (4.1.10).

4.2 Lokalna $U(1)$ simetrija u Kvantnoj elektrodinamici

Slobodni relativistički elektron je opisan Dirakovim lagranžijanom:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (4.2.12)$$

Ovaj lagranžijan je invarijantan na globalne $U(1)$ transformacije

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x),$$

gde je θ konstantni parametar transformacije. Primenimo princip minimalne zamene na ovaj lagranžijan, tj. zamenimo parcijalni izvod sa kovarijantnim

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - iqA_\mu \psi, \quad (4.2.13)$$

gde je A_μ gradijentno polje. Ovo polje je četvoro-vektor EM potencijala. U kvantnoj teoriji, polje A_μ je foton, prenosilac EM interakcije. Slobodni Dirakov lagranžijan (4.2.12) postaje

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.2.14)$$

gde smo dodali i kinetički član za EM polje. Kroz kovarijantni izvod smo uveli interakciju elektrona sa elektromagnetskim poljem (minimalno kuplovanje)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + q\gamma^\mu A_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.2.15)$$

Dobijeni lagranžijan je invarijantan na lokalne fazne transformacije

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\theta} \psi, \quad A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \theta. \quad (4.2.16)$$

Ovu tvrdnju ćemo lako proveriti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-iq\theta} [ie^{iq\theta} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - qe^{iq\theta} \gamma^\mu (\partial_\mu \theta) \psi - me^{iq\theta} \psi \\ &\quad - q\gamma^\mu A_\mu e^{iq\theta} \psi + q\gamma^\mu (\partial_\mu \theta) e^{iq\theta} \psi] \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Vidimo da se potencijal transformiše tako da poništi član koji sadrži izvod parametra transformacije $\theta(x)$. Sa druge strane, može se pokazati da lagranžijan za slobodni elektron (4.2.12) nije invarijantan na lokalne $U(1)$ transformacije: $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)} \psi$. Dakle, zamenom običnog izvoda kovarijantnim izvodom, mi lokalizujemo globalnu simetriju i na taj način uvodimo interakciju elektrona sa EM poljem. Ova lokalna simetrija je Abelova, to jest dve transformacije $U = e^{i\theta(x)}$ i $U' = e^{i\theta'(x)}$ komutiraju.

4.3 Neabelova gradijentna simetrija

Otkrićem neutrona 1932. godine, postalo je jasno da se jezgro sastoji od protona i neutrona, koji medjusobno interaguju nuklearnom interakcijom. Motivisan uvođenjem spina u kvantu mehaniku i vrlo malom razlikom masa između protona i neutrona, Hajzenberg je predložio da se proton i neutron shvate kao dva različita stanja jedne čestice, nukleona. Simetrija koja povezuje ova dva stanja je izospinska $SU(2)$ simetrija, $SU(2)_I$ u nastavku. Ova simetrija je simetrija nuklearne interakcije, kao što je $U(1)$ fazna simetrija simetrije EM interakcije. Ipak, $SU(2)_I$ nije egzaktna simetrija, već je slabo narušena i to zbog postojanja EM interakcije, koja razlikuje proton i neutron. Smatrujući da je ovo narušenje malo, postavlja se pitanje da li se lokalizacijom $SU(2)_I$ može uvesti/opisati nuklearna interakcija, kao što se lokalizacijom $U(1)$ simetrije uvodi EM interakcija. U nastavku ćemo pokušati da odgovorimo na ovo pitanje.

Podjimo od dubleta $SU(2)_I$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

gde su ψ_p i ψ_n Dirakovi spinori protona i neutrona. Lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (4.3.2)$$

je invarijantan na $SU(2)$ globalne transformacije

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} \Psi. \quad (4.3.3)$$

Matrice σ^a su Paulijeve matrice, $a = 1, 2, 3$, dok su parametri θ^a konstantni. U lagranžijanu (4.3.2) smo prepostavili da su mase protona i neutrona jednake, tj. da je $SU(2)_I$ simetrija egzaktna. Ako u jednoj tački prostora-vremena definisemo šta je proton, a šta neutron, onda

to važi u svakoj tački prostor-vremena. Sada ćemo lokalizovati ovu simetriju, tj. uzećemo da su parametri transformacije $\theta^a = \theta^a(x)$ funkcije prostorno-vremenskih koordinata. Polja materije se sada transformišu kao

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi' = U(\theta(x))\Psi(x) = e^{i\frac{\theta^a(x)\sigma^a}{2}}\Psi(x). \quad (4.3.4)$$

Primetimo da su, kao i u slučaju $U(1)$ simetrije, ove transformacije unutrašnje, tj. one ne deluju na koordinate prostor-vremena.

Lako se vidi da kinetički član u lagranžijanu nije invarijantan na lokalne transformacije:

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \rightarrow \bar{\Psi}\gamma^\mu U^{-1}\partial_\mu(U\Psi) = \bar{\Psi}(U^{-1}\gamma^\mu\partial_\mu U)\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi.$$

Da bismo postigli invarijantnost lagranžijana, parcijalni izvod ∂_μ u lagranžijanu ćemo zamjeniti kovarijantnim izvodom:

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi - igA_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}\Psi = \partial_\mu\Psi - igA_\mu\Psi, \quad (4.3.5)$$

gde je $A_\mu = A_\mu^a\frac{\sigma^a}{2}$. Na ovaj način smo uveli tri gradijentna polja (potencijala) A_μ^a , $a = 1, 2, 3$. Polja ima onoliko koliko grupa simetrije ima generatora. Sa g smo označili konstantu interakcije. Na ovaj način smo povećali simetriju. Cena koju plaćamo je uvodjenje dopunskih stepeni slobode, dok je korist principa lokalizacije simetrije uvodenje interakcije. Ovaj princip su prvi uveli Yang i Mills i to na primeru $SU(2)$ izospinske simetrije (C. N. Yang, R. Mills).

Da bismo imali lokalnu invarijantnost lagranžijana, zahtevaćemo da se kovarijantni izvod polja materije Ψ , $D_\mu\Psi$, transformiše isto kao i polje Ψ :

$$(D_\mu\Psi)' = U(\theta)(D_\mu\Psi). \quad (4.3.6)$$

Ovaj zahtev daće nam zakon transformacije gradijentnih polja A_μ . Iz (4.3.6) sledi

$$(\partial_\mu U)\Psi + U\partial_\mu\Psi - igA'_\mu U\Psi = U\partial_\mu\Psi - igUA_\mu\Psi,$$

odakle je

$$A'_\mu U = \frac{1}{ig}\partial_\mu U + UA_\mu. \quad (4.3.7)$$

Množenjem poslednjeg izraza sa U^{-1} sa leve strane i koristeći identitet

$$(\partial_\mu U)U^{-1} = -U\partial_\mu U^{-1}, \quad (4.3.8)$$

dobijamo zakon transformacije gradijentnih polja pri lokalnim transformacijama

$$A'_\mu = U \left(A_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu \right) U^{-1}. \quad (4.3.9)$$

Ukoliko pretpostavimo da su parametri transformacije mali, element grupe $U = e^{i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}}$ možemo da razvijemo do članova linearnih po θ^a

$$U(\theta) = e^{i\theta^a \frac{\sigma^a}{2}} \approx 1 + \frac{i}{2}\sigma^a\theta^a .$$

Onda je

$$\begin{aligned} A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} &= \left(1 + \frac{i}{2}\sigma^a\theta^a\right) A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} \left(1 - \frac{i}{2}\sigma^a\theta^a\right) - \frac{i}{g} \cdot \frac{i}{2}\sigma^a\partial_\mu\theta^a \left(1 - \frac{i}{2}\sigma^a\theta^a\right) \\ A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} &= A_\mu^b \frac{\sigma^b}{2} + \frac{i}{2}\theta^a \frac{\sigma^a\sigma^b}{2} A_\mu^b - \frac{i}{2}A_\mu^b \frac{\sigma^b\sigma^a}{2} \theta^a + \frac{1}{2g}\sigma^b\partial_\mu\theta^b \\ A_\mu'^c \frac{\sigma^c}{2} &= A_\mu^c \frac{\sigma^c}{2} + i\theta^a A_\mu^b i\varepsilon^{abc} \frac{\sigma^c}{2} + \frac{1}{2g}\sigma^c\partial_\mu\theta^c , \end{aligned}$$

odnosno¹

$$\begin{aligned} A_\mu'^c &= A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^c - \varepsilon^{cab}\theta^a A_\mu^b \\ &\equiv A_\mu^c + \frac{1}{g}(D_\mu\theta)^c . \end{aligned}$$

Dakle, infinitezimalna promena gradijentnog polja je

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a - \varepsilon^{cab}\theta^a A_\mu^b . \quad (4.3.10)$$

Primetimo da se pri globalnim transformacijama gradijentna polja transformišu prema

$$A_\mu'^c = A_\mu^c - \varepsilon^{cab}\theta^a A_\mu^b ,$$

odnosno uvodeći vektor $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_\mu &= \mathbf{A}_\mu + i[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{A}_\mu] \\ \mathbf{A}'_\mu &= \mathbf{A}_\mu - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{A}_\mu . \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Iraz (4.3.11) je vektorski zakon transformacije. Indeks unutrašnje grupe simetrije, a je vektorski indeks. Pri lokalnim infinitezimalnim transformacijama varijacija polja δA_μ^a je zbir gradijentnog člana i člana koji odgovara vektorskoj reprezentaciji $SU(2)$ grupe.

Lagranđian invariantan na globalne $SU(2)$ transformacije

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi ,$$

¹Na polje $\theta = \theta^a \frac{\sigma^a}{2}$ koje se transformiše po pridruženoj reprezentaciji grupe, kovarijantni izvod deluje kao $D_\mu\theta = \partial_\mu\theta - ig[A_\mu, \theta]$, ili u komponentnoj notaciji $D_\mu\theta^a = \partial_\mu\theta^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b\theta^c$.

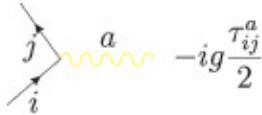
pri lokazlizaciji simetrije prelazi u

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \right) - m \right] \Psi \\ &= \mathcal{L}_0 + g\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \Psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} .\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

Vidimo da smo dobili interakcioni član

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\bar{\psi}_i \gamma^\mu A_\mu^a \frac{\sigma_{ij}^a}{2} \psi_j . \quad (4.3.13)$$

Posle kvantovanja teorije, ovaj član daje verteks sa slike 4.1.



Slika 4.1: Verteks za polja materije i gradijentno polje u Jang-Milsovoj teoriji.

Da bi lagranžijan bio kompletan moramo dodati kinetički član za gradijentna polja. U slučaju lokalne $U(1)$ (Abelove) simetrije, tenzor jačine polja je definisan sa

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (4.3.14)$$

Kako ovo generalisati na neabelovu teoriju? Nadjimo komutator dva kovarijantna izvoda

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] \Psi &= D_\mu D_\nu \Psi - D_\nu D_\mu \Psi \\ &= \partial_\mu (D_\nu \Psi) - igA_\mu (D_\nu \Psi) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Psi - ig(\partial_\mu A_\nu) \Psi - igA_\nu \partial_\mu \Psi - igA_\mu \partial_\nu \Psi \\ &\quad - g^2 A_\mu A_\nu \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]) \Psi .\end{aligned}$$

Tenzor jačine polja definisaćemo sa

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = -igF_{\mu\nu} \Psi .$$

Iz posledenje relacije sledi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] . \quad (4.3.15)$$

Vidimo da je ovaj izraz generalizacija izraza za tenzor jačine polja u abelovom slučaju (4.3.14), jer je u abelovom slučaju $[A_\mu, A_\nu] = 0$, pa se rezultat (4.3.15) svodi na (4.3.14). U komponentnom obliku imamo

$$F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} = \partial_\mu A_\nu^a \frac{\sigma^a}{2} - \partial_\nu A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} - ig i \varepsilon^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \frac{\sigma^c}{2} .$$

Iz poslednjeg izraza sledi da su komponente jačine polja date sa

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (4.3.16)$$

Nadjimo sada kako se $F_{\mu\nu}$ transformiše pri kalibracionim transformacijama

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} \Psi' &= \frac{i}{g} [D'_\mu, D'_\nu] \Psi' \\ &= -\frac{1}{ig} (D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu) \Psi' \\ &= -\frac{1}{ig} U (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \Psi = UF_{\mu\nu} \Psi . \end{aligned}$$

Dakle, tenzor jačine polja se transformiše prema

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} . \quad (4.3.17)$$

Sada ćemo iz (4.3.17) naći zakon transformacije komponenti tenzora jačine polja pri infinitezimalnim transformacijama

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} \frac{\sigma^a}{2} &= \left(1 + i\frac{\sigma^a}{2}\theta^a\right) F_{\mu\nu}^b \frac{\sigma^b}{2} \left(1 - i\frac{\sigma^a}{2}\theta^a\right) \\ &= F_{\mu\nu}^b \frac{\sigma^b}{2} + i\theta^a F_{\mu\nu}^b \left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right] \\ &= F_{\mu\nu}^b \frac{\sigma^b}{2} - \theta^a F_{\mu\nu}^b \varepsilon^{abc} \frac{\sigma^c}{2} . \end{aligned}$$

Dakle,

$$F'_{\mu\nu}^c = F_{\mu\nu}^c - \varepsilon^{cab} \theta^a F_{\mu\nu}^b . \quad (4.3.18)$$

Po analogiji sa (4.3.11), uvodeći vektor $\mathbf{F}_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu}^1, F_{\mu\nu}^2, F_{\mu\nu}^3)$, ovaj zakon transformacije se može zapisati i kao

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_{\mu\nu} &= \mathbf{F}_{\mu\nu} + i[\boldsymbol{\theta}, \mathbf{F}_{\mu\nu}] \\ &= \mathbf{F}_{\mu\nu} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{F}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Tenzor jačine polja se pri kalibracionim transformacijama transformiše kao vektor; drugim rečima, indeks grupe simetrije a u oznaci $F_{\mu\nu}^a$ je pravi vektorski indeks. Napomenimo da se $F_{\mu\nu}$ transformiše isto i pri lokalnim i pri globalnim transformacijama. Polja materije transformišu se po fundamentalnoj reprezentaciji $SU(2)$ grupe, tenzor jačine polja po pridruženoj reprezentaciji. Gradijentna polja se transformišu nestandardno (nelinearno, nehomogeno) pri gradijentnim transformacijama.

Od tenzora jačine polja moramo konstruisati veličinu invarijantnu na lokalne $SU(2)_I$ transformacije. Lako se proverava da je veličina $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ invarijantna. Naime, pri lokalnim transformacijama ona se transformiše prema

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \rightarrow \text{Tr}(UF_{\mu\nu}U^{-1}UF^{\mu\nu}U^{-1}) = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) .$$

Korišćenjem identiteta $\text{Tr}(\tau^a \tau^b) = 2\delta^{ab}$ dobijamo

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}.$$

Primetimo da maseni član za potencijal, $\text{Tr}A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}A_\mu^a A^{\mu a}$ nije invarijantan na gradijentne transformacije (4.3.9), pa se ne može dodati u lagranžijan.

Konačno možemo napisati ukupni lagranžijan invarijantan na lokalne $SU(2)_I$ transformacije

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (4.3.20)$$

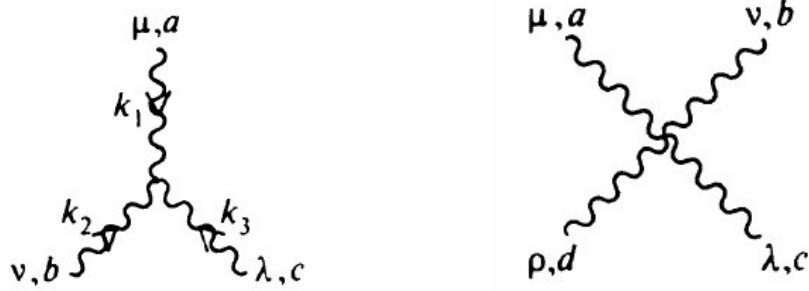
Ovaj lagranžijan opisuje polje materije (nukleon, tj. proton i neutron), koje interaguje sa prenosiocima interakcije A_μ^a . Odgovarajući član u lagranžijanu je $g\bar{\psi}_i \gamma_\mu T_{ij}^a \psi_j A_\mu^a$. Za razliku od EM interakcije, gde foton (prenosio EM interakcije) ne interaguje sam sa sobom, u neabelovoj gauge teoriji postoji interakcija gradijentnih polja (prenosioca interakcije) polja samih sa sobom. Ovo sledi iz člana

$$F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2.$$

Lako se vidi da je interakcioni član dat sa

$$\mathcal{L}_{int,A} = 2g\varepsilon^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A^{\mu b}A^{\nu c} + g^2\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d}A^{\nu e}. \quad (4.3.21)$$

Posle kvantizacije teorije, pored verteksa koji opisuju interakciju i koji su prikazani na slici 4.2, dobijajamo i propagatore za potencijale A_μ^a .



Slika 4.2: Verteksi za gradijentna polja u Jang-Milsovoj teoriji.

Konstruisani model (4.3.20) sa lokalnom $SU(2)_I$ simetrijom nam govori da su prenosoci nuklearne interakcije gradijentna polja A_μ^a . Lorencov indeks ovih polja, μ , ukazuje da je njihov spin $s = 1$. Jang i Mils su u svom radu pretpostavili da su polja materije p i n , kao što smo već rekli, dok su gradijentna polja π mezoni

$$A_\mu^3 = \pi^0, \quad \frac{A_\mu^1 \pm iA_\mu^2}{\sqrt{2}} = \pi^\pm.$$

Njihova interpretacija je bila pogrešna, jer π mezoni pripadaju pseudoskalarnom mezon-skom oktetu, pa je njihov spin nula. Dakle, nukleoni ne interaguju tako što razmenjuju π mezone, kao što se smatralo tridesetih godina 20. veka. Još jedan veliki problem

Jang-Milsovog modela nuklearne interakcije je činjenica da ja nuklearna interakcija kratkodometna, domet joj je ogranicen na radijus jezgra $\sim (1 - 10) fm$. Jang-Milsov model predviđa prenosioce interakcije koji su bezmaseni, pa time i dugodometnu interakciju. Ovi problemi su ozbiljni, ali ćemo u sledećem poglavljju videti kako se mogu rešiti. Sam princip lokalizacije simetrije, kao način da se uvede interakcija, je jako značajan i veoma je doprineo razumevanju interakcija elementarnih čestica.

4.4 Proizvoljna neabelova gradijentna teorija

Prethodno izlaganje se može lako generalisati. Neka je G prosta grupa čiji su elementi

$$U = e^{i\theta^a T^a},$$

dok su generatori T^a , $a = 1, \dots, n$. Komutacione relacije izmedju generatora su

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c,$$

gde su f^{abc} strukturne konstante grupe. Polja materije se transformišu po fundamentalnoj reprezentaciji grupe G :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iT^a \theta^a} \psi \equiv U\psi, \quad (4.4.1)$$

gde smo uzeli da su parametri transformacija $\theta = \theta^a(x)T^a$, funkcije koordinata prostora-vremena, tj. simetrija je lokalna. Polja materije čine multiplet $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$. Kovariantni izvod deluje na polja materije kao

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig A_\mu^a T^a \psi, \quad (4.4.2)$$

gde je g konstanta interakcije. Izraz (4.4.2) u indeksnoj notaciji ima oblik

$$D_\mu \psi_i = \partial_\mu \psi_i - ig A_\mu^a T_{ij}^a \psi_j. \quad (4.4.3)$$

Iz zahteva

$$(D_\mu \psi)' = U(D_\mu \psi)$$

sledi infinitezimalni zakon transformacije gradijentnih polja A_μ^a

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta + i[\theta, A_\mu],$$

odnosno

$$A'^a_\mu = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - f^{abc} \theta^b A_\mu^c. \quad (4.4.4)$$

Tenzor jačine polja je definisan preko komutatora $F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$, pa dobijamo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.4.5)$$

Njegov infinitezimalni zakon transformacije je

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + i[\theta, F_{\mu\nu}] \\ F'_{\mu\nu}^a &= F_{\mu\nu}^a - f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c . \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Jang-Milsov Lagranžijan je onda

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^a T^a) - m] \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} . \quad (4.4.7)$$

Maseni član $m^2 A_\mu^a A^{\mu a}$ nije invarijantan na gradijentne transformacije i zbog toga ga ne možemo dodati u Lagranžijan.

Lagranžijan (4.4.7) opisuje polja materije ψ koja interaguju sa prenosiocima interakcije, gradijentnim poljima A_μ^a . Verteksi u ovoj teoriji su dati na slici 4.1. Prenosioci interakcije su bezmasena vektorska polja, koja medjusobno interaguju. Kao što smo rekli na kraju prethodne glave, ovakvi modeli ne odgovaraju fizičkoj realnosti, osim u slučaju EM interakcije. Videćemo u nastavku kako se ovi modeli mogu modifikovati, tako da opisuju interakcije koje srećemo u prirodi.

Iz gornjeg lagranžijana se variranjem po gradijentnim poljima dobijaju jednačinu kretanja:

$$D_\nu F^{\mu\nu a} = J^{\mu a} ,$$

gde je struja materije definisana kao $J^{\mu a} = g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi$. U prethodnoj formuli kovarijantni izvod D_μ deluje na veličinu koja se transformiše po pridruženoj reprezentaciji

$$D_\mu F = (D_\mu F)^a T^a = \partial_\mu F - ig[A_\mu, F] . \quad (4.4.8)$$

Lako se vidi da je

$$(D_\mu F)^a = \partial_\mu F^a + gf^{abc}A_\mu^b F^c .$$

Takodje, tenzor jačine polja zadovoljava sledeći identitet (Bjankijev identitet)

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.4.9)$$

Zadaci

4.1. Pri gradijentnim transformacijama polje materije ψ se transformiše po nekoj reprezentaciji gradijentne grupe G. Kako treba da se transformišu gradijentna polja A_μ da bi se kovarijantni izvod $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ transformisao kovarijantno, tj. da bi važilo $D_\mu\psi \rightarrow D_\mu\psi = U(\theta)D_\mu\psi$ pri transformaciji polja $\psi \rightarrow \psi = U(\theta)\psi$? Ovde je $\theta(x) = \theta^a(x)T^a$ parametar gradijentnih transformacija, a gradijentno polje $A_\mu = A_\mu^a T^a$ je u ogovarajućoj (u odnosu na polje materije ψ) reprezentaciji gradijentne grupe.

4.2. Izračunati tenzor jačine polja $F_{\mu\nu} = g[D_\mu, D_\nu]$, kao i komponente tenzora $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$.

4.3. Ispitati kako se tenzor jačine polja $F_{\mu\nu}$ transformiše u odnosu na gradijentne transformacije.

4.4. Na osnovu zakona transformacije tenzora jačine polja $F_{\mu\nu}$ odrediti zakon transformacije komponenti $F_{\mu\nu}^a$ pri infinitezimalnim gradijentnim transformacijama.

4.5. Koristeći matrični oblik zakona transformacije za gradijentno polje A_μ i tenzor jačine polja $F_{\mu\nu}$, pokazati da je član $\frac{1}{2}\text{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invarijantan, dok član $\frac{m}{2}\text{Tr}A_\mu A^\mu$ nije invarijantan gradijentne transformacije. Nakon toga uraditi isto, ali u komponentnom zapisu, tj. pokazati da je član $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$ invarijantan, dok član $\frac{m}{2}A_\mu^a A^{\mu a}$ nije invarijantan na infinitezimalne gradijentne transformacije.

4.6. Polazeći od definicije kovarijantnog izvoda koji deluje na polje materije ψ iz fundamentalne reprezentacije i Lajbnicovog pravila za kovarijantne izvode $D_\mu(M_1M_2) = (D_\mu M_1)M_2 + M_1(D_\mu M_2)$, pokazati da važi $D_\mu\xi = \partial_\mu\xi - ig[A_\mu, \xi]$, gde je $\xi = \xi^a T^a$ polje iz pridružene reprezentacije. Pokazati zatim da važi

$$\partial_\mu\text{Tr}(\xi_1\xi_2) = \text{Tr}\left((D_\mu\xi_1)\xi_2 + \xi_1(D_\mu\xi_2)\right).$$

4.7. Pokazati da za polja iz pridružene reprezentacije važi $[D_\mu, D_\nu]\xi = ig[F_{\mu\nu}, \xi]$, gde je $\xi = \xi^a T^a$.

4.8. Pokazati da važi Jakobijev identitet

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] = 0.$$

Zatim dokazati Bjankijev identitet

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0.$$

4.9. Dualni tenzor $*F^{\mu\nu}$ tenzora jačine polja $F_{\mu\nu}$ definisan je kao $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Pokazati da važi

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) = \partial_\lambda K^\lambda$$

gde K^λ treba odrediti. Šta zaključujete na osnovu ovog rezultata?

4.10. Odrediti Neter struju J_μ za gradijentne transformacije u slučaju slobodnog Jang-Milsovog lagranžijana. Proveriti eksplicitno da li važi $\partial_\mu J^\mu = 0$.

4.11. Dat je lagranžian

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^+(\partial^\mu\phi) - \mu^2\phi^+\phi,$$

gde je $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ dublet kompleksnih skalarnih polja. Pokazati da je ovaj lagranžian invarijantan na globalne $SU(2)$ transformacije. Zatim napisati lagranžian koji se iz zadatog dobija zahtevajući invarijantnost na lokalnu $SU(2)$ simetriju. Proveriti eksplicitno invarijantnost na lokalne transformacije.

4.12. Naći jednačine kretanja za polja ϕ , ϕ^+ i A_μ iz lagranžijana (invarijantnog na lokalnu simetriju) iz prethodnog zadatka i napisati ih u kovarijantnom obliku.

4.13. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = kTr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = kF^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a$, gde je $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$ tenzor jačine polja, a T^a generatori poluproste i kompaktne neabelove grupe. Odrediti jednačine kretanja za ovaj lagranžijan, kao i tenzor energije-impulsa (očuvana struja pri translacijama). Kakav znak treba da ima konstanata k da bi energija polja $F_{\mu\nu}$ bila pozitivna? (Ovde se mogu, kao u elektrodinamici, uvesti veličine $F^{a0i} = -E^{ai}$ i $F^{a0j} = -\varepsilon^{ijk}B^{ak}$.)

4.14. Ispitati da li je lagranžijan $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ invarijantan na transformacije $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta\gamma_5}\psi$, gde je θ konstanta. Naći Netererinu struju i proveriti da li je ona očuvana. Prokomentarisati rezultat. Napisati lagranžijan koji se iz zadatog dobija lokalizacijom simetrije ($\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi$). Iz zahteva da se kovarijantni izvod transformiše kao $D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{i\theta(x)\gamma_5}D_\mu\psi$ odrediti zakon transformacije gradijentnog polja A_μ .

4.15. Dat je lagranžijan $L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$, gde je $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ dublet spinorskih polja.

a) Pokazati da je L invarijantan na globalne $SU(2)$ transformacije; naći Neter struju i pokazati da je ona očuvana.

- b) Lokalizovati $SU(2)$ simetriju i napisati lagranžijan koji je invarijantan na lokalne $SU(2)$ transformacije.
- c) Odrediti jednačine kretanja za polja ψ i A_μ .
- d) Odrediti Neter struju za lokalnu $SU(2)$ simetriju i proveriti eksplicitno da li je ona očuvana.

Glava 5

Spontano narušenje simetrije

U prethodnoj glavi smo videli da Jang-Milsove teorije predviđaju bezmasene prenosioci interakcija i zaključili da ih kao takve, ne možemo koristiti za opis slabe interakcije. Da bi prenosioci interakcije dobili masu, simetrija Jang-Milsove teorije mora da je narušena. U ovom poglavlju ćemo diskutovati jedan od načina da se simetrija teorije naruši: spontano narušenje simetrije. Mehanizam spontanog narušenja simetrije je prvi put uveden u oblasti kondenzovane materije [15], a zatim je generalisan na relativističke sisteme i fiziku elementarnih čestica. Za rad na ovom polju, Nobelovu nagradu za fiziku 2013. godine su podelili Peter Higgs (Peter Higgs) i Fransoa Engler (Francois Englert).

5.1 Osnovni pojmovi

Fizički sistem poseduje simetriju ukoliko je njegov hamiltonijan H invarijantan na delovanje odgovarajuće grupe simetrije. Preciznije, neka je G Ljeva grupa. Invarijantost hamiltonijana znači da je

$$U(g)HU^\dagger(g) = H, \quad g \in G. \quad (5.1.1)$$

Kao što je poznato, kvantna stanja se dobijaju delovanjem kreacionih operatora na vakuum. Konkretno, delovanjem operatora $\hat{\Phi}_A$ na vakuum, dobijamo kvantno stanje $|A\rangle = \hat{\Phi}_A|0\rangle$. Pri transformacijama grupe G , operator $\hat{\Phi}_A$ se menja prema

$$U\hat{\Phi}_AU^\dagger = \hat{\Phi}_B, \quad (5.1.2)$$

tj. prelazi u operator $\hat{\Phi}_B$. Delovanjem operatorom $\hat{\Phi}_B$ na vakuum dobijamo stanje $|B\rangle$. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} |B\rangle &= \hat{\Phi}_B|0\rangle \\ &= U(g)\hat{\Phi}_AU^\dagger(g)|0\rangle \\ &= U(g)\hat{\Phi}_A|0\rangle \\ &= U(g)|A\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Vidimo da grupa G stanje $|A\rangle$ prebacuje u stanje $|B\rangle$. Energije ova dva stanja su jednake:

$$E_A = \langle A | H | A \rangle = \langle B | H | B \rangle = E_B . \quad (5.1.4)$$

Dakle, simetrija dovodi do degeneracije stanja. U prethodnom računu koristili smo pretpostavku da je osnovno stanje teorije invarijantno na delovanje grupe G , tj. $U|0\rangle = |0\rangle$.

Medjutim, ako vakuum nije invarijantan na delovanje grupe simetrije G , tj. $|0\rangle \neq U|0\rangle$, nećemo imati degeneraciju energetskih nivoa, iako su hamiltonijan H i lagranžijan L invarijantni. U tom slučaju kažemo da je simetrija spontano narušena. Ovaj termin nije najpodesniji, jer simetrija postoji u hamiltonijanu, odnosno lagranžijanu, ali osnovno stanje ne poseduje tu simetriju.

U nerelativističkoj fizici, tipičan primer sistema sa spontanim narušenjem simetrije je feromagnet. Podsetimo se ovog fenomena. Ako se feromagnet nalazi na temperaturi koja je iznad Kirijeve (kritične) temperature, onda je on u paramagnetonoj fazi i ukupna magnetizacija sistema je nula. Ukoliko se feromagnet nadje na temperaturi nižoj od Kirijeve temperature, onda je on u feromagnetonoj fazi i ukupna magnetizacija je različita od nule. Kada se feromagnet nadje u dovoljno jakom spoljašnjem magnetnom polju \mathbf{B} , magnetizacija \mathbf{M} je paralelna spoljašnjem magnetnom polju. Gustina slobodne energije sistema u blizini Kirijeve temperature se može opisati sledećim izrazom

$$u(\mathbf{M}) = (\partial_i \mathbf{M})^2 + V(\mathbf{M}) , \quad (5.1.5)$$

gde je potencijal dat sa

$$V(\mathbf{M}) = \alpha_1(T)(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) + \alpha_2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^2 + \dots , \quad \alpha_i > 0 . \quad (5.1.6)$$

Vidimo da su gustina slobodne energije u i potencijal V invarijantni na grupu rotacija $SO(3)$. Pokazuje se da je funkcija α_1

$$\alpha_1(T) = \alpha(T - T_C) , \quad (5.1.7)$$

gde je α pozitivna konstanta. Minimum slobodne energije je određen sa

$$\frac{\partial V}{\partial M_i} = 0 ,$$

odakle dobijamo

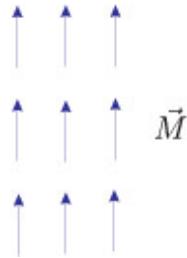
$$\mathbf{M}(\alpha_1 + 2\alpha_2 \mathbf{M}^2) = 0 . \quad (5.1.8)$$

Ukoliko je temperatura iznad kritične temperature, $T > T_C$, vidimo da je ovaj uslov ispunjen ako osnovno stanje ima nultu magnetizaciju $\mathbf{M} = 0$. U feromagnetonoj fazi, to jest kada je $T < T_C$, osnovno stanje je određeno sa¹

$$M = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}} . \quad (5.1.9)$$

¹Jednačina (5.1.8) je u slučaju $T < T_c$ zadovoljena za $\mathbf{M} = 0$ ili $M = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}}$. Pokazuje se da $\mathbf{M} = 0$ ne odgovara minimumu slobodne energije, dok $M = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}}$ zaista opisuje minimum slobodne energije i odgovara osnovnom stanju.

Intenzitet magnetizacije osnovnog stanja odredjen je odnosom konstanti α_1 i α_2 , dok je smer proizvoljan, što reflektuje $SO(3)$ simetriju. Kada sistem izbere jedno osnovno stanje (jedan smer za vektor magnetizacije, koje se može zadati pomoću spoljašnjeg magnetnog polja, onda je rotaciona simetrija, koja je očigledna u (5.1.5), narušena. Slobodna energija i dalje ima rotacionu simetriju $SO(3)$, ali je u osnovnom stanju ova simetrija narušena do $SO(2)$ simetrije, kao što se vidi sa slike. Bolji termin je skrivena simetrija. Zbog toga se često, umesto izraza "narušena simetrija", koristi izraz "skrivena simetrija".



Slika 5.1: Orjentacija spinova u osnovnom stanju feromagneta.

5.2 Spontano narušenje diskretne simetrije

Razmotrimo sada mehanizam spontanog narušenja simetrije u teoriji polja, i to prvo na jednostavnom primeru diskretne simetrije. Neka je gustina lagranžijiana realnog skalarnog polja data sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) , \quad (5.2.1)$$

gde je potencijal

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 . \quad (5.2.2)$$

Da bi potencijal bio ograničen sa donje strane, uzećemo da je $\lambda > 0$. Generalisani impuls je onda

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial_0 \phi ,$$

pa je hamiltonijan

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi)] \\ &= \int d^3x [\frac{1}{2} (\pi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi)] . \end{aligned}$$

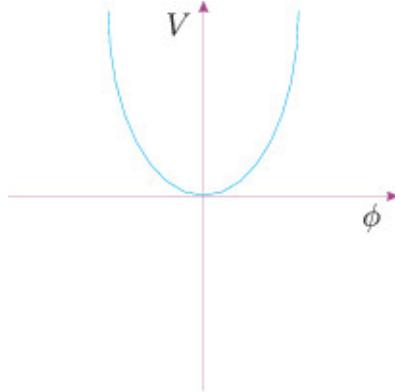
Minimum energije je odredjen minimumom potencijala $V(\phi)$, koji određujemo iz uslova $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$. Ovaj uslov daje jednačinu

$$\phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 . \quad (5.2.3)$$

Ova jednačina ima dva rešenja:

$$\phi = 0 \quad \vee \quad \phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (5.2.4)$$

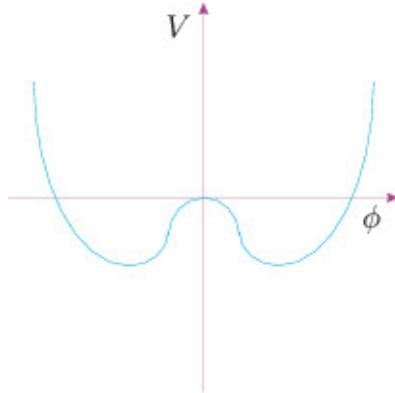
Razlikujemo dva slučaja. Prvi je $\mu^2 > 0$. U ovom slučaju, potencijal ima oblik kao na slici 5.2. Vidimo da je jedino rešenje jednačine (5.2.3) $\phi = 0$ i ono odgovara minimumu



Slika 5.2: Potencijal za slučaj $\mu^2 > 0$.

energije. Dakle, osnovno stanje je nedegenerisano.

Drugi slučaj je $\mu^2 < 0$. Tada je jednačina (5.2.3) zadovoljena i za $\phi = 0$ i za $\phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$. Potencijal ima oblik kao na slici 5.3. Sa slike 5.3 vidimo da stacionarna tačka



Slika 5.3: Potencijal za slučaj $\mu^2 < 0$.

$\phi = 0$ odgovara lokalnom maksimumu potencijala, dok su $\phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ lokalni minimumi. U kvantnoj teoriji postoji dva vakuma $|0_{\pm}\rangle$ tako da je vakumska očekivana vrednost polja ϕ data sa

$$\langle 0_{\pm} | \hat{\phi}(x) | 0_{\pm} \rangle = \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$

Simetrija hamiltonijana H i lagranžijana L je refleksiona simetrija $\phi \rightarrow -\phi$. Izborom jednog od minimuma potencijala za osnovno stanje narušavamo refleksionu simetriju vakuuma. Hilbertovi prostori stanja konstruisani nad ova dva vakuuma $|0_{\pm}\rangle$ su ortogonalni². Dakle, lagranžian poseduje diskretnu simetriju, dok vakuum nema tu simetriju. Kažemo da je simetrija spontano narušena.

Izaberimo za vakuumsko stanje $|0_+\rangle$. Vakuumska očekivana vrednost polja $\phi(x)$ je $\langle\phi\rangle = +v$. Uvedimo novo polje

$$\phi'(x) = \phi(x) - v , \quad (5.2.5)$$

čija je vakuumska očekivana vrednost jednaka nula. Smenom (5.2.5) u lagranžijan dobijamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi')^2 - (-\mu^2)\phi'^2 - \lambda v\phi'^3 - \frac{\lambda}{4}\phi'^4 , \quad (5.2.6)$$

odakle vidimo da je polje ϕ' postalo maseno. Njegova masa je

$$m(\phi') = \sqrt{-2\mu^2} . \quad (5.2.7)$$

Primetimo da u lagranžijanu (5.2.1), u slučaju $\mu^2 < 0$, član $-\mu^2\phi^2$ nije maseni član, jer je njegov predznak pogrešan. Tek posle SNS maseni član za polje ϕ' ima odgovarajući znak, pa možemo reći da lagranžian (5.2.6) opisuje realno maseno skalarno polje ϕ' . Lagranžian (5.2.6) nije invarijantan na transformacije $\phi' \rightarrow -\phi'$, što ne znači da lagranžian ne poseduje refleksionu simetriju. Refleksiona simetrija $\phi \rightarrow -\phi$ polaznog lagranžijana posle smene polja (5.2.5) postaje simetrija $\phi' \rightarrow -\phi' - 2v$ lagranžijana (5.2.6).

5.3 Spontano narušenje globalne simetrije

Razmotrimo sada spontano narušenje na primeru globalne Abelove simetrije. Neka je gustina lagranžijana data sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - V(\phi_1^2 + \phi_2^2) , \quad (5.3.1)$$

²U okviru kvantne teorije polja se može pokazati da je amplituda tuneliranja iz jednog u drugi vakuum

$$\langle 0_- | 0_+ \rangle \sim e^{-CV} ,$$

gde je C konstanta a V zapremina prostora u kojoj razmatramo kvantnu teoriju. Kad $V \rightarrow \infty$ gornja amplituda teži nuli, pa nema tuneliranja iz jednog vakuuma u drugi, što narušava refleksionu simetriju lagranžijana. Ovo je suprotno kvantno mehaničkom analogonu kada bi potencijal bio

$$V(x) = \frac{\mu^2}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4}x^4 .$$

U ovom slučaju postoji konačna verovatnoća da sistem tunelira iz jednog vakuuma u drugi. Vidimo da u sistemima sa konačnim brojem stepeni slobode nema SNS, dok u sistemima sa beskonačnim brojem stepeni slobode (teorija polja) dolazi do SNS.

gde je potencijal

$$V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (5.3.2)$$

U slučaju kada je $\mu^2 > 0$, ova gustina lagranžijana opisuje dva realna skalarna polja mase μ , koja medjusobno interaguju. Konstanta interakcije λ je bezdimenzionala i pozitivna konstanta. Gustina lagranžijana (5.3.1) može biti prepisana u obliku

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (5.3.3)$$

gde smo uveli kompleksno polje

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}.$$

Ova gustina lagranžijana opisuje kompleksno skalarno polje koje interaguje sa samim sobom.

Gustina lagranžijana (5.3.1) je invarijantna na globalne $SO(2)$ rotacije

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

gde je parametar transformacije θ konstantan. Sa druge strane, gustina lagranžijana (5.3.3) je invarijantna na globalne $U(1)$ transformacije

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\theta} \phi, \\ \phi^* &\rightarrow e^{-i\theta} \phi^* \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Grupe $U(1)$ i $SO(2)$ su lokalno izomorfne.

Odredimo sada vrednosti polja za koje je energija minimalna. Ova polja su konstante, pa je dovoljno razmatrati stacionarne tačke potencijala:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = \mu^2 \phi_i + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2) \phi_i = 0. \quad (5.3.6)$$

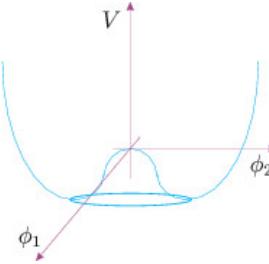
Kao i u prethodnom poglavlju, i ovde možemo razlikovati dva slučaja: $\mu^2 > 0$ i $\mu^2 < 0$.

Kao što smo rekli na početku, u slučaju $\mu^2 > 0$, gustina lagranžijana (5.3.1) opisuje dva realna skalarna polja mase μ koja medjusobno interaguju. Minimum potencijala je u tački $\phi_1 = \phi_2 = 0$. U ovom slučaju nemamo spontano narušenje simetrije, pa ovaj slučaj nećemo dalje razmatrati.

U slučaju $\mu^2 < 0$ potencijal izgleda kao na slici 5.4. Vidimo da je lokalni maksimum u $\phi = 0$, dok su lokalni minimumi (njih beskonačno puno) rasporedjeni na kružnici

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (5.3.7)$$

Ova jednačina je invarijantna na $SO(2)$ rotacije. Izborom bilo koje tačke sa kružnice za lokalni minimum, narušava se $SO(2)$ simetrija i dobijamo sistem sa spontanim narušenjem

Slika 5.4: Potencijal skalarnog polja za $\mu^2 < 0$.

simetrije. Izaberimo $\langle \phi_1 \rangle_0 = v$ i $\langle \phi_2 \rangle_0 = 0$ za osnovno stanje teorije. Sada ćemo ispitati čestični spektar teorije. Uvedimo smenu

$$\phi'_1 = \phi_1 - v, \quad \phi'_2 = \phi_2, \quad (5.3.8)$$

tako da su vakuumске očekivane vrednosti polja ϕ'_1 i ϕ'_2 nula. Gustina Lagranžijana postaje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi'_1)^2 + (\partial\phi'_2)^2] + \mu^2 \phi'^2_1 - \lambda v \phi'_1 (\phi'^2_1 + \phi'^2_2) - \frac{\lambda}{4} (\phi'^2_1 + \phi'^2_2)^2. \quad (5.3.9)$$

Vidimo da primovana polja imaju masene članove sa odgovarajućim znacima (ne zaboravite da je $\mu^2 < 0$) i to

$$m(\phi'_2) = 0 \quad m(\phi'_1) = \sqrt{2}\mu.$$

Polje ϕ'_1 je dobilo masu, dok je polje ϕ'_2 bezmaseno. Bezmaseno polje u teoriji sa spontanim narušenjem simetrije se naziva Goldstonov bozon. Gustina lagranžijan (5.3.9) opisuje dva realna skalarna polja, jedno maseno i jedno bezmaseno, koja medjusobno interaguju.

5.4 Goldstonova teorema

U prethodnom poglavlju, na primeru Abelove simetrije pokazali smo da se u spektru modela pojavljuju bezmasene čestice. Ovaj rezultat, poznat kao Goldstonova teorema, se može generalizovati na slučaj proizvoljne kontinualne globalne simetrije:

Neka je grupa G kontinualna globalna simetrija lagranžijana, a H grupa simetrije osnovnog stanja. Neka je n broj generatora G , a n' broj generatora podgrupe H i $n' \leq n$. Usled spontanog narušenja simetrije, u čestičnom spektru teorije, pojavljuje se $n - n'$ bezmasenih skalarnih polja, Goldstonovih bozona.

Ova teorema se može pokazati na sledeći način. Podjimo od gustine lagranžijana koja opisuje p realnih skalarnih polja ϕ_i , $i = 1, \dots, p$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi_i). \quad (5.4.1)$$

Multiplet polja $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T$ se transformiše po fundamentalnoj reprezentaciji grupe G

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\varepsilon^a T^a} \phi, \quad a = 1, \dots, n,$$

gde su T^a generatori grupe G , a ε^a su konstantni parametri transformacije. Promena polja ϕ_i pri infinitezimalnim transformacijama je onda

$$\delta\phi_i = i\varepsilon^a T_{ij}^a \phi_j. \quad (5.4.2)$$

Iz invarijantnosti lagranžijana sledi invarijantnost potencijala, pa je

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \delta\phi_i = i\varepsilon^a \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (5.4.3)$$

Iz poslednje relacije sledi

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0. \quad (5.4.4)$$

Diferencirajmo ovu relaciju po ϕ_k i izračunajmo njenu vrednost u $\phi_i = v_i$ gde je

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} \Big|_{\phi_i=v_i} = 0,$$

tj. v_i je vakuumска оcekivana vrednost polja ϕ_i . Dobijamo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \Big|_{v_i} T_{ij}^a v_j = 0. \quad (5.4.5)$$

Sa druge strane, potencijal možemo da razvijemo oko vakuuma

$$V(\phi_i) \approx V(v_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Big|_{v_i} (\phi_i - v_i)(\phi_k - v_k).$$

Matrica

$$(M^2)_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k} \Big|_{v_i}$$

je kvadrat masene matrice. Izraz (5.4.5) postaje

$$M_{ki}^2 T_{ij}^a v_j = 0. \quad (5.4.6)$$

Jednačina (5.4.6) je svojstveni problem matrice M^2 . Svojstveni vektori su $V^a = T^a v$, gde smo sa v označili kolonu $v = (v_1, \dots, v_p)$. Označimo generatore grupe G na sledeći način

$$\begin{array}{c} H \\ \underbrace{T^1, \dots, T^{n'}, T^{n'+1}, \dots, T^n}_{G} \end{array}$$

Kako je simetrija vakuuma podgrupa H , onda je

$$T_{ij}^a v_j = 0 \text{ za } a = 1, \dots, n' \text{ i } T_{ij}^a v_j \neq 0 \text{ za } a = n' + 1, \dots, n .$$

Generatori koji su iz G , ali ne iz H ne održavaju vakuum. Zaključujemo da matrica M^2 ima $n - n'$ nultih svojstvenih vrednosti koje odgovaraju svojstvenim vektorima $V^a = T^a v \neq 0$. Dakle, u teoriji će se pojaviti $n - n'$ bezmasenih skalarnih polja. Njih nazivamo Goldstonovim bozonima.

5.5 BEH mehanizam

Videli smo u prethodnom poglavljtu da spontano narušenje globalne simetrije generiše skalarne bezmasene čestice, Goldstonove bozone. Šta se dešava u slučaju lokalne simetrije i da li ovaj mehanizam može da generiše masu gradijentnim poljima?

BEH (Brout-Englert-Higgs) mehanizam je spontano narušenje lokalne simetrije. Objasnićemo ga na primeru lokalne $U(1)$ simetrije sa jednim kompleksnim poljem. Složeniji primer narušenja lokalne neabelove simetrije, biće razmatran kasnije, u glavi 6.

Podjimo od gustine lagranžijana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (5.5.1)$$

Ova gustina lagranžijana opisuje kompleksno skalarno polje $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, gde su ϕ_1 i ϕ_2 dva realna skalarna polja, koje interaguje sa elektromagnetnim poljem A_μ i sa samim sobom. Interakcija sa poljem A_μ data je preko kovarijantnog izvoda

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi , \quad (5.5.2)$$

dok je medjusobna interakcija polja ϕ_1 i ϕ_2 data članom $\lambda(\phi^* \phi)^2$, gde je λ pozitivna konstanta. Primetimo da maseni član za polja ϕ_1 i ϕ_2 nema odgovarajući znak, pa maseni (čestični) spektar teorije nije jasan. Konačno, kinetički član za elektromagnetno polje je $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, gde je

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.5.3)$$

tenzor jačine polja. Gustina lagranžijana (5.5.1) je invarijantna na lokalne $U(1)$ transformacije

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta , \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

gde je parametar $\theta = \theta(x)$ funkcija koordinata prostor-vremena. Potencijal je

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 . \quad (5.5.5)$$

Lokalni ekstremumi potencijala su odredjeni sa

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} &= -\mu^2 \phi + 2\lambda(\phi^\dagger \phi) \phi = 0 , \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda(\phi^\dagger \phi) \phi^\dagger = 0 .\end{aligned}\quad (5.5.6)$$

Kada je $\mu^2 > 0$, dobijamo da je minimum potencijala u

$$\phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} . \quad (5.5.7)$$

Koristeći zapis kompleksnog polja preko realnih polja

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} ,$$

jednačina (5.5.6) se svodi na

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} . \quad (5.5.8)$$

Kao i u slučaju globalne simetrije, i ovde dobijamo kružnicu degenerisanih lokalnih minima. Jednačine (5.5.6) i (5.5.8) su invarijantne na $U(1)$, odnosno $SO(2)$ transformacije respektivno. Izborom jedne tačke sa kružnice (5.5.8) za lokalni minimum, ova simetrija je spontano narušena.

Izaberimo tačku

$$\langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle = v \quad \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = 0 . \quad (5.5.9)$$

za osnovno stanje teorije. Ovo osnovno stanje nije $U(1)$ invarijantno, tj. simetrija je spontano narušena. Spontanost se ogleda u činjenici da sistem sam izabere neku od tačaka sa kružnice za osnovno stanje, a izbor je potpuno proizvoljan.

Da bismo ispitali čestični spektar teorije uvodimo nova polja

$$\phi'_1 = \phi_1 - v, \quad \phi'_2 = \phi_2 ,$$

tako da je vakuumска очekivana vrednost novih polja nula, $\langle \phi'_i \rangle = 0$. Onda je

$$\phi = \frac{v + \phi'_1 + i\phi'_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^\dagger = \frac{v + \phi'_1 - i\phi'_2}{\sqrt{2}} .$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi &= [(\partial_\mu + igA_\mu)\phi^\dagger](\partial^\mu - igA^\mu)\phi \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu + igA_\mu)(v + \phi'_1 - i\phi'_2)](\partial^\mu - igA^\mu)(v + \phi'_1 + i\phi'_2) \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi'_1)^2 + (\partial_\mu \phi'_2)^2 - ig\partial_\mu(\phi'_1 - i\phi'_2)A^\mu(v + \phi'_1 + i\phi'_2) + \\ &\quad + igA_\mu(v + \phi'_1 - i\phi'_2)\partial^\mu(\phi'_1 + i\phi'_2) + v^2 g^2 A_\mu A^\mu + \dots] .\end{aligned}$$

Razvoj potencijala je isti kao u poglavlju 5.3, jednačina (5.3.9), pa je ukupna gustina lagranžijana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi'_1)^2 + (\partial_\mu \phi'_2)^2 + igA^\mu(v + \phi'_1 + i\phi'_2)\partial_\mu(\phi'_1 - i\phi'_2)] \\ & + \frac{v^2 g^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mu^2\phi'^2_1 \\ & - \lambda v\phi'_1(\phi'^2_1 + \phi'^2_2) - \frac{\lambda}{4}(\phi'^2_1 + \phi'^2_2)^2 + \dots .\end{aligned}\quad (5.5.10)$$

Uočimo da je gauge polje postalo maseno, sa masom

$$m(A) = vg .$$

Dobili smo takodje da je masa skalarnog polja (Higsov bozon) $m(\phi'_1) = \mu\sqrt{2}$, dok je polje ϕ'_2 bezmaseno. U slučaju globalne $U(1)$ simetrije, polje ϕ'_2 bi odgovaralo Goldstonovom bozonu. Analizu čestičnog spektra teorije (5.5.10) dodatno komplikuje član $gvA^\mu\partial_\mu\phi'_2$. On ukazuje na "mešanje" polja A_μ i ϕ'_2 , jer bi posle kvantovanja teorije dao doprinos "mešanom" propagatoru.

Prebrojmo na kraju stepene slobode³ pre i posle spontanog narušenja simetrije. Pre spontanog narušenja simetrije imali smo bezmaseno gauge polje A^μ (2 stepena slobode) i dva realna skalarna polja što je ukupno četiri stepena slobode. Posle narušenja simetrije polje A^μ je postalo maseno pa ima tri stepena slobode. Pored toga imamo i primovana polja pa je ukupan broj stepeni slobode 5. Ispostavlja se da je ovo neslaganje broja stepeni slobode prividno. Naime, može se pokazati da polje ϕ'_2 daje nulti doprinos matrici rasejanja. Kako je teorija invarijantna na lokalne transformacije, može se naći transformacija takva da polje ϕ'_2 može da se ukloni (odkalibriše) iz teorije. Primenom ove transformacije, prelazi se u unitarnu kalibraciju (unitarni "gauge"), u kojoj je čestični spektar teorije jasan i nema neslaganja u broju stepeni slobode pre i posle spontanog narušenja simetrije.

Primenimo ovo na naš primer. Parametrizujmo polje ϕ na sledeći način (polarna parametrizacija)

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x))e^{\frac{i\xi(x)}{v}} . \quad (5.5.11)$$

Za male oscilacije polja $H(x)$ i $\xi(x)$ se svode na ϕ'_1 i ϕ'_2 . Gradijentna transformacija na polje ϕ i gradijentno polje A_μ deluje kao

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) ,\end{aligned}\quad (5.5.12)$$

³Ovi stepeni slobode zapravo odgovaraju broju helicitetnih stanja: 1 za realno skalarno polje, 2 za kompleksno polje, 2 za bezmaseno vektorsko polje i 3 za maseno vektorsko polje.

odnosno

$$\begin{aligned} H' &= H, \\ \xi' &= \xi + v\theta, \\ A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta(x) . \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

Ako umesto potencijala A_μ uvedemo polje $B_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi$, vidi se da je polje B_μ invarijantno na transformacije (5.5.12), odnosno (5.5.13). Ako još dodatno izaberemo da je parametar transformacije $\theta = -\xi/v$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} H' &= H , \\ \xi' &= 0 , \\ A'_\mu &= B_\mu . \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Ovim izborom parametra fiksirali smo gradijentnu transformaciju i prešli smo u unitarnu kalibraciju (unitarni "gauge")

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi_u(x) = e^{-\frac{i\xi(x)}{v}}\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) , \\ A_\mu &\rightarrow B_\mu = A_\mu - \frac{1}{gv}\partial_\mu\xi(x) . \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Kovarijantni izvod se transformiše kao i samo polje, pa je u unitarnoj kalibraciji dat sa

$$\begin{aligned} D_\mu\phi \rightarrow (D_\mu\phi)_u &= e^{-\frac{i\xi(x)}{v}}(D_\mu\phi) \\ &= (\partial_\mu - igB_\mu)\phi_u . \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Ako sada transformacije (5.5.15) i (5.5.16) zamenimo u gustinu lagranžijana (5.5.10), dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu\phi_u^\dagger + igB_\mu\phi_u^\dagger)(\partial^\mu\phi_u - igB^\mu\phi_u) + \mu^2\phi_u^\dagger\phi_u - \lambda(\phi_u^\dagger\phi_u)^2 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{2}g^2B_\mu B^\mu(v^2 + 2vH + H^2) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2}(v + H)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + H)^4 - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \mu^2H^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2}g^2v^2B_\mu B^\mu + \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2B_\mu B^\mu H(H + 2v) - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 , \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

gde je $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Vidimo da je polje B_μ postalo maseno i $m(B) = gv$. Higsovo polje H takodje ima masu, $m(H) = \mu\sqrt{2}$, dok je polje ξ nestalo tj. odkalibrisano je. Ono bi bilo Goldstonov bozon da je simetrija globalna. U žargonu se kaže da je gradientno polje pojelo Goldstonov bozon i tako povećalo broj stepeni slobode za jedan, tj. postalo je maseno. Analiza broja stepeni slobode data je u tabeli 5.1.

pre SNS	st. slobode	posle SNS	st. slobode
ϕ_1	1	H maseno	1
ϕ_2	1	B_μ maseno	3
A_μ	2		
ukupno	4	ukupno	4

Tabela 5.1: Stepeni slobode pre i posle spontanog narušenja simetrije.

Možemo zaključiti da mehanizam spontanog narušenja lokalne simetrije generiše masu gradijentnih polja. Ovo nam nagoveštava da će teorija slabe interakcije, pored gradijentne simetrije i Jang-Milsovog dejstva, sadržati i mehanizam spontanog narušenja simetrije. U narednim poglavljima ćemo videti kako se ovo konkretno realizuje.

Zadaci

5.1. Dat je lagranžijan

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2,$$

gde je ϕ kompleksno skalarno polje. Pokazati da je ovaj lagranžijan invarijantan na globalnu $U(1)$ simetriju. Naći vakuum teorije pod pretpostavkom da je $\mu^2 < 0$. Birajući vakuum kao $\langle \phi \rangle_0 = v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ analizirati maseni spektar teorije i proveriti važenje Goldstonove teoreme.

5.2. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^T (\partial^\mu \phi) - \frac{\mu^2}{2} \phi^T \phi = \frac{\lambda}{4} (\phi^T \phi)^2$, gde je ϕ triplet realnih skalarnih polja grupe $SO(3)$.

a) Pokazati da je \mathcal{L} invarijantan na globalne $SO(3)$ transformacije i odrediti Neter struju.

b) Naći minimum potencijala. Birajući vakuum kao $\langle \phi \rangle_0 = (0, 0, v)^T$, izvršiti smenu $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle_0 + \phi'$ u lagranžijanu i ispitati maseni spektar teorije za $\mu^2 < 0$. Odrediti koji su generatori očuvani.

c) Koristeći smenu $\phi = e^{i \frac{\xi_i T^i}{v}} (0, 0, v + \eta)^T$, gde su T^i , $i = 1, 2$ generatori koji narušavaju vakuum $\langle \phi \rangle_0$, a ξ_i , $i = 1, 2$ i η su nova polja, ispitati maseni spektar teorije.

5.3. Dat je lagranžijan: $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^+ (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^+ \phi - \lambda (\phi^+ \phi)^2$, gde je ϕ dublet kompleksnih skalarnih polja.

a) Pokazati da je \mathcal{L} invarijantan na globalnu $SU(2)$ simetriju; naći Neter struju i proveriti da li je ona očuvana.

b) Napisati lagranžijan koji se dobija lokalizacijom $SU(2)$ simetrije.

c) Za lagranžijan pod b) uzeti da je $\mu^2 < 0$ i analizirati maseni spektar teorije, birajući vakuum kao: $\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v, 0)^T$. Prokomentarisati broj stepeni slobode pre i posle spontanog narušenja simetrije. Eksplicitno izraziti gradijentne transformacije pomoću kojih suvišna polja mogu da se odkalibrišu.

5.4. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2$, gde je ϕ kompleksno skalarno polje.

- a) Pokazati da je dati lagranžijan invarijantan u odnosu na $U(1)$ globalne transformacije ($\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi$) i naći očuvanu struju.
- b) Napisati lagranžijan koji se iz zadatog dobija lokalizacijom $U(1)$ simetrije.
- c) Pokazati da je jednačina kretanja za gradijentno polje uvedeno pod b) u statickom slučaju i pri kalibraciji $A_0 = 0$ oblika $\vec{\nabla} \times \vec{B} = e \vec{J}$, gde je \vec{J} struja materije za $U(1)$ lokalne transformacije.
- d) Pokazati, da ako je $\mu^2 < 0$ (spontano narušenje simetrije) i $\langle \phi \rangle_0 = v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$, onda je $\vec{J} = e^2 v^2 \vec{A}$ i magnetno polje \vec{B} zadovoljava jednačinu $\Delta \vec{B} = e^2 v^2 \vec{B}$ (Majznerov efekat).

5.5. Dat je lagranžijan $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^T (\partial^\mu \phi) - \frac{\mu^2}{2} \phi^T \phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^T \phi)^2$, gde je ϕ triplet realnih skalarnih polja grupe $SO(3)$.

- a) Pokazati da je \mathcal{L} invarijantan na globalne $SO(3)$.
- b) Napisati lagranžijan koji se iz zadatog dobija lokalizacijom $SO(3)$ simetrije.
- c) Birajući vakuum kao $\langle \phi \rangle_0 = (0, v, 0)^T$ izvršiti smenu $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle_0 + \phi'$ u lagranžijanu dobijenom pod b) i ispitati maseni spektar teorije za $\mu^2 < 0$. Odrediti koji su generatori očuvani. Komentarisati broj stepeni slobode i napisati gradijentnu transformaciju kojom se suvišna polja mogu otkalibrisati.

Glava 6

Standardni model elektroslabe interakcije

U prethodnim glavama smo se upoznali sa primerima gradijentnih teorija, kao i sa mehanizmom spontanog narušenja simetrije. U ovoj glavi ćemo, koristeći razvijeni formalizam, izložiti model elektroslabe intrakcije, koji uspešno opisuje slabu i elektromagnetnu interakciju. Posle istorijskog pregleda razvoja različitih modela slabe interakcije, detaljno ćemo opisati Glešou-Vajnberg-Salam (S. Glashow, S. Weinberg, A. Salam) model elektroslabe interakcije. U okviru njega ćemo diskutovati i BEH mehanizam, koji dovodi do narušenja simetrije i razdvajanja elektroslabe interakcije na slabu i elektromagnetnu interakciju. Na kraju ove glave ćemo razmotriti neke procese karakteristične za ovaj model.

Standardni model elektroslabih interakcija je izložen u većini knjiga iz fizike čestica. Preporučujemo vam sledeće udžbenike [6, 9, 8, 10].

6.1 Istoriski pregled teorije slabe interakcije

Jedan od tri tipa radioaktivnog raspada jezgra je β^- raspad. Pri ovom raspadu jedan od neutrona iz jezgra se raspada na proton, elektron i elektronski antineutrino:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Za ovaj proces je odgovorna slaba interakcija. Fermi (E. Fermi) je 1934. godine predložio teoriju koja objašnjava β raspad. U Fermijevoj teoriji, lagranžian koji opisuje ovoj proces je dat sa

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{p}\gamma_\mu n)(\bar{e}\gamma^\mu\nu) + h.c. , \quad (6.1.1)$$

gde je $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ Fermijeva konstanta. U ovom izrazu smo Dirakove spinore protona, neutrona, elektrona i neutrina obeležili sa p, n, e i ν , respektivno. Fermijev lagranžian je proizvod dve vektorske struje. Jedna struja je hadronska, a druga leptonska. Postoje tri vrste slabih procesa. Raspad neutrona je semileptonski raspad jer u njemu,

pored leptona, učestvuju i hadroni. U ovu klasu raspada spadaju i mnogi drugi procesi, kao na primer:

$$K^+ \rightarrow \begin{cases} \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu, \\ \pi^0 + e^+ + \bar{\nu}_e, \\ \mu^+ + \nu_\mu, \\ e^+ + \nu_e, \end{cases} . \quad (6.1.2)$$

Postoje i čisto leptonski slabti procesi. Primer je raspod miona:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e .$$

Treća grupa slabih procesa su hadronski slabti procesi, na primer

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 . \quad (6.1.3)$$

Dvadesetak godina posle Fermijeve teorije β raspada, eksperimentalno je otkriveno da je u slabim interakcijama narušena parnost. Teorijsko predviđanje ovog narušenja dali su Li i Yang (T. D. Lee, C. N. Yang), dok je eksperiment koji je potvrdio predviđanje uradjen u grupi naučnice Wu (C. S. Wu). Ova važna eksperimentalna činjenica se morala uključiti u teorijski model slabih interakcija. Odgovarajući lagranžijan onda ne može biti invarijantan na parnost. Fajnman i Gelman su predložili modifikaciju Fermijeve teorije. Lagranžijan interakcije opet proizvod dve nanelektrisane struje

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu , \quad (6.1.4)$$

ali zbog narušenja parnosti struja J^μ je razlika pravog vektora V^μ i aksijalnog vektora A^μ . Preciznije, struja je zbir leptonske i hadronske struje

$$J^\mu = J_{lep}^\mu + J_{hadr}^\mu . \quad (6.1.5)$$

Leptonska struja je

$$J_{lep}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu , \quad (6.1.6)$$

dok je hadronska

$$J_{had}^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d' + \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) s' . \quad (6.1.7)$$

Članovi tipa $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ su pravi vektori, dok su $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ aksijalni vektori. U izrazu za hadronsku struju figurišu polja s' i d' koji predstavljaju linearne kombinacije s i d kvarkova:

$$\begin{aligned} d' &= \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ s' &= \cos \theta_c s - \sin \theta_c d . \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Ugao $\theta_c = 13^0$ se naziva Cabibov (N. Cabibbo) ugao. On je fenomenološki parametar, odgovoran za mešanje kvarkova. Zbog oblika struja ovaj model se naziva $V-A$ teorija.

Fermijev model i $V-A$ model slabih interakcija nisu renormalizabilni, niti unitarni. To je glavni nedostatak ova dva modela.

Unitarnost S matrice je povezana sa činjenicom da verovatnoća da sistem iz početnog stanja, $|i\rangle$ predje u sva moguća stanja finalna stanja $|f\rangle$ iznosi 1, tj.

$$\sum_f |\langle f | S | i \rangle|^2 = 1. \quad (6.1.9)$$

Odavde je

$$\sum_f \langle i | S^\dagger | f \rangle \langle f | S | i \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle = 1, \quad (6.1.10)$$

odnosno $S^\dagger S = I$. Dakle S matrica je unitarna.

Razmatrajmo rasejanje dve čestice, impulsa p_1 i p_2 , u više novih čestica. Za bezspinske čestice ili za čestice po čijim spiskim stanjima smo usrednjili, diferencijalni efikasni presek za rasejanje u sistemu centra mase ima oblik

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(s, \theta)|^2, \quad (6.1.11)$$

gde je s kvadrat energije u sistemu centra masa, tj. $s = (p_1 + p_2)^2$. Funkciju $f(s, \theta)$ možemo razviti po bazisu Ležandrovih polinoma

$$f(s, \theta) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta), \quad (6.1.12)$$

gde su $a_l(s)$ koeficijenti koji zavise od s . Unitarnost S matrice nameće uslove na koeficijente $a_l(s)$. Mereći efikasne preseke, mogu se ovi uslovi proveriti, pa se tako proverava i unitarnost S matrice.

Renormalizabilnost je vezana za ponašanje teorije na visokim energijama. Amplituda prelaza za neki proces, pored dijagrama bez petlji ("tree level diagrams"), uključuje u višim redovima teorije perturbacije i dijagrame sa petljama. U prvom redu teorije perturbacije pri rasejanju elektrona na Kulonovom potencijalu imamo jedan dijagram. U trećem redu (po konstanti interakcije e) imamo sedam dijagrama koji uključuju verteksnu korekciju, polarizaciju vakuma i sopstvenu energiju elektrona. Usled interakcije, masa i nanelektrisanje elektrona dobijaju korekcije. Polazni parametri¹ su masa i nanelektrisanje elektrona m_0 i e_0 . Zbog doprinosa dijagrama višeg reda oni prelaze u fizičke parametre

$$\begin{aligned} m &= m_0 + \delta m + \dots \\ e &= e_0 + \delta e + \dots . \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Veličine δe i δm su korekcije nanelektrisanja i mase elektrona u prvom redu teorije perturbacije (jedna petlja). Tačke obeležavaju doprinose u višim redovima teorije perturbacije. Polazni parametri se nazivaju goli parametri. Slično se dešava i sa elektronom u kristalnoj

¹To su parametri koji figurišu u lagranžijanu.

rešetki. Usled interakcije njegova masa se menja u odnosu na masu van rešetke. U teoriji polja dijagrami višeg reda su divergentni. To znači da su korekcije δm i δe divergentne. Da bismo dobili konačnu teoriju uzima se da su goli parametri divergentni. Teorija je renormalizabilna ukoliko goli parametri teorije mogu da apsorbuju beskonačnosti koje se javljaju u dijagramima sa petljama, i postanu fizički parametri. Napomenimo da se i sama polja renormalizuju u teoriji.

Da bi se popravile loše osobine Fermijevog i $V-A$ modela, konstruisan je IVB ("intermediate vector boson") model. Po analogiji sa elektrodinamikom, uvedeno je maseno vektorsko polje W^μ koje prenosi slabu interakciju. Lagranžian interakcije je proizvod toga polja i struje materije

$$\mathcal{L} = -g J^\mu W_\mu + c.c. , \quad (6.1.14)$$

gde je g konstanta interakcije. Ovaj model ima bolje ponašanje na visokim energijama od prethodno opisana dva modela, ali je i on nerrenormalizabilan.

6.2 Elektroslaba interakcija leptona

Rekli smo na početku ove glave da su model elektroslabe interakcije formulisali Glešou, Vajnberg i Salam oko 1964. godine. Za svoj rad su 1979. godine dobili Nobelovu nagradu.

Polazna tačka u konstrukciji modela elektroslabe interakcije je identifikacija grupe simetrije i određivanje reprezentacija u kojima se nalaze polja. Za početak ćemo razmatrati samo prvu generaciju leptona, koju čine elektron i elektronski neutrino. Uzećemo da su i elektron i neutrino bezmaseni. Talasnu funkciju elektrona² e ćemo dekomponovati u komponentu leve kiralnosti

$$e_L = P_L e = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e$$

i komponentu desne kiralnosti

$$e_R = P_R e = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e .$$

Dakle,

$$e = e_L + e_R . \quad (6.2.15)$$

Ove komponente su svojstvene funkcije operatora kiralnosti

$$\begin{aligned} \gamma_5 e_L &= -e_L \\ \gamma_5 e_R &= e_R . \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Na početku glave 2 smo rekli da je eksperimentalno utvrđeno da svi neutrini imaju negativan helicitet, to jest levu kiralnost, a da neutrino desne kiralnosti ne postoji, $P_R \nu_e =$

²Uместо ψ_e pisaćemo e i analogno za ostale čestice.

$0, P_L \nu_e = \nu_e$. Odsustvo desnog neutrina nam govori da je parnost u elektroslabim interakcijama narušena.

Levi (desni) kiralni spinor pri Lorencovim transformacijama ostaje levi (desni) spinor, jer matrica γ_5 komutira sa generatorima Lorencovih transformacija $\sigma_{\mu\nu}$. Pri prostornoj inverziji Dirakov spinor se transformiše prema

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \rightarrow \gamma_0 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}. \quad (6.2.17)$$

Drugim rečima, parnost levi spinor prebacuje u desni i obrnuto. Teorija koja je invarijantna na parnost mora da sadrži i levi i desni spinor. Takav je slučaj sa kvantnom elektrodinamikom. Međutim, slaba interakcije nisu invarijantne na parnost, pa se u standarnom modelu elektroslabe interakcije levi i desni spinori tretiraju različito.

Grupa simetrije standardnog modela elektroslabe interakcije je $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Levi elektron i elektronski neutrino čine dublet $SU(2)_L$ grupe

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (6.2.18)$$

dok je desni elektron e_R singlet. Dakle, pri $SU(2)_L$ transformacijama dublet i singlet se transformišu kao

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L' = e^{i\frac{\theta^a \sigma^a}{2}} L, \\ e_R &\rightarrow e'_R = e_R. \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Vidimo da $SU(2)_L$ transformacija može da e_L transformiše u ν_e , ali ne može u e_R . Grupa $SU(2)$ je tzv. grupa slabog izospina. On nema nikakve veze sa izospinom koji smo ranije uveli kod jakih interakcija. Slabi izospin singleta je 0, dok je treća komponenta slabog izospina neutrina $\frac{1}{2}$, a levog elektrona $-\frac{1}{2}$. Pored izospina uvešćemo i tzv. slabi hipernaboj, Y . On je generator $U(1)_Y$ grupe i definisan je preko nanelektrisanja

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (6.2.20)$$

$U(1)_Y$ transformacije polja su

$$\begin{aligned} L &\rightarrow e^{i\beta \frac{Y_L}{2}} L \\ e_R &\rightarrow e^{i\beta \frac{Y_R}{2}} e_R, \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

gde je β parametar. Koristeći (6.2.20), dobijamo da je za levi dublet slabi hipernaboj $Y_L = -1$, dok je za e_R slabi hipernaboj $Y_R = -2$. Gustina lagranžijiana

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{L}\gamma^\mu \partial_\mu L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R \quad (6.2.22)$$

je invarijantna na $SU(2)_L$ globalne transformacije i na $U(1)_Y$ transformacije. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= i(\bar{\nu}_e \bar{e}_L) \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R \\ &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e .\end{aligned}\quad (6.2.23)$$

Lokalizaciju $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ simetrije postižemo zamenom običnog izvoda u (6.2.22) kovarijantnim izvodom. Tako dobijamo leptonski sektor standardnog modela za prvu generaciju fermiona

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{lep}} &= i\bar{L} \gamma^\mu D_\mu L + i\bar{e}_R \gamma^\mu D_\mu e_R \\ &= i\bar{L} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_L}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a) L \\ &\quad + i\bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_R}{2} B_\mu) e_R .\end{aligned}\quad (6.2.24)$$

Uveli smo četiri gradijentna polja: W_μ^a , $a = 1, 2, 3$ i B_μ . Kinetički član za gradijentna polja je

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} , \quad (6.2.25)$$

gde su jačine polja

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c , \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu .\end{aligned}\quad (6.2.26)$$

Uključivanjem preostale dve generacije leptona imamo sledeće multiple polja materije:

$$L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L , \quad \mu_R , \quad L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L , \quad \tau_R . \quad (6.2.27)$$

Mionski neutrino i levi mion su u dubletu, a desni mion je u singletu grupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Slično je i sa taonom i njegovim neutrinom. Lagranđijan celokupnog leptonskog sektora standardnog modela je onda

$$\mathcal{L}_0 = i \sum_{i=1}^3 \bar{L}_i \gamma^\mu D_\mu L_i + i \sum_{i=1}^3 \bar{l}_{iR} \gamma^\mu D_\mu l_{iR} , \quad (6.2.28)$$

gde indeks i prebrojava tri generacije leptona, tj. $L_1 = L_e$, $L_2 = L_\mu$, $L_3 = L_\tau$, $l_1 = e$, $l_2 = \mu$ i $l_3 = \tau$.

6.2.1 BEH mehanizam

Već smo ranije rekli da su slabe interakcije kratko dometne. Iz ove činjenice proizilazi da su mase vektorskih bozona W^\pm i Z^0 koji prenose slabu interakciju, velike. One su

oko $80\text{-}90\text{GeV}$, dok je odgovarajuća skala slabih interakcija 10^{-17}m . Takođe, elektron, mion i taon imaju masu, dok su mase neutrina vrlo male. Masene članove za ove čestice nismo uključili u lagranžijan jer oni nisu invarijantni na $SU(2)_L \times U_Y(1)$ simetriju. Sve navedene čestice dobijaju masu spontanim narušenjem gradijentne simetrije, to jest BEH mehanizmom³.

Simetriju ćemo narušiti pomoću skalarnog polja čija vakumska očekivana vrednost je različita od nule. Uvodimo dublet skalarnih kompleksnih polja

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} , \quad (6.2.29)$$

gde je

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} , \\ \phi^0 &= \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Polja ϕ_1, \dots, ϕ_4 su realna polja. Naelektrisanje gornje komponente dubleta, ϕ^+ je $+1$, dok je polje ϕ^0 elektro neutralno. Slabi hipernaboj komponente ϕ^+ je

$$Y(\phi^+) = 2(Q - I_3) = 1 .$$

Slično se vidi da je hipernaboj donje komponente jednak jedinici. Dakle, hipernaboj Higsovog dubleta je $Y(\phi) = 1$. Da bismo spontano narušili $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ simetriju uvešćemo dodatni član u lagranžijan:

$$\mathcal{L}_{\text{sc}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 . \quad (6.2.30)$$

Kovarijantni izvod polja ϕ je dat sa

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a \right) \phi . \quad (6.2.31)$$

Lagranžijan (6.2.30) je invarijantan na lokalne $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ transformacije.

Ekstreme potencijala odredujemo iz uslova

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = (-\mu^2 + 2\lambda(\phi^\dagger \phi))\phi = 0 . \quad (6.2.32)$$

Za $\mu^2 > 0$, minimum potencijala je određen sa

$$\phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} .$$

³Zapravo, putem BEH mehanizma masu dobijaju leptoni, dok neutrini ostaju bezmaseni. Problem uvođenja mase neutrina u model elektroslabe interakcije je još uvek otvoren.

Ovaj uslov je ekvivalentan sa

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = v^2 .$$

Vidimo da postoji beskonačno puno vakuma. Izborom jedne tačke, tj. jedne konfiguracije, mi spontano narušavamo simetriju. Naš izbor za osnovno stanje je

$$\langle \hat{\phi} \rangle_0 \equiv \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} , \quad (6.2.33)$$

gde je v realan broj. Ovakav izbor obezbedjuje da elektromagnetno polje ostaje bezmaseno i posle narušenja simetrije.

Sada ćemo odrediti simetriju vakuma. Promena polja ϕ pri infinitezimalnim $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ transformacijama je

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= e^{i\frac{\sigma^a \theta^a}{2} + i\frac{\beta Y}{2}} \phi \\ &\approx \phi + i\left(\frac{\sigma^a \theta^a}{2} + i\frac{\beta Y}{2}\right) \phi . \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

Infinitezimalna promena vakuma je

$$\begin{aligned} \delta\phi_0 &= i\left(\frac{\sigma^a \theta^a}{2} + i\frac{\beta Y}{2}\right) \phi_0 \\ &= \frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_1 - i\theta_2 \\ \beta Y - \theta_3 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Invarijantnost vakuma $\delta\phi_0 = 0$ daje sledeće uslove na parametre grupe simetrije: $\theta_1 = \theta_2 = 0$ i $\beta = \theta_3$. Dakle, vakuum je invarijantan na transformacije

$$e^{i\theta_3\left(\frac{\sigma_3}{2} + \frac{Y}{2}\right)} \phi_0 = e^{i\theta_3 Q} \phi_0 . \quad (6.2.36)$$

Simetrija vakuma je fazna $U(1)$ simetrija, čiji je generator električno nanelektrisanje Q , $U(1)_Q$. Ovo je važno, jer želimo da foton ostaje bezmasen. Potpuno ekvivalentno simetriju vakuma vidimo iz sledećeg razmatranja. Generatori $\frac{\sigma^1}{2}$, $\frac{\sigma^2}{2}$, $\frac{\sigma^3}{2}$, $\frac{Y}{2}$ narušavaju simetriju vakuma, jer je npr.

$$\sigma^1 \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 . \quad (6.2.37)$$

Medjutim, transformacija čiji je generator linearna kombinacija treće komponente izospina i hipernaboga $I_3 + \frac{Y}{2}$ ne menja vakum. Preciznije, sa generatora $\frac{\sigma^1}{2}$, $\frac{\sigma^2}{2}$, $\frac{\sigma^3}{2}$, $\frac{Y}{2}$ prelazimo na novi skup generatora $\frac{\sigma^1}{2}$, $\frac{\sigma^2}{2}$, $Q = \frac{1}{2}(\sigma^3 + Y)$, $\frac{1}{2}(\sigma^3 - Y)$. Nanelektrisanje Q na vakuum deluju kao

$$Q\phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 . \quad (6.2.38)$$

Dakle

$$e^{i\theta Q}\phi_0 = \phi_0 . \quad (6.2.39)$$

Ovo znači da smo na nivou osnovnog stanja polaznu simetriju $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ narušili do $U(1)_Q$. Generator ove simetrije je nanelektrisanje, pa je posle narušenja očuvana simetrija elektromagnetne interakcije.

Sledeći korak je parametrizacija polja ϕ , koja predstavlja razvoj oko vakuuma. Polje ϕ parametrizujemo na sledeći način

$$\begin{aligned} \phi &= e^{\frac{i}{2v}(\sigma^1\xi^1(x)+\sigma^2\xi^2(x)+(\sigma^3-Y)\xi^3(x))} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

Uveli smo nova realna polja $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ i $H(x)$. Sada ćemo napraviti gradijentnu transformaciju

$$\phi \rightarrow \phi' = U\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \quad (6.2.41)$$

Pri ovoj transformaciji sa polja ϕ prelazimo na novo polje ϕ' koje sadrži samo polje H . Tri polja ξ_a su otkalibrisana. Kalibraciona transformacija deluje na sva polja u teoriji:

$$\begin{aligned} W_\mu^a &\rightarrow W'_\mu^a \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu \\ L &\rightarrow L' \\ e_R &\rightarrow e'_R . \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

U daljoj analizi nećemo pisati primove na poljima.

Prelazak sa polja ϕ na ϕ' je fiksiranje kalibracije. Kalibracioni uslov je $\xi_1(x) = \xi_2(x) = \xi_3(x) = 0$ i poznat je kao unitarni kalibracioni uslov⁴.

Nadjimo prvo kovarijantni izvod u unitarnoj kalibraciji

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \left(\partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu H - i \frac{g_1}{2} (v+H) B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^3 (v+H) \right) . \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

Lagranđian $\mathcal{L}_{\text{scal}}$ je onda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scal}} &= \frac{1}{2} (\partial H)^2 - \mu^2 H^2 + \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} \\ &+ \frac{v^2}{8} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 + \dots , \end{aligned} \quad (6.2.44)$$

⁴Postoji više različitih klaibracionih uslova koji se mogu izabrati. Prednost unitarnog kalibracionog uslova je što se u njemu čestični spektar teorije jasno vidi. Sa druge strane, renormalizabilnost se pokazuje uz 't Hooft-Fajnmanovom (G. 't Hooft, R. Feynman) kalibracioni uslov.

gde smo izostavili interakcione članove i uveli kompleksna vektorska polja

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \\ W_\mu^\dagger &= \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

Često se koristi sledeća notacija $W_\mu^- = W_\mu$, $W_\mu^+ = W_\mu^\dagger$. Iz (6.2.44) vidimo da je masa Higsovog bozona $m_H = \sqrt{2}\mu$. Gauge bozoni W^\pm su takodje postali maseni; njihova masa je

$$M_W = \frac{g_2 v}{2}.$$

Poslednji član u (6.2.44) zahteva dalju analizu. On može biti prepisan u obliku

$$\frac{v^2}{8}(g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 = \frac{1}{2} (B_\mu \ W_\mu^3) M^2 \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{\mu 3} \end{pmatrix}, \quad (6.2.46)$$

gde je matrica M^2 data sa

$$M^2 = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.2.47)$$

Svojstvene vrednosti ove matrice su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \frac{v^2}{4}(g_1^2 + g_2^2)$. Rotacijom za ugao θ_W (Vajnbergov ugao) ova matrica se dijagonalizuje. Uvedimo

$$\begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{\mu 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}, \quad (6.2.48)$$

gde su Z^μ i A^μ nova polja. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.2.49)$$

gde je

$$\begin{aligned} A &= (g_1 \cos \theta_W - g_2 \sin \theta_W)^2, \\ B &= -g_1 g_2 \cos(2\theta_W) + (g_2^2 - g_1^2) \frac{1}{2} \sin(2\theta_W), \\ C &= (g_1 \sin \theta_W + g_2 \cos \theta_W)^2. \end{aligned}$$

U dijagonalnom bazisu (6.2.46) postaje

$$\frac{1}{2} (A_\mu \ Z_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{4}(g_1^2 + g_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}. \quad (6.2.50)$$

Vajnbergov ugao odredjen uslovom

$$\tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2} , \quad (6.2.51)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \sin \theta_W &= \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} , \\ \cos \theta_W &= \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} . \end{aligned}$$

Nova polja Z_μ i A_μ su fizička polja i data su sa

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{-g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} , \\ A_\mu &= \frac{g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} . \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

Dakle, lagranžijan skalarnog polja, posle spontanog narušenja simetrije, postaje

$$\mathcal{L}_{\text{scal}} = \frac{1}{2}(\partial H)^2 - \mu^2 H^2 + \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} \frac{v^2(g_1^2 + g_2^2)}{4} Z_\mu Z^\mu + \dots . \quad (6.2.53)$$

Tri tačke označavaju interakcione članove, koji nas u ovom delu razmatranja modela ne zanimaju.

Vidimo da je masa Z bozona

$$M_Z = \frac{v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2} , \quad (6.2.54)$$

dok je foton A^μ bezmasen. Masa Z^0 bozona je veća od mase nanelektrisanih bozona. To je u skladu sa eksperimentalnim rezultatom.

Prema tome, spontanim narušenjem lokalne simetrije postigli smo da su nanelektrisani gauge bozoni W^\pm , neutralni gauge bozon Z^0 i Higsov bozon dobili mase, dok je foton ostao bezmasen. Polja $\xi^a(x)$ su otkalibrirana, tj. ona ne predstavljaju fizičke stepene slobode.

6.2.2 Interakcija leptona sa gauge poljima

Interakcija leptona sa gauge poljim je sadržana u izrazu (6.2.24). Interakcioni član za prvu generaciju leptona je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= i \bar{L} \gamma^\mu \left(i \frac{g_1}{2} B_\mu - i g_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a \right) L + i \bar{e}_R \gamma^\mu i g_1 B_\mu e_R \\ &= - (\bar{\nu}_e \bar{e})_L \gamma^\mu \left(\frac{g_1}{2} B_\mu - \frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &\quad - g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R . \end{aligned} \quad (6.2.55)$$

Ovu interakciju čemo prepisati pomoću Dirakovih spinora. Tako dolazimo do

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & -\frac{g_1}{4}(\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu B_\mu + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eB_\mu) - \frac{g_1}{2}\bar{e}\gamma^\mu(1+\gamma_5)eB_\mu \\ & + \frac{g_2}{4}\left(\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^3 + \sqrt{2}\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ \right. \\ & \left. + \sqrt{2}\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^- - \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^3\right). \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

Dalje čemo polja B_μ i W_μ^3 izraziti preko fizičkih polja A^μ i Z^μ . Iz (6.2.56) sledi da je interakcija leptona sa gauge poljima sadrži tri sabirka:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{nael.str.}} + \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} + \mathcal{L}_{\text{em}}. \quad (6.2.57)$$

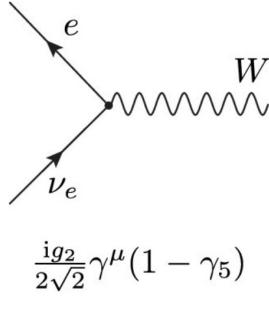
Sva tri sabirka u prethodnom izrazu su proizvodi gustine struje i gradijentnih polja. Prvi sabirak je

$$\mathcal{L}_{\text{nael.str.}} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}(\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-). \quad (6.2.58)$$

Iz (6.2.58) vidimo da je $e\nu_e W$ -verteks dat sa

$$\frac{ig_2}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5). \quad (6.2.59)$$

Ovaj verteks je prikazan na slici 6.1.

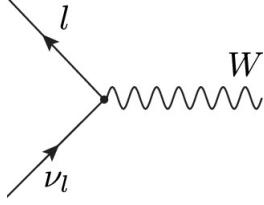


Slika 6.1: $e\nu_e W$ -verteks.

Kako postoji promena nanelektrisanja duž fermionske linije u ovom verteksu, struja je nanelektrisana. Naravno, ona je kuplovana sa nanelektrisanim gauge bozonima. Uključivanje druge i treće generacije leptona je pravolinijsko. Potrebno je da izrazu (6.2.58) dodamo još dva sabirka, koji su dobijeni zamenom elektrona i elektronskog neutrina česticama druge generacije leptona (mion i mionski neutrino), odnosno česticama iz treće generacije (taon, taonski neutrino). Verteksi izmedju leptona, odgovarajućih neutrina i W bozona su prikazani na slici 6.2.

Analizirajmo proces rasejanja

$$e^-(p_2) + \bar{\nu}_e(p_1) \rightarrow \mu^-(q_2) + \bar{\nu}_\mu(q_1).$$



$$\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5)$$

Slika 6.2: $l\nu_l W$ -verteks.

Matrični element za rasejanje je

$$S_{fi} = \langle \mu^-(q_2) \bar{\nu}_\mu(q_1) | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)} | e^-(p_2) \bar{\nu}_e(p_1) \rangle . \quad (6.2.60)$$

Doprinos ovom procesu u drugom redu teorije perturbacije je

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &\int d^4x_1 d^4x_2 \langle \mu^- \bar{\nu}_\mu | T(\bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu W_\mu^-)_1 (\bar{\nu}_e \gamma^\nu (1 - \gamma_5) e W_\nu^+)_2 | e^- \bar{\nu}_e \rangle \end{aligned} \quad (6.2.61)$$

Indeksi 1 i 2 označavaju koordinate x_1 , odnosno x_2 . Interakcioni lagranžijan (6.2.58) sadrži dva sabirka, što daje četiri člana kada ih pomnožimo. Samo član koji smo napisali u (6.2.61) daje nenule kontrakcije sa inicijalnim i finalnim stanjem. W bozoni se kontrahuju medjusobno i tako dobijamo propagator. Iz teorije rasejanja znamo da S matrični element ima oblik

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \frac{m_e}{\sqrt{VE_e}} \frac{m_\mu}{\sqrt{VE_\mu}} \frac{m_{\nu_e}}{\sqrt{VE_{\nu_e}}} \frac{m_{\nu_\mu}}{\sqrt{VE_{\nu_\mu}}} i\mathcal{M} . \quad (6.2.62)$$

Fajnmanov dijagram za ovaj proces je dat na slici 6.3. Fajnmanova amplituda za ovaj proces u najnižem redu teorije perturbacije je

$$i\mathcal{M} = \left(\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}(p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_2) \bar{u}(q_1) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(q_2) \frac{-i(g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / M_W^2)}{k^2 - M_W^2} . \quad (6.2.63)$$

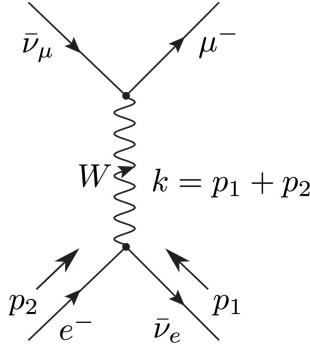
Četvoroimpuls W propagatora je $k^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$.

U nisko-energijskom limesu, $k^2 \ll M_W^2$ Fajnmanova amplituda postaje

$$i\mathcal{M} = \left(\frac{g_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{M_W^2} \bar{v}(p_1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(p_2) \bar{u}(q_1) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) v(q_2) . \quad (6.2.64)$$

Sa druge strane u okviru četvorofermionske $V-A$ teorije date sa lagranžijanom (6.1.4) dijagram za ovaj proces je dat na slici 6.4. Izjednačavanjem amplituda u oba modela, dobijamo

$$\left(\frac{g_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} , \quad (6.2.65)$$



Slika 6.3: Feynmanov dijagram za rasejanje $e^-(p_2) + \bar{\nu}_e(p_1) \rightarrow \mu^-(q_2) + \bar{\nu}_\mu(q_1)$.

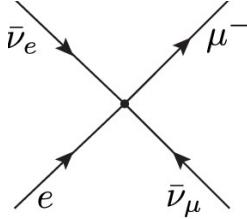
pa je

$$\frac{g_2^2}{8} = G_F M_W^2 / \sqrt{2} \quad (6.2.66)$$

odnosno

$$v = (G_F \sqrt{2})^{-1/2} \approx 250 \text{ GeV}. \quad (6.2.67)$$

Na osnovu ove jednostavne analize povezali smo konstantu g_2 sa Fermijevom konstantom, i odredili numeričku vrednost za v .



Slika 6.4: Rasejanje $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ u $V-A$ modelu.

Odredimo sada deo lagranžijana sa neutralnom strujom. Potrebno je da potencijale W_μ^3 i B_μ izrazimo preko fizičkih polja A_μ i Z_μ . Tako dolazimo do

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} &= \frac{1}{4} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu Z_\mu \\ &+ \frac{g_1^2}{2 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) e Z_\mu \\ &+ \frac{g_1^2 - g_2^2}{4 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e Z_\mu , \end{aligned} \quad (6.2.68)$$

odnosno

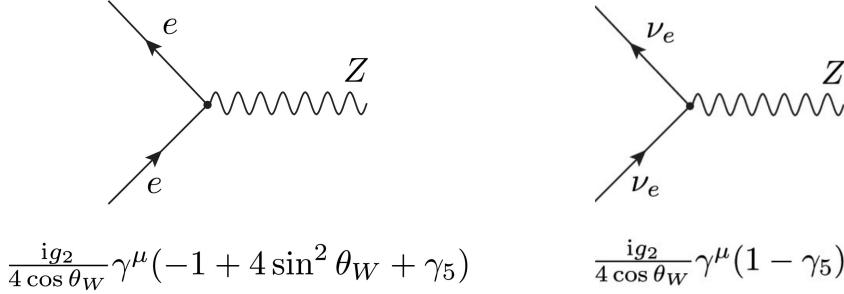
$$\mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} = \frac{g_2}{4 \cos \theta_W} \left(\bar{e} \gamma^\mu (-1 + 4 \sin^2 \theta_W + \gamma_5) e + \bar{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu \right) Z_\mu . \quad (6.2.69)$$

Prethodni izraz je oblika $\mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} = J_{\text{neutr.str.}}^\mu Z_\mu$, gde je $J_{\text{neutr.str.}}^\mu$ neutralna struja. Kod ove struje nema promene nanelektrisanja duž fermionske linije u verteksu, pa se ona naziva neutralnom. Dobili smo nove vertekse: eeZ -verteks je

$$\frac{ig_2}{4 \cos \theta_W} \gamma^\mu (-1 + 4 \sin^2 \theta_W + \gamma_5) , \quad (6.2.70)$$

a $\nu_e \nu_e Z$ -verteks je

$$\frac{ig_2}{4 \cos \theta_W} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) . \quad (6.2.71)$$



Slika 6.5: eeZ i $\nu\nu Z$ verteksi.

Ova dva verteksa su prikazana na slikama 6.5. Odgovarajući verteksi za drugu i treću generaciju leptona su isti kao i verteksi na slikama 6.5. Samo treba elektron zameniti mionom, odnosno taonom. Isto važi i za dijagrame sa neutrinima.

Slabi procesi preko W^\pm bozona (nanelektrisane struje) su bili poznati još od 1930ih godina i β raspada. Procesi preko Z^0 bozona nisu bili eksperimentalno vidjeni sve do 1973. godine. Procesi tipa $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ se na nižim energijama dominantno odvijaju razmenom fotona, to jest preko elektromagnetne interakcije. Da bi se detektovao deo procesa preko razmene Z^0 bozona, potrebne su visoke energije u eksperimentu. Drugi način da se neutralne struje vide su procesi sa neutrinima, videti zadatak 6.10. 1973. godine su neutralne struje detektovane u CERN-u, na "Gargamelle bubble chamber" eksperimentu. Ovo otkriće je predstavljalo jednu od prvih potvrda modela elektroslabe interakcije.

Poslednji sabirak u interakcionom lagranđijanu (6.2.57)

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (6.2.72)$$

predstavlja interakciju elektromagnetne struje $\bar{e} \gamma^\mu e$ sa poljem A^μ . Ovo potvrđuje da je A^μ zaista fotonsko polje. Takodje, vidimo da je električno nanelektrisanje elektrona

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} . \quad (6.2.73)$$

6.2.3 Mase leptona

Maseni član za elektron u lagranžijanu je

$$-m\bar{e}e = -m(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) . \quad (6.2.74)$$

Ovaj član nije invarijantan na $SU(2)_L$ transformacije, pa ga ne možemo direktno dodati u lagranžijan. Sa druge strane, znamo da je elektron masena čestica. Zahvaljujući spontanom narušenju lokalne simetrije, tj. BEH mehanizmu, gradijentni bozoni W^\pm, Z^0 su dobili mase. Isti mehanizam će kreirati mase elektrona, miona i taona. Ukupnom lagranžijanu elektroslabe interakcije dodaćemo Jukavin član za elektron

$$\mathcal{L}_{\text{Juk.}} = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}[\bar{e}_R(\Phi^\dagger L) + (\bar{L}\Phi)e_R] , \quad (6.2.75)$$

koji je $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ invarijantan. G_e je nova konstanta interakcije. Posle narušenja simetrije dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Juk.}} &= -\frac{G_e}{2}\left[\bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & v + H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}_L + (\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} e_R\right] \\ &= -\frac{G_e}{2}(v + H)(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \\ &= -\frac{G_e}{2}(v + H)\bar{e}e . \end{aligned} \quad (6.2.76)$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da je masa elektrona

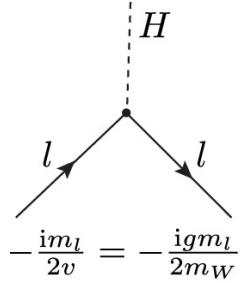
$$m_e = \frac{vG_e}{2} ,$$

dok je neutrino bezmasen⁵. Pored toga, dobili smo i interakciju elektrona sa Higsovim bozonom. Konstanta G_e je reda veličine 10^{-6} i vrlo je mala. Analogno se uvodi Jukavina interakcija za drugu i treću generaciju leptona. Kompletan Jukavin lagranžijan za leptone je

$$\mathcal{L}_{\text{Juk}} = -\sum_{i=1}^3 \frac{G_i}{\sqrt{2}}[\bar{l}_{Ri}(\Phi^\dagger L_i) + (\bar{L}_i\Phi)l_{iR}] . \quad (6.2.77)$$

U izrazu (6.2.77) prisutne su tri konstante interakcije, za svaku generaciju leptona po jedna. Masa miona je $m_\mu = vG_\mu/2$, a taona $\mu_\tau = vG_\tau/2$. Verteks interakcije Higsovog bozona i leptona prikazan je na slici 6.4.

⁵Danas znamo da neutrini nisu bezmaseni.

Slika 6.6: Verteks interakcije Higsovog bozona H i leptona.

6.2.4 Rezime leptonskog sektora elektroslabe interakcije

Narušenjem simetrije $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ do elektromagnetne $U(1)_Q$ simetrije, gradijentni bozoni W^\pm, Z^0 dobili su mase

$$\begin{aligned} M_{W^\pm} &= \frac{g_2 v}{2} \\ M_Z &= \frac{v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2}, \end{aligned} \quad (6.2.78)$$

dok je foton ostao bezmasen, jer je $U(1)_Q$ ostala očuvana simetrija. Higsov bozon je takođe dobio masu. Njegova masa je $m(H) = \sqrt{2}\mu$. Elektron je dobio masu $m_e = \frac{v G_e}{2}$, dok mu je nanelektrisanje

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (6.2.79)$$

Kombinujući prethodne formule dobijamo da je odnos mase W i Z bozona:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W. \quad (6.2.80)$$

Konstante interakcije g_1 i g_2 možemo izraziti preko nanelektrisanja elektrona i Vajnbergovog ugla

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{e}{\cos \theta_W}, \\ g_2 &= \frac{e}{\sin \theta_W}. \end{aligned} \quad (6.2.81)$$

Parametar ρ , određen masama W i Z bozona i Vajnbergovim uglom se eksperimentalno određuje. Teorijska vrednost ovog parametra je

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1. \quad (6.2.82)$$

Eksperimentalni rezultat za vrednost Wajnbergovog ugla je

$$\sin^2 \theta_W = 0,23120 \pm 0,0012 \Rightarrow \theta_W \approx 30^0, \quad (6.2.83)$$

dok je parametar $\rho = 0,998 \pm 0,005$. Masa W^\pm bozona je

$$M_W = 2^{-5/4} \frac{e}{\sqrt{G_F}} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37 \text{GeV}}{\sin \theta_W} \approx 80 \text{GeV}, \quad (6.2.84)$$

dok je masa Z bozona

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \approx 90 \text{GeV}. \quad (6.2.85)$$

Početni lagranžijan za leptone sadrži sledeće parametre: konstante interakcije g_1 , g_2 , parametre potencijala μ^2 , λ i Jukava konstante interakcije G_e , G_μ , G_τ . Umesto njih možemo uvesti

$$e, \sin \theta_W, M_W, M_H, m_e, m_\mu, m_\tau. \quad (6.2.86)$$

Gradijentni bozoni W^\pm, Z^0 su otktiveni u CERN-u 1984. godine na SPS eksperimentu pod rukovodstvom Rubije i Vandermera (C. Rubbia, S. Vendermeer), u sudarima proton-antiproton. Higsov bozon je otkriven 2012. godine u CERN-u na LHC eksperimentu. Masa Higsovog bozona je 125GeV, dok mu je spin nula.

6.3 Elektroslaba interakcija kvarkova

U prethodnom poglavlju analizirali smo leptonski sektor standardnog modela. U ovom poglavlju uključićemo i kvarkove u standardni model. Analiziraćemo interakcije kvarkova sa gradijentnim bozonima i Higsovim poljem.

6.3.1 Lagranžijan kvarkova

Prvi korak je definisanje lagranžijana za kvarkovska polja. Kao i u slučaju leptona, kvarkovska polja ćemo razložiti u leve i desne komponente:

$$\begin{aligned} u &= u_L + u_R, \\ d &= d_L + d_R, \\ &\dots \\ t &= t_L + t_R. \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Leve i desne komponente kvarkova nisu u istim multipletima $SU(2)_L \otimes U_Y(1)$ grupe simetrije. Leve komponente čine slabe izospinske dublete, dok su desne komponente kvarkova singleti $SU(2)_L$ grupe. Multipleti prve generacije kvarkova su

$$Q_{L1} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R. \quad (6.3.2)$$

Preostale dve generacije kvarkova su

$$Q_{L2} = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad c_R, \quad s_R, \quad (6.3.3)$$

$$Q_{L3} = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad t_R, \quad b_R . \quad (6.3.4)$$

Hipernaboj levih komponenti u, c , odnosno t kvarka je

$$Y(Q_L) = 2(Q - I_3) = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} . \quad (6.3.5)$$

Lako se vidi da je hipernaboj donjih komponenti iz dubleta takodje $1/3$. Dakle, hipernaboj levog dubleta je $1/3$. Hipernaboji singletnih stanja su

$$\begin{aligned} Y(u_R) &= Y(c_R) = Y(t_R) = \frac{4}{3} , \\ Y(d_R) &= Y(s_R) = Y(b_R) = -\frac{2}{3} . \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Uvešćemo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} u_{R1} &= u_R, \quad u_{R2} = c_R, \quad u_{R3} = t_R \\ d_{R1} &= d_R, \quad d_{R2} = s_R, \quad d_{R3} = b_R \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

i

$$Q_{Lm} = \begin{pmatrix} u_{Lm} \\ d_{Lm} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, 3 . \quad (6.3.8)$$

Deo lagranžijana standardnog modela koji opisuje kvarkove je analogan odgovarajućem leptonskom sektoru

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= i \sum_{m=1}^3 \bar{Q}_{Lm} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 \frac{Y(Q_{Lm})}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a W_\mu^a}{2} \right) Q_{Lm} \\ &+ i \sum_{m=1}^3 \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 \frac{Y(u_R)}{2} B_\mu \right) u_{Rm} \\ &+ i \sum_{m=1}^3 \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 \frac{Y(d_R)}{2} B_\mu \right) d_{Rm} . \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Maseni član nije uključen u lagranžijan jer on narušava gradijentnu simetriju. U narednom poglavlju ćemo objasniti kako kvarkovi dobijaju masu spontanim narušenjem simetrije.

6.3.2 Mase kvarkova

Kada bismo ponovili proceduru iz poglavlja 6.2.3, masu bi dobili d, s i t kvarkovi, dok bi u, c i t ostali bezmaseni. Međutim i ova tri kvarka su masena. Da bi svi kvarkovi, nakon spontanog narušenja simetrije, dobili masu, uvešćemo još jedan član u Jukavin lagranžijan koji će generisati mase u, c i t kvarka. Za njegovu konstrukciju nam je potreban još jedan dublet $SU(2)_L$ grupe.

Ako je

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (6.3.10)$$

dublet $SU(2)$ grupe onda je i $\tilde{\xi} = i\sigma_2\xi^*$ takodje dublet $SU(2)$ grupe. Pokažimo ovo eksplicitno. Spinor ξ se transformiše po dvodimenzionoj reprezentaciji $SU(2)$ grupe

$$\xi' = U\xi = e^{\frac{i}{2}\sigma^a\theta^a}\xi . \quad (6.3.11)$$

Lako se vidi da Paulijeve matrice zadovoljavaju

$$\sigma_2\boldsymbol{\sigma}^*\sigma_2 = -\boldsymbol{\sigma} , \quad (6.3.12)$$

odakle sledi da je

$$i\sigma_2U^*(-i\sigma_2) = U . \quad (6.3.13)$$

Spinor $\tilde{\xi}$ se transformišena sledeći način

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}' &= i\sigma_2\xi'^* = i\sigma_2U^*\xi^* \\ &= i\sigma_2U^*(-i\sigma_2)\tilde{\xi} \\ &= U\tilde{\xi} . \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Ovim smo pokazali da se konjugovani spinor transformiše na sledeći način

$$\xi^{**} = -i\sigma_2U(i\sigma_2)\xi^* . \quad (6.3.15)$$

Ova formula pokazuje da se spinori ξ i ξ^* transformišu po ekvivalentnim reprezentacijama. Dakle, za $SU(2)$ grupu fundamentalna i konjugovana reprezentacija su ekvivalentne⁶.

Higsov dublet

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (6.3.16)$$

se transformiše po 2-dimenzionoj IR $SU(2)_L$ grupe. Na osnovu pokazanog vidimo da se dublet

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (6.3.17)$$

takodje transformiše po dvodimenzionoj reprezentaciji $SU(2)$ grupe. Ova dva dubleta nisu nezavisna, tj. oba dubleta se sastoje od istih polja ϕ_1, \dots, ϕ_4 . Hipernaboj dubleta $\tilde{\phi}$ je $Y(\tilde{\phi}) = -1$.

Kvarkovi dobijaju masu posle spontanog narušenja simetrije. Za početak, razmatrajmo samo prvu generaciju kvarkova. Jukavin lagranđian je

$$\mathcal{L}_{\text{Juk.}} = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}[\bar{u}_R(\tilde{\Phi}^\dagger Q) + (\bar{Q}\tilde{\Phi})u_R] - \frac{G_d}{\sqrt{2}}[\bar{d}_R(\Phi^\dagger Q) + (\bar{Q}\Phi)d_R] , \quad (6.3.18)$$

⁶Ovo se vrlo lako vidi korišćenjem Jangovih šema.

gde je

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}. \quad (6.3.19)$$

Sa G_u i G_d obeležili smo konstante interakcije izmedju kvarkova i skalarnog polja. Drugi sabirak u (6.3.18) je isti kao u (6.2.75). Prvi član sadrži $\tilde{\phi}$ multiplet. Lagranžijan (6.3.18) je invarijantan na $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ transformacije.

Posle spontanog narušenja simetrije (6.3.18) prelazi u

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Juk.}} &= -\frac{G_d}{2} \left[\bar{d}_R (0 v + H) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} d_R \right] \\ &\quad - \frac{G_u}{2} \left[(\bar{u}_L \bar{d}_L) \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R (v + H 0) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{G_u}{2} (v + H) (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) - \frac{G_d}{\sqrt{2}} (v + H) (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\ &= -\frac{1}{2} (v + H) (G_u \bar{u} u + G_d \bar{d} d). \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

Iz (6.3.20) vidimo da su u i d kvarkovi postali maseni. Njihove mase su

$$m_u = \frac{v G_u}{2}, \quad m_d = \frac{v G_d}{2}. \quad (6.3.21)$$

Takodje, u (6.3.20) imamo interakcioni član Higsovog bozona sa kvarkovima.

Sada ćemo uopštiti prethodnu proceduru uključivanjem preostale dve generacije kvarkova. Jukavin lagranžijan za sve tri generacije kvarkova je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Juk.}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=1}^3 \left(G_{mn}^{(u)} (\bar{Q}_{Lm} \tilde{\Phi}) u_{Rn} + G_{mn}^{(u)*} \bar{u}_{Rn} (\tilde{\Phi}^\dagger Q_{Lm}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=1}^3 \left(G_{mn}^{(d)} (\bar{Q}_{Lm} \Phi) d_{Rn} + G_{mn}^{(d)*} \bar{d}_{Rn} (\Phi^\dagger Q_{Lm}) \right), \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

gde su $G_{mn}^{(u)}$ i $G_{mn}^{(d)}$ kompleksni brojevi koji formiraju dve matrice. Gornji lagranžijan je realan (u kvantnoj teoriji polja to odgovara hermitskom operatoru), poseduje $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ kao i Lorencovu simetriju. Posle spontanog narušenja simetrije, lagranžijan (6.3.22) postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Juk.}} &= - \sum_{m,n} \left(\bar{u}_{Lm} \mathcal{M}_{mn}^{(u)} u_{Rn} + \bar{u}_{Rn} \mathcal{M}_{mn}^{(u)*} u_{Lm} \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right) \\ &\quad - \sum_{m,n} \left(\bar{d}_{Lm} \mathcal{M}_{mn}^{(d)} d_{Rn} + \bar{d}_{Rn} \mathcal{M}_{mn}^{(d)*} d_{Lm} \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right), \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

gde je

$$\mathcal{M}_{mn}^{(u)} = \frac{v G_{mn}^{(u)}}{2}, \quad \mathcal{M}_{mn}^{(d)} = \frac{v G_{mn}^{(d)}}{2}. \quad (6.3.24)$$

Masene matrice $\mathcal{M}^{(u)}$ i $\mathcal{M}^{(d)}$ nisu dijagonalne. To znači da kvarkovska stanja u_{Lm}, u_{Rm}, \dots nisu masena stanja kvarkova već interakciona, tj. gauge stanja. Da bismo dobili masena stanja, moramo transformisati kvarkovska polja tako da matrice $\mathcal{M}^{(u)}$ i $\mathcal{M}^{(d)}$ postanu dijagonalne.

Proizvoljna matrica \mathcal{M} se može dijagonalizovati pomoću tzv. biunitarne transformacije $S^\dagger \mathcal{M} T = M$, gde su S i T unitarne matrice, a M dijagonalna matrica. Lako se vidi da je $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger = SMM^\dagger S^\dagger = SM^2S^\dagger$ i $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M} = TM^2T^\dagger$. Matrice $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger$ su hermitske i pozitivne. Dijagonalizacijom ove dve matrice odredujemo matrice T i S . Dakle,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(u)} &= S^{(u)} M^{(u)} T^{(u)\dagger} \\ \mathcal{M}^{(d)} &= S^{(d)} M^{(d)} T^{(d)\dagger}.\end{aligned}\quad (6.3.25)$$

Matrice $M^{(u)}$ i $M^{(d)}$ su dijagonalne sa pozitivnim svojstvenim vrednostima. Jukavin lagranžian je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Juk.}} = - &\left(\bar{u}_{Lm}(S^{(u)} M^{(u)} T^{(u)\dagger})_{mn} u_{Rn} + \bar{u}_{Rm}(T^{(u)} M^{(u)} S^{(u)\dagger})_{mn} u_{Ln} \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right) \\ &- \left(\bar{d}_{Lm}(S^{(d)} M^{(d)} T^{(d)\dagger})_{mn} d_{Rn} + \bar{d}_{Rm}(T^{(d)} M^{(d)} S^{(d)\dagger})_{mn} d_{Ln} \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right).\end{aligned}\quad (6.3.26)$$

Sa polja u_L, u_R, \dots prelazimo na nova polja

$$\begin{aligned}T^{(u)\dagger} u_R &= u'_R, \quad S^{(u)\dagger} u_L = u'_L \\ T^{(d)\dagger} d_R &= d'_R, \quad S^{(d)\dagger} d_L = d'_L,\end{aligned}\quad (6.3.27)$$

gde su

$$u'_L = \begin{pmatrix} u'_L \\ c'_L \\ t'_L \end{pmatrix}, \quad d'_L = \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix}.\quad (6.3.28)$$

Analogno se može uraditi i za desne komponente. Lagranžian (6.3.26), izražen preko primovanih polja, je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Juk.}} = - &\left(\bar{u}'_L M^{(u)} u'_R + \bar{u}'_R M^{(u)} u'_L \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right) \\ &- \left(\bar{d}'_L M^{(d)} d'_R + \bar{d}'_R M^{(d)} d'_L \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right),\end{aligned}\quad (6.3.29)$$

gde su

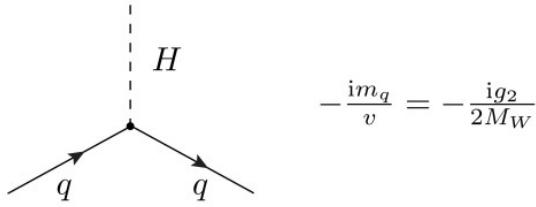
$$M^{(u)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix},\quad (6.3.30)$$

$$M^{(d)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}\quad (6.3.31)$$

dijagonalne masene matrice. Primovana stanja su masena stanja kvarkova. Jukavin lagranžijan izražen preko Dirakovih spinora kvarkova je

$$\mathcal{L}_{\text{Juk.}} = -(m_u \bar{u}' u' + m_d \bar{d}' d' + \cdots + m_b \bar{b}' b') \left(1 + \frac{H}{v}\right). \quad (6.3.32)$$

Kvarkovi su postali maseni i dobili smo njihovu interakciju sa Higsovim bozonom. Odgovarajući verteksi su dati na slici 6.7.



Slika 6.7: Verteks interakcije Higsovog bozona i kvarkova.

6.3.3 Naelektrisana kvarkovska struja

Interakcija klaibracionih bozona sa kvarkovima se dobija iz lagranžijana (6.3.9), i data je sa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & (\bar{u}_{Lm} \bar{d}_{Lm}) \gamma^\mu \left(\frac{g_1}{6} B_\mu + \frac{g_2}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_{Lm} \\ d_{Lm} \end{pmatrix} \\ & + \frac{2g_1}{3} \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu u_{Rm} B_\mu - \frac{g_1}{3} \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu d_{Rm} B_\mu. \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

Kao i u slučaju interakcije leptona sa kalibracionim bozonima ovaj lagranžijan sadrži tri sabirka. Prvi sabirak je linearan po naelektrisanim gauge bozonima $W^{(\pm)}$. Oni su kuplovani sa naelektrisanom strujom. Taj član je

$$\mathcal{L}_{\text{nael.str.}} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_{Lm} \gamma^\mu d_{Lm} W_\mu^{(+)} + \bar{d}_{Lm} \gamma^\mu u_{Lm} W_\mu^{(-)} \right). \quad (6.3.34)$$

Prelaskom na primovana, masena kvarkovska stanja dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{nael.str.}} = & \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}'_{Lm} \gamma^\mu (S^{(u)\dagger} S^{(d)})_{mn} d'_{Ln} W_\mu^{(+)} + \bar{d}'_{Lm} \gamma^\mu (S^{(d)\dagger} S^{(u)})_{mn} u'_{Ln} W_\mu^{(-)} \right) \\ = & \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}'_L \gamma^\mu V d'_L W_\mu^{(+)} + \bar{d}'_L \gamma^\mu V^\dagger u'_L W_\mu^{(-)} \right), \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

gde smo uveli 3×3 matricu $V = S^{(u)\dagger} S^{(d)}$. Ova matrica je unitarna i odgovorna je za promenu tipa kvarka pri interakciji sa naelektrisanim W bozonima. Matrica V je poznata

kao Cabibbo-Kobajaši-Maskava (M. Kobayashi, T. Maskawa) matrica, CKM matrica. U našim oznakama, primovana stanja su masena stanja kvarkova. Vidimo da su stanja donjih kvarkova pomešana. Matrični elementi CKM matrice se određuju iz eksperimenta, a ne iz teorije.

Razmotrimo koliko je parametara porebno da bi se odredila CKM matrica. Unitarna $n \times n$ matrica je određena sa n^2 realnih brojeva. Od njih $\frac{n(n-1)}{2}$ su parametri rotacija, a preostalih $\frac{n(n+1)}{2}$ su faze. Međutim, zahvaljujući faznoj simetriji polja kvarkova $2n - 1$ faza može biti apsorbovana u fazne rotacije kvarkovskih polja. Dakle, matrica V je određena sa $(n-1)^2$ parametara. Od njih $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ predstavljaju faze, dok su preostali parametri rotacioni uglovi. Apsorpcija faza CKM matrice se kao što smo rekli postiže faznim transformacijama kvarkovskih polja.

Konkretno, posmatrajmo član $\bar{u}'_L \gamma^\mu V d'_L$. On, nakon fazne transformacije kvarkovskih polja postaje

$$(\bar{u}'_L \bar{c}'_L \bar{t}'_L) \gamma^\mu U_\chi^\dagger V U_\varphi \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix},$$

gde su $U(1)$ matrice date sa

$$U_\chi = \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\chi_3} \end{pmatrix}, \quad U_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix}. \quad (6.3.36)$$

Na osnovu gornje formule je jasno da se CKM matrica modifikuje prema $V \rightarrow U_\chi^\dagger V U_\varphi$. Uočavamo da je u ovoj modifikaciji prisutno šest faza. Međutim samo je pet od ovih šest faza nezavisno.

Da bismo objasnili mehanizam mešanja kvarkova razmatraćemo, za početak samo dve generacije kvarkova. Matrica V je oblika

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c e^{i\alpha} & \sin \theta_c e^{i\beta} \\ -\sin \theta_c e^{i(\alpha+\gamma)} & \cos \theta_c e^{i(\beta+\gamma)} \end{pmatrix}. \quad (6.3.37)$$

Odredjena je sa tri faze i jednim uglom. Tri faze eliminišemo faznim rotacijama kvarkova. Naime, napravićemo sledeću transformaciju

$$V \rightarrow U_\chi^\dagger V U_\varphi, \quad (6.3.38)$$

gde su matrice U_χ i U_φ date sa

$$U_\chi = \begin{pmatrix} e^{i\chi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} \end{pmatrix}, \quad U_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}. \quad (6.3.39)$$

Matrica $U_\chi^\dagger V U_\varphi$ je data sa

$$U_\chi^\dagger V U_\varphi = \begin{pmatrix} e^{-i(\chi_1-\varphi_1-\alpha)} \cos \theta_c & e^{-i(\chi_1-\varphi_2-\beta)} \sin \theta_c \\ -e^{-i(\chi_2-\varphi_1-\alpha-\gamma)} \sin \theta_c & e^{-i(\chi_2-\varphi_2-\beta-\gamma)} \cos \theta_c \end{pmatrix}.$$

Izborom faza

$$\begin{aligned}\chi_1 - \varphi_1 &= \alpha, \\ \chi_2 - \varphi_1 &= \alpha + \gamma, \\ \chi_1 - \varphi_2 &= \beta\end{aligned}$$

eliminišemo sve tri faze. Četvrti uslov $\chi_2 - \varphi_2 = \beta + \gamma$ je posledica prethodna tri. Konačno, CKM-matrica V postaje

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (6.3.40)$$

Ova matrica je odredjena jednim parametrom, Cabibovim uglom θ_c . Ranije smo rekli da je eksperimentalni rezultat za Cabibov ugao je $\cos \theta_c = 0,97$.

Interakcija prve dve generacije kvarkova i nanelektrisanih kalibracionih bozona je odredjena lagranžijanom⁷

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{nael.str.}} &= \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left(\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\cos \theta_c d + \sin \theta_c s) \right. \\ &\quad \left. + \bar{c} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (-\sin \theta_c d + \cos \theta_c s) \right) W_\mu^+ + c.c. .\end{aligned} \quad (6.3.41)$$

Kada ne bi bilo mešanja d i s kvarka, tj. kada bi $\theta_c = 0$ imali bismo samo vertekse duW , csW , dok verteksi usW i dcW ne bi postojali. Eksplicitno, udW verteks je

$$\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \cos \theta_c \gamma^\mu (1 - \gamma_5), \quad (6.3.42)$$

dok je suW verteks

$$\frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \sin \theta_c \gamma^\mu (1 - \gamma_5). \quad (6.3.43)$$

Preostala dva verteksa su analogna. Ovi verteksi su prikazani na slici 6.8.

Recimo i to da, kada ne bi bilo mešanja familija kvarkova i usW -verteksa, raspad $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ne bi bio moguć. To jest, najlakša strana čestica bi bila stabilna. Kod leptona nema mešanja familija, pa su svi neutrini stabilni.

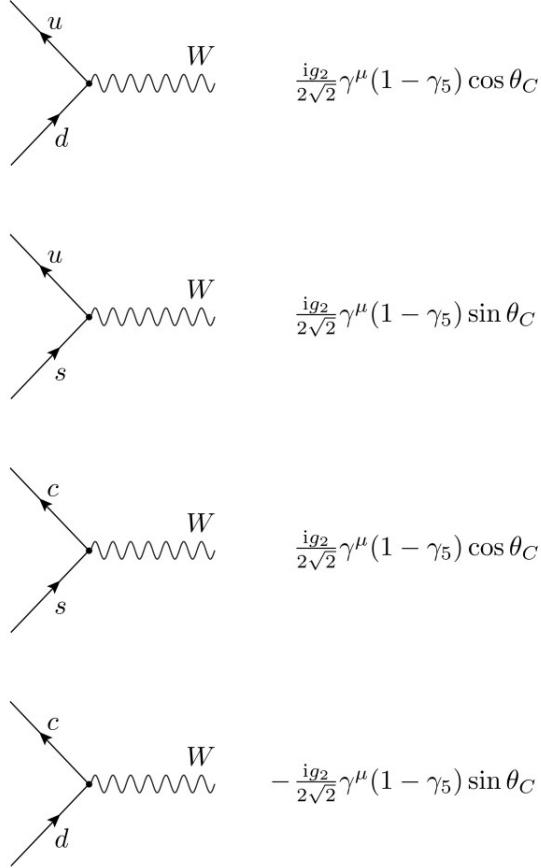
U slučaju tri generacije kvarkova, matrica V je unitarna 3×3 matrica, oblika

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (6.3.44)$$

Od devet parametara, koliko je potrebno da se odredi 3×3 unitarna matrica, tri parametra predstavljaju uglove rotacija, a preostalih šest su faze. Faznom transformacijom možemo ukloniti pet faza. Tako dobijamo da tri ugla i jedna faza određuju CKM matricu. Postoji više načina parametrizacije ove matrice. Jedan način je

$$V = R_1(\theta_{23}) R_2(\theta_{12}) C(0, 0, \delta) R_3(\theta_{12}), \quad (6.3.45)$$

⁷Izostavili smo primove u ovom finalnom izrazu.



Slika 6.8: Verteks interakcije kvarkova i \$W\$ bozona.

gde su \$R_1\$, \$R_2\$, \$R_3\$ matrice rotacija oko osa \$x, y, z\$ respektivno. One su date sa

$$R_1(\theta_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & \sin \theta_{23} \\ 0 & -\sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix}, \quad (6.3.46)$$

$$R_2(\theta_{23}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & \sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{pmatrix}, \quad (6.3.47)$$

$$R_3(\theta_{12}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3.48)$$

Ugao \$\theta_{ij}\$ je ugao rotacije u \$ij\$ ravni. Matrica \$C\$ je

$$C(\delta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}, \quad (6.3.49)$$

gde je δ faza⁸. Eksplisitim računom dobijamo

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}s_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (6.3.50)$$

Uveli smo skraćenice $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ i $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Matrični elementi CKM matrice se određuju eksperimentalno. Vrednosti uglova su

$$\begin{aligned} \theta_{12} &= (13,02 \pm 0,04)^0, \\ \theta_{23} &= (2,36 \pm 0,08)^0, \\ \theta_{13} &= (0,20 \pm 0,02)^0, \end{aligned} \quad (6.3.51)$$

dok je faza $\delta = (69 \pm 5)^0$. Apsolutna vrednost matričnih elemenata CKM matrice su

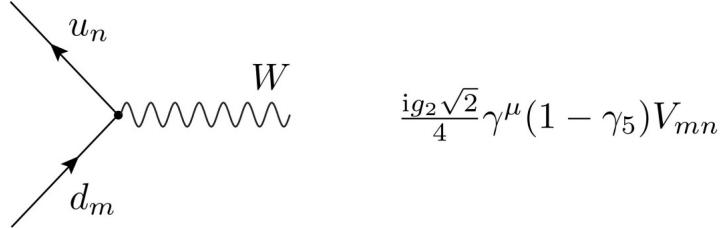
$$\begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,22 & 0,0039 \\ 0,23 & 1,02 & 0,0041 \\ 0,0084 & 0,039 & 0,88 \end{pmatrix}. \quad (6.3.52)$$

Dijagonalni elementi CKM matrice su bliski jedinici, a vandijagonalni su približno jednaki nuli. Dakle CKM matrica je skoro dijagonalna.

Na kraju, možemo da intreakciju W bozona sa nanelektrisanom kvarkovskom strujom (6.3.35) prepišemo preko Dirakovih polja. Rezultat je

$$\mathcal{L}_{\text{nael.str.}} = \frac{g_2\sqrt{2}}{4} \left(\bar{u}_m \gamma^\mu V_{mn} (1 - \gamma_5) d_n W_\mu^{(+)} + \bar{d}_m \gamma^\mu V_{mn}^\dagger (1 - \gamma_5) u_n W_\mu^{(-)} \right). \quad (6.3.53)$$

U poslednjem izrazu nismo pisali primove na kvarkovskim poljima. Verteks interakcije kvarkova i W bozona, koji uključuje i elemente CKM matice, dat je na slici 6.9.



Slika 6.9: Verteks interakcije kvarkova i W bozona, gde je V_{mn} element CKM matrice.

⁸Ova faza ima veze sa narušenjem CP simetrije.

6.3.4 Neutralna i elektromagnetna kvarkovska struja

Drugi deo interakcije kvarkova sa kalibracionim bozonima u (6.3.33) je interakcija neutralnih bozona Z^0 i fotona sa kvarkovskom strujom u kojoj nema promene nanelektrisanja duž kvarkovske linije u Fajnmanovom dijagramu. On je dat lagranžijanom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} &= \frac{g_1}{6} \bar{Q}_{Lm} \gamma^\mu Q_{Lm} B_\mu + \frac{g_2}{2} \bar{Q}_{Lm} \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q_{Lm} W_\mu^3 \\ &\quad + \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu u_{Rm} B_\mu - \frac{1}{3} g_1 \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu d_{Rm} B_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.54)$$

Kada potencijale B_μ i W_μ^3 izrazimo preko fizičkih polja A_μ i Z_μ , dobijamo elektromagnetni i neutralni deo interakcije. Elektromagnetni deo je dat lagranžijanom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{em}} &= \frac{g_2 \sin \theta_W}{2} \left(\frac{4}{3} \bar{u}_{Lm} \gamma^\mu u_{Lm} + \frac{4}{3} \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu u_{Rm} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \bar{d}_{Lm} \gamma^\mu d_{Lm} - \frac{2}{3} \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu d_{Rm} \right) A_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.55)$$

Prelazak na primovana (6.3.28) polja ništa ne menja u gornjem izrazu, pa dobijamo

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{g_2 \sin \theta_W}{2} \left(\frac{4}{3} \bar{u}_m \gamma^\mu u_m - \frac{2}{3} \bar{d}_m \gamma^\mu d_m \right) A_\mu . \quad (6.3.56)$$

Primove na poljima smo izostavili. Uvodeći nanelektrisanje elektrona $e < 0$, gornji izraz postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{em}} &= \frac{2}{3} e \left(\bar{u} \gamma^\mu u + \bar{c} \gamma^\mu c + \bar{t} \gamma^\mu t \right) A_\mu \\ &\quad - \frac{1}{3} e \left(\bar{d} \gamma^\mu d + \bar{s} \gamma^\mu s + \bar{b} \gamma^\mu b \right) A_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.57)$$

Ovaj izraz ima oblik proizvoda kvarkovske struje i elektromagnetskog potencijala. Jačina interakcije je nanelektrisanje odgovarajućeg kvarka.

Deo izraza (6.3.9) proporcionalan polju Z^μ je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} &= \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} \left(-\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \bar{Q}_{Lm} \gamma^\mu Q_{Lm} + \cos^2 \theta_W \bar{Q}_{Lm} \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q_{Lm} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu u_{Rm} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu d_{Rm} \right) Z_\mu \\ &= \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} \left(\bar{u}_{Lm} \gamma^\mu u_{Lm} - \bar{d}_{Lm} \gamma^\mu d_{Lm} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W (\bar{u}_{Lm} \gamma^\mu u_{Lm} + \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu u_{Rm}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W (\bar{d}_{Lm} \gamma^\mu d_{Lm} + \bar{d}_{Rm} \gamma^\mu d_{Rm}) \right) Z_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.58)$$

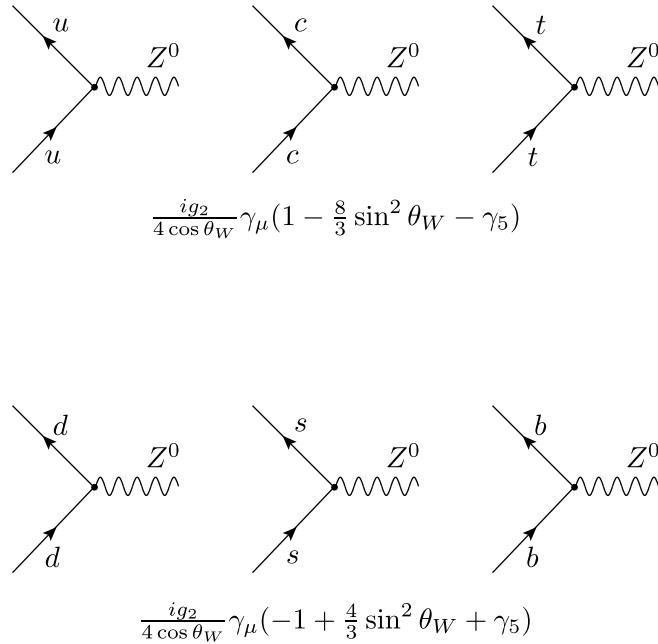
Prelazak sa neprimovanih na primovana kvarkovska polja ne menja formu lagranžijana. Dakle, lagranžijan sa neutralnom strujom kvarkovskog sektora je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} = & \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} \left(\bar{u}_{Lm} \gamma^\mu u_{Lm} - \bar{d}_{Lm} \gamma^\mu d_{Lm} \right. \\ & \left. - \sin^2 \theta_W \left(\frac{4}{3} \bar{u}_m \gamma^\mu u_m - \frac{2}{3} \bar{d}_m \gamma^\mu d_m \right) \right) Z_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.59)$$

Prelaskom na Dirakova polja konačno dobijamo interakciju neutralne kvarkovske struje sa Z^0 bozonom:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{neutr.str.}} = & \frac{g_2}{4 \cos \theta_W} \left[\left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_m \gamma^\mu u_m - \bar{u}_m \gamma^\mu \gamma_5 u_m \right. \\ & \left. + \left(-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_m \gamma^\mu d_m + \bar{d}_m \gamma^\mu \gamma_5 d_m \right] Z_\mu . \end{aligned} \quad (6.3.60)$$

Vidimo da Z^0 bozon interaguje sa kvarkovskim strujama u kojima nema promene tipa kvarka. Drugim rečima, verteksi tipa ucZ^0 ili dsZ^0 nisu prisutni u lagranžijanu. Nemešanje vrsta kvarkova, to jest odsustvo "flavour changing neutral currents" se naziva GIM mehanizam. Na osnovu ovog mehanizma je predviđeno postojanje četvrtog kvarka. O tome smo više govorili u poglavlju 2.8. Verteksi u kojima interaguju kvarkovi sa Z^0 bozonom su dati na slici 6.10.



Slika 6.10: Verteks interakcije kvarkova i Z bozona.

Nemešanje vrsta kvarkova u Z^0 interakcijama je i eksperimentalno potvrđeno. Kanal raspada K^+ mezona

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}$$

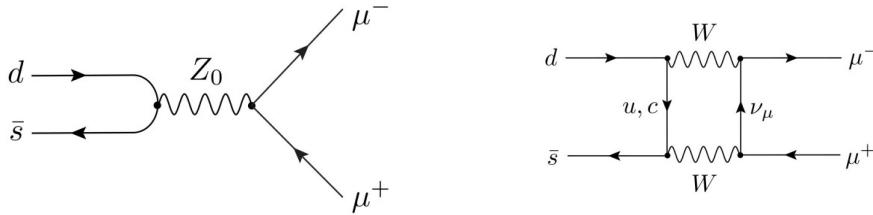
je malo verovatan. To se vidi na osnovu odnosa za širinu ovog procesa prema ukupnoj širini raspada K^+ mezona:

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})}{\Gamma(K^+ \rightarrow \text{all})} = 1,73 \cdot 10^{-10}.$$

Raspad

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}$$

nije dozvoljen na nivou dijagrama bez petlji, jer ne postoji Zsd verteks.



Slika 6.11: Raspad $K_L \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ide po drugom, a ne po prvom dijagramu.

Iz istog razloga, odnos širine raspada K_L^0 mezona (videti fusnotu 9) na mion-antimion par prema njegovoj ukupnoj širini raspada je

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L \rightarrow \text{all})} \sim 10^{-9}, \quad (6.3.61)$$

jer odgovarajući verteks ne postoji u standardnom modelu. K^0 mezon je vezano stanje d kvarka i \bar{s} antikvarka i kako nema promene tipa kvarka u neutralnoj struji to verteks prikazan na levom dijagramu slike 6.11 ne postoji. Ovaj raspad je moguć u višem redu teorije perturbacije, desni dijagram na slici 6.11. Verovatnoća za ovaj proces je mala jer je ovaj dijagram sadrži četiri verteksa.

6.4 Lagranđijan elektroslabe interakcije: rezime

Ukupni lagranđijan standardnog modela elektroslabe interakcije sastoji se od nekoliko delova:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{\text{scal.}} + \mathcal{L}_{\text{Juk.lep.}} + \mathcal{L}_{\text{Juk.k.}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}}. \quad (6.4.62)$$

Leptonski lagranđijan je

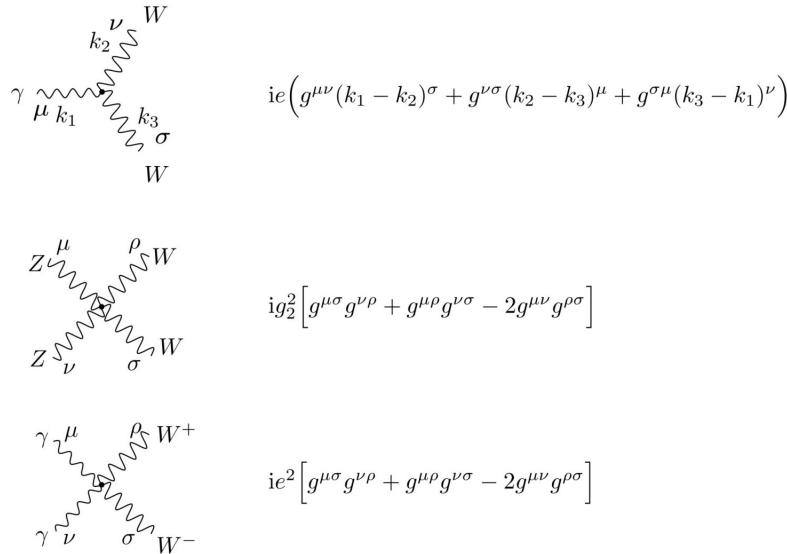
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l = & i \sum_m \bar{L}_m \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_L}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a) L_m \\ & + i \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_R}{2} B_\mu) e_R \\ & + i \bar{\mu}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_R}{2} B_\mu) \mu_R + i \bar{\tau}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 \frac{Y_R}{2} B_\mu) \tau_R, \end{aligned} \quad (6.4.63)$$

gde smo uključili sve tri generacije leptona.

Gauge sektor lagranžijana je

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{\mu\nu a}. \quad (6.4.64)$$

Razvijanjem polja B_μ i W_μ^a preko fizičkih polja A_μ , W^\pm i Z^0 , dobijaju se verteksi interakcije gradijentnih bozona. Ovi verteksi su prikazani na slikama 6.12 i 6.13.



Slika 6.12: Verteksi interakcije gradijentnih bozona, I

Kvarkovski deo lagranžijana je dat u (6.3.9). On je izražen preko interakcionih stanja, a ne preko pravih masenih stanja kvarkova. Jukavin lagranžijan za leptone je

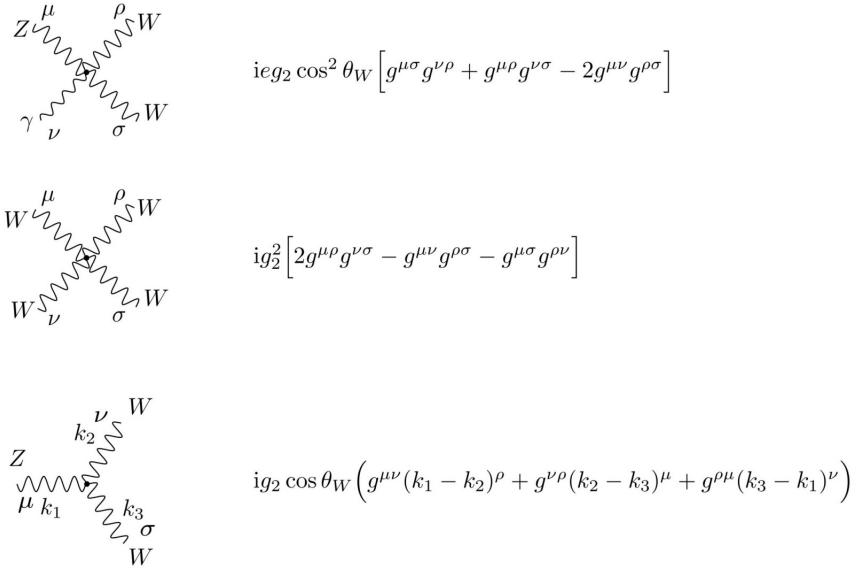
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Juk.lep} = & -\frac{G_e}{\sqrt{2}}[\bar{e}_R(\Phi^\dagger L_1) + (\bar{L}_1\Phi)e_R] - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}[\bar{\mu}_R(\Phi^\dagger L_2) + (\bar{L}_2\Phi)\mu_R] \\ & -\frac{G_\tau}{\sqrt{2}}[\bar{\tau}_R(\Phi^\dagger L_3) + (\bar{L}_3\Phi)\tau_R]. \end{aligned} \quad (6.4.65)$$

Jukavin lagranžijan u kvark sektoru je dat u (6.3.22).

6.5 Raspadi i neki procesi u standardnom modelu

6.5.1 W^\pm i Z^0 bozoni

Rekli smo već da su W^\pm i Z^0 bozoni prvi put vidjeni 1984. godine u proton-antiproton sudarima u CERN-u. Tada su takvi dogadjaji bili retki, ali danas se ove čestice proizvode na milione u LHC-u. Masa W^\pm bozona je oko 80.38GeV, a Z^0 bozona oko 91.19GeV.



Slika 6.13: Verteksi interakcije gradijentnih bozona, II

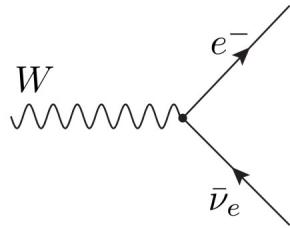
Razmotrimo prvo raspad W bozona. Širina raspada se definiše kao

$$\Gamma = \int \frac{|S_{\text{fi}}|^2}{T} \prod_f \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (6.5.1)$$

W^- bozon se raspada prema jednom od ovih kanala

$$W^- \rightarrow \begin{cases} e^- + \bar{\nu}_e, \\ \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \tau^- + \bar{\nu}_\tau \\ d + \bar{u}, s + \bar{c}. \end{cases}. \quad (6.5.2)$$

Odredimo širinu raspada za proces $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$, prikazan na slici 6.14. Fajnmanova

Slika 6.14: Raspad $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$.

amplituda za ovaj proces je

$$i\mathcal{M} = \frac{ig_2}{2\sqrt{2}} \bar{u}_r(e, \mathbf{p}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_1(\nu, \mathbf{q}) \epsilon_\mu(k, \lambda). \quad (6.5.3)$$

Sa $u_r(e, \mathbf{p})$ smo obeležili Dirakov spinor elektrona impusa \mathbf{p} i polarizacije r . Analogno, $v_1(\bar{\nu}, \mathbf{q})$ je Dirakov spinor za antineutrino impulsa \mathbf{q} . Indeks 1 označava da je antineutrino pozitivnog heliciteta. Recimo da je odgovarajući indeks za neutrino $s = 2$, tj. on ima negativan helicitet.

Pre nego što nastavimo izračunavanje kvadrata ove amplitude pozabavićemo se normalizacijom spinora i helicitetnim stanjima neutrina i antineutrina. Naš izbor normalizacije Dirakovih spinora [11, 12] je

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} , \quad (6.5.4)$$

što daje sledeće bazisne Dirakove spinore

$$u_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \varphi_r \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}. \quad (6.5.5)$$

Projektori na pozitivno (negativno) energetska rešenja su

$$\begin{aligned} \Lambda_+(p) &\equiv \sum_{r=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} , \\ \Lambda_-(p) &\equiv -\sum_{r=1}^2 v_r(p)\bar{v}_r(p) = -\frac{\not{p} - m}{2m} . \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Razvoj Dirakovog polja po ravnim talasima je

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left(u_r(\vec{p}) c_r(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + v_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right) , \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{r=1}^2 \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left(\bar{u}_r(\vec{p}) c_r^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x} + \bar{v}_r(\vec{p}) d_r(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} \right) . \end{aligned}$$

Dirakovi spinori, $u_r(p)$ i $v_r(p)$, kao i projektori $\Lambda_\pm(p)$, nisu dobro definisani za nultu masu fermiona. Da bi se ovo izbeglo mnogi autori koriste normalizaciju [8]

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = 2m\delta_{rs} . \quad (6.5.7)$$

Na taj način se uklanjanja faktor $2m$ u imeniocu normalizacionog faktora Dirakovih spinora u izrazima (6.5.6). Mi ćemo ipak zadržati normalizaciju (6.5.4). Na kraju računa ćemo, tj. posle nalaženja preseka za rasejanje, uzećemo da je $m = 0$.

Drugo, važno pitanje je pitanje helicitetnih stanja neutrina odnosno antineutrina. Dirakov spinor pozitivno energetske čestice polarizovane duž pravca s obeležavamo sa $u(\mathbf{p}, s) \equiv u_1(\mathbf{p})$. Lako se vidi [12] da je

$$u(\mathbf{p}, s)\bar{u}(\mathbf{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{p} + m}{2} \frac{\not{p} + m}{2m} . \quad (6.5.8)$$

Sa desne strane je proizvod projektoru na dano spinorsko stanje i na pozitivno energetska rešenja. Ako dalje sa $v(\mathbf{p}, s) \equiv v_1(\mathbf{p})$ obeležimo negativno energetsku česticu polarizovanu duž pravca $-s$ onda je⁹

$$v(\mathbf{p}, s)\bar{v}(\mathbf{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (6.5.9)$$

Helicitetni bazis se dobija uzimanjem $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Neutrini imaju malu masu, pa ćemo zato uzeti limes $\frac{m}{E_p} \rightarrow 0$. U ovom limesu vektor s postaje je $s^\mu = \frac{p^\mu}{m}$. Za helicitet $+\frac{1}{2}$ je

$$u_1(\mathbf{p})\bar{u}_1(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\not{p} + m}{2m} = \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (6.5.10)$$

U slučaju čestice negativnog heliciteta analogno imamo

$$u_2(\mathbf{p})\bar{u}_2(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{\not{p} + m}{2m}. \quad (6.5.11)$$

Ovu relaciju ćemo koristiti za neutrino, jer on ima negativan helicitet. Analogno, Dirakovi spinori antičestice pozitivnog heliciteta zadovoljavaju

$$v_1(\mathbf{p})\bar{v}_1(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (6.5.12)$$

Zbog jednačina kretanja za v spinore konačno imamo

$$v_1(\mathbf{p})\bar{v}_1(\mathbf{p}) = \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (6.5.13)$$

Ovu formulu ćemo primenjivati kod antineutrina. Pojava mase neutrina u imeniocu ovih projektoru nije problem. Ona će se skratiti sa masom koja dolazi iz normalizacije. Za antičesticu negativnog heliciteta dobija se

$$v_2(\mathbf{p})\bar{v}_2(\mathbf{p}) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\not{p} - m}{2m}. \quad (6.5.14)$$

Kvadrat amplitude prelaza, usrednjen po polarizaciji W bozona (vidi Dodatak C) i sumiran polarizacijama elektrona, je

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{3} \frac{g_2^2}{8} \sum_{r=1}^2 \sum_{\lambda=1}^3 \bar{u}_r(e, \mathbf{p}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_1(\nu, \mathbf{q}) \\ &\quad \times \bar{v}_1(\nu, \mathbf{q}) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u_r(e, \mathbf{p}) \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\mu^*(k, \lambda). \end{aligned}$$

Primenom (6.5.6) i (6.5.12) dobijamo

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_2^2}{32m_e m_\nu} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right) \text{Tr} \left((\not{p} + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \frac{1 - \gamma_5}{2} \not{q} \gamma^\nu \right). \quad (6.5.15)$$

⁹Znak minus može izgledati neprirodno. Medjutim, upravo on će obezrediti da antičestica ima pozitivnu projekciju spina na pravac s .

U prethodnom izrazu mogli smo uključiti i negativanu polarizaciju antineutrina, jer je taj doprinos zbog oblika interakcije, $1 - \gamma_5$ jednak nuli.

Izračunavanjem traga u gornjem izrazu dolazimo do

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_2^2}{32m_e m_\nu} \left(p \cdot q + 2 \frac{(p \cdot k)(q \cdot k)}{M_W^2} \right). \quad (6.5.16)$$

U sistemu mirovanja W bozona četvoroimpulsi su

$$\begin{aligned} k^\mu &= (M_W, 0, 0, 0) \\ p^\mu &= (E, 0, p \sin \theta, p \cos \theta) \\ q^\mu &= (E', 0, -p \sin \theta, p \cos \theta) \end{aligned} \quad (6.5.17)$$

Konačno dolazimo do

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_2^2}{12m_e m_\nu} (3EE' + \mathbf{p}^2). \quad (6.5.18)$$

Amplituda prelaza za proces $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ je

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p - q) \sqrt{\frac{m_e}{VE}} \sqrt{\frac{m_\nu}{VE'}} \frac{1}{\sqrt{2m_W V}} i\mathcal{M}. \quad (6.5.19)$$

Kvadrat amplitude prelaza je

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p - q) \frac{T m_e m_\nu}{2V^2 E E' m_W} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle. \quad (6.5.20)$$

Odmah uočavamo da se masa neutrina krati u ovom izrazu. Iz izraza za amplitudu prelaza lako se dobija širina raspada. Ona je data sa

$$\Gamma = \int \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (6.5.21)$$

Integracijom po faznom prostoru finalnih čestica dobijamo

$$\Gamma = \frac{g_2 m_W}{48\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^3}{6\pi}. \quad (6.5.22)$$

Ovaj rezultat je nezavisan od vrste leptona. Lako se vidi da je numerička vrednost širine raspada

$$\Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu) = \Gamma(W^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau) \approx 226 \text{ MeV}. \quad (6.5.23)$$

W^- se može raspasti i na parove $d\bar{u}$, odnosno $s\bar{c}$. Raspad u par $b\bar{t}$ je kinematički zabranjen, zbog masa čestica. Zbog kolornih stepeni slobode širine raspada W bozona u kvarkove ima dopunski faktor 3. Takodje, moramo voditi računa o CKM koeficijentima u verteksima. Širina raspada $W^- \rightarrow d + \bar{u}$ je

$$\Gamma(W^- \rightarrow d + \bar{u}) = \frac{G_F}{2\pi\sqrt{2}} |V_{ud}|^2 M_W^3, \quad (6.5.24)$$

a u $s\bar{c}$ kvarkove je

$$\Gamma(W^- \rightarrow s + \bar{c}) = \frac{G_F}{2\pi\sqrt{2}} |V_{sc}|^2 M_W^3 . \quad (6.5.25)$$

Vrednosti za kvadrate matričnih elemenata CKM matrice su $|V_{ud}|^2 = 0,97^2$, $|V_{cs}|^2 = 1.02^2$ pa je

$$\Gamma(W^- \rightarrow d + \bar{u}) = \Gamma(W^- \rightarrow s + \bar{c}) \approx 678 \text{ MeV} . \quad (6.5.26)$$

Ukupna širina raspada W^- bozona se dobija sabiranjem po svim kanalima raspada.

$$\Gamma_{\text{tot}} = 9 \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^3}{6\pi} . \quad (6.5.27)$$

Numerička vrednost ukupne širine raspada W bozona je oko 2GeV, što je u saglasnosti sa eksperimentalnim rezultatima.

Z^0 bozon takodje ima više kanala raspada. To su

$$Z^0 \rightarrow \begin{cases} e^- + e^+, \\ \mu^- + \mu^+, \\ \tau^- + \tau^+, \\ \nu_e + \bar{\nu}_e, \\ \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, \\ \nu_\tau + \bar{\nu}_\tau, \\ q + \bar{q}. \end{cases} . \quad (6.5.28)$$

Raspad Z^0 na par $t + \bar{t}$ je kinematički zabranjen, pa se Z^0 raspada samo na prvih pet kvarkova. Kvarkove ne možemo da vidimo odvojene, već samo vezane u hadronima, pa se u eksperimentima zapravo, umesto pojedinačnih kvarkova detektuju mlazevi hadrona, dže tovi ("jets"). U zadatku 6.8 b) ćete eksplicitno računati širinu raspada Z^0 na leptonski par. Rezultat koji se dobija je

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow l^- + l^+) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} [(1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 + 4 \sin^4 \theta_W] . \quad (6.5.29)$$

Numerička vrednost ovog izraza je približno $\Gamma(Z^0 \rightarrow l^- l^+) \approx 83,4 \text{ MeV}$. Z^0 bozon se može raspasti i na neutrino-antineutrino par. Širina ovog raspada je

$$\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu + \bar{\nu}) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx 170 \text{ MeV} . \quad (6.5.30)$$

Gornji rezultat moramo uračunati tri puta, zbog toga što imamo tri različita neutrina: elektronski, mionski i taonski. Z^0 bozon se može raspasti i na kvark-antikvark parove: $u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}, b\bar{b}$. Širine ovih raspada se nalaze analogno raspodu na leptone. Ukupna širina raspada Z^0 bozona je oko 2,5GeV. Poredjenje izmerene i izračunate širine raspada je dobar test koji dokazuje postojanje tri generacije leptona.

6.5.2 Higsov bozon

U ovom poglavlju ćemo diskutovati svojstva, produkciju i raspad Higsovog bozona. Naše izlaganje je zasnovano na analizi u knjizi posvećenoj fenomenologiji elementarnih čestica [19].

Najpre ćemo odrediti sa kojim česticama Higsov bozon interaguje. U poglavlјima 6.2.3 i 6.3.2 smo videli da je interakcija Higsovog bozona sa fermionima (leptonima i kvarkovima) data lagranžijanom

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{m_f}{2v} \bar{f} f H. \quad (6.5.31)$$

Sa f smo obeležili Dirakov spinor za leptone, odnosno kvarkove, dok je m_f masa odgovarajućeg fermiona. Na osnovu ovoga vidimo da se Higsov bozon može raspasti na fermion-antifermion par

$$H \rightarrow f\bar{f}, \quad f = l, q. \quad (6.5.32)$$

Širina raspada za ovaj proces je, videti zadatak 6.8 a),

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{\sqrt{2}G_F m_f^2 m_H N_c}{8\pi} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}. \quad (6.5.33)$$

Za leptone je $N_c = 1$, dok je, zbog kolornih stepeni slobode, za kvarkove $N_c = 3$. Vidimo da je širina raspada proporcionala kvadratu mase fermiona, tako da je dominantan raspad $H \rightarrow b\bar{b}$, jer je $m_b = 4,5\text{GeV}$. Na osnovu izraza (6.5.33) dobijamo da širina raspada Higsovog bozona na $b\bar{b}$ iznosi $\Gamma = 2\text{MeV}$. Ova širina raspada je dosta mala. Ona je hiljadu puta manja od širine raspada W^\pm i Z^0 bozona. Verovatnoća raspada Higsovog bozona na par $\tau^+\tau^-$ ili $c\bar{c}$ je deset puta manja nego verovatnoća za njegov raspad na $b\bar{b}$ par.

Higsov bozon se može raspasti i na W^+W^- i Z^0Z^0 . Primetimo da ovi raspadi slobodnog Higsovog bozona nisu kinematički dozvoljeni, jer je masa Higsovog bozona 125GeV , tj. $m_H < 2m_W$ odnosno $m_H < 2m_Z$. Da bismo odredili vertekse izmedju Higsovog bozona i gradijentnih bozona, moramo se vratiti na lagranžijan (6.2.30). Prvo ćemo kovarijantni izvod $D_\mu\Phi$, nakon spontanog narušenja simetrije, izraziti preko fizičkih gradijentnih polja

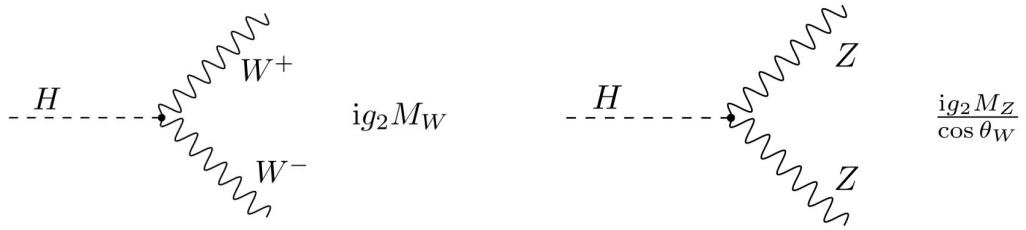
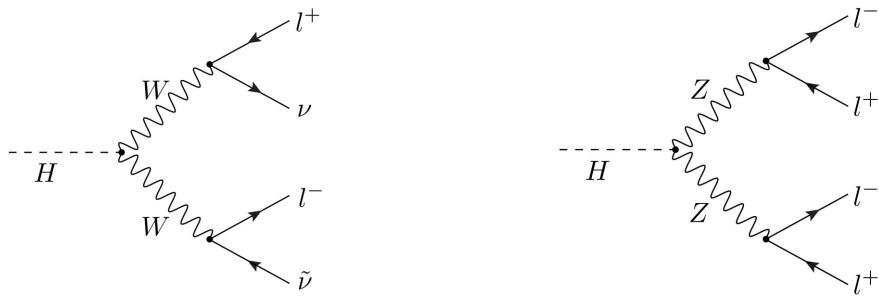
$$D_\mu\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -\frac{ig_1}{\sqrt{2}}(v + H)W_\mu^\dagger W_\mu \\ \partial_\mu H + \frac{i}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}(v + H)Z_\mu \end{pmatrix}. \quad (6.5.34)$$

Na osnovu ovog izraza možemo naći član $(D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi$ u lagranžijanu. Iz ovog člana izdvajamo interakcioni član

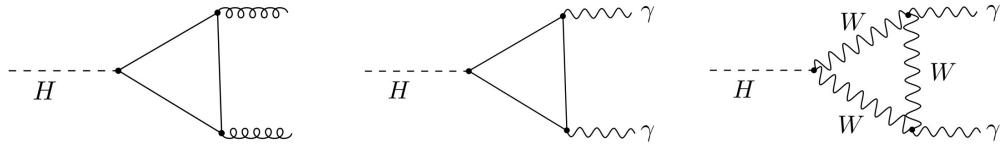
$$\Delta\mathcal{L} = \frac{m_W^2}{v} W_\mu^\dagger W^\mu H + \frac{m_Z^2}{v} Z_\mu Z^\mu H + \frac{m_W^2}{v^2} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{m_Z^2}{v^2} Z_\mu Z^\mu H^2. \quad (6.5.35)$$

Odgovarajući verteksi su prikazani na slici 6.15.

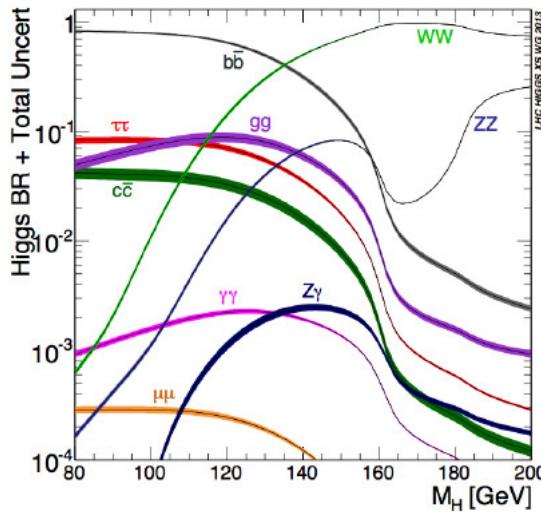
Higsov bozon se u procesima višeg reda može raspasti na četiri fermiona preko dva kanala: $l^-\nu_l l^+\bar{\nu}_l$ i $l^+l^-l^+l^-$. Ovi procesi su prikazani na slikama 6.16.

Slika 6.15: Verteksi interakcije Higsovog bozona i W i Z bozona.Slika 6.16: Raspadi $H \rightarrow l^+ + \nu_l + \bar{\nu}_l + l^-$ i $H \rightarrow l^+ + l^- + l^+ + l^-$.

Takodje, Higsov bozon se može raspasti na dva gluona ili dva fotona, slika 6.17.

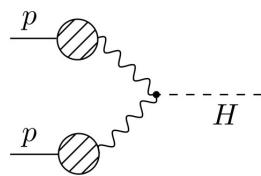
Slika 6.17: Raspadi $H \rightarrow g + g$ i $H \rightarrow \gamma + \gamma$.

Raspad Higsovog bozona na dva gluona je reda veličine raspada na $\tau^+\tau^-$, dok je širina raspada na dva fotona 50 puta manja. Na slici 6.18 su prikazane verovatnoće za različite kanale raspada Higsovog bozona u funkciji njegove mase.



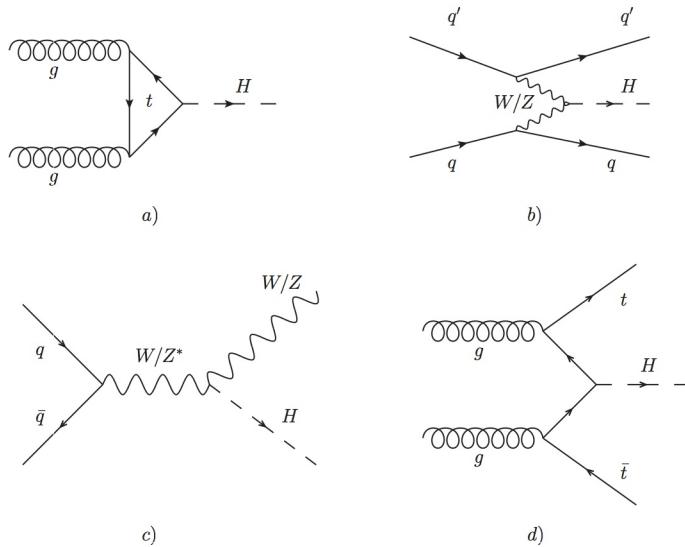
Slika 6.18: Različiti kanali raspada Higsovog bozona.

Rekli smo ranije da je Higsov bozon otkriven 2012. godine na LHC eksperimentu u CERN-u u sudarima dva protona. Proton je sastavljen od dva u i jednog d kvarka. Oni su tzv. valentni kvarkovi. Međutim, proton je komplikovan fizički sistem. Pored valentnih kvarkova, u protonu postoji virtuelni parovi kvarka i antikvarka, kao i virtuelni gluoni. Na slici 6.19 je prikazano kako se Higsov bozon dobija na LHC-u. U sudarima protona mogu se izdvojiti četiri procesa nastanka Higsovog bozona, prikazanih na slici 6.20.

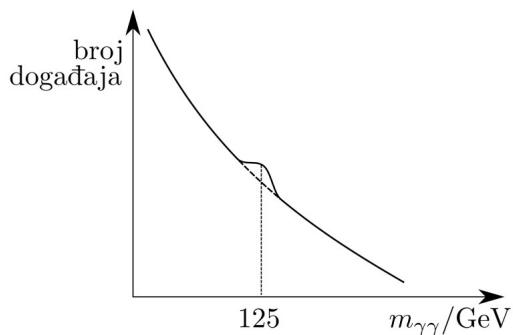


Slika 6.19: Proizvodnja Higsovog bozona na LHC-u.

Verovatnoća za proizvodnju Higsovog bozona iz $b\bar{b}$ para je vrlo mala zbog malog učešća ovih kvarkova u protonu. Zbog znatno većeg udela gluona u protonu, najverovatniji proces za produkciju Higsov bozon je preko kanala $gg \rightarrow H$. Ovaj kanal se naziva gluon-gluon fuzija. Verovatnoća za produkciju Higsovog bozona preko WWH interakcije je desetak puta manja od verovatnoće za njegovu produkciju u gluon-gluon fuziji. Posle raspada ovako nastalih Higsovih bozona, detektuju se različiti finalni procesi. Od njih, najkorisniji za analizu podataka, pa time i za detekciju Higsovog bozona su četvoroleptonski kanal i dvofotonski kanal.



Slika 6.20: Različiti kanali produkcije Higsovog bozona na LHC-u.



Slika 6.21: Broj dogadjaja za raspad Higsovog bozona.

Potraga za Higsovim bozonom je radjena u ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) i CMS (Compact Muon Solenoid) eksperimentima na LHC-u. U CMS eksperimentu određivana je zavisnost broja dogadjaja za raspad Higsovog bozona u dva fotona u funkciji invariatne mase para $\gamma\gamma$. Ova zavisnost je prikazana na slici 6.21 i pokazuje jasno postojanje rezonance na 125 GeV. ATLAS eksperiment je detektovao Higsov bozon na osnovu njegovog raspada na četiri leptona.

6.6 Neki procesi u okviru Standardnog modela

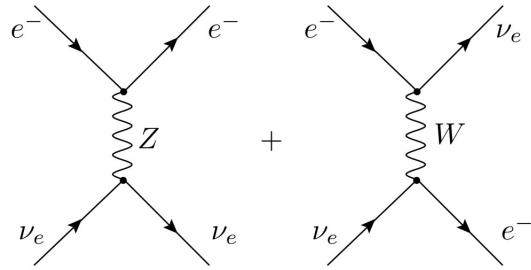
Završimo ovo poglavlje sa nekoliko procesa za koje ćemo nacrtati Fajnmanove dijagrame. Videli smo da postoje tri tipa slabih procesa: leptonski, semileptonski i hadronski. Na-većemo nekoliko leptonskih procesa. Kao prvo to su rasejanja neutrina na elektronu. Za

proces rasejanja

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$$

postoje dva Fajnmanova dijagrama, data na slici 6.22.

$$\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$$



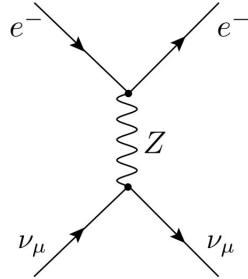
Slika 6.22: Fajnmanovi dijagrami za rasejanje $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$.

U prvom dijegramu je propagator Z^0 bozon, dok je u drugom W bozon. Sa druge strane, za rasejanje

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

postoji samo jedan dijagram i to preko Z bozona, slika 6.23.

$$\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$$

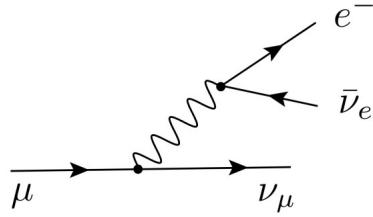


Slika 6.23: Fajnmanov dijagram za rasejanje $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$.

Još jedan važan leptonski proces je mionski raspad,

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e . \quad (6.6.36)$$

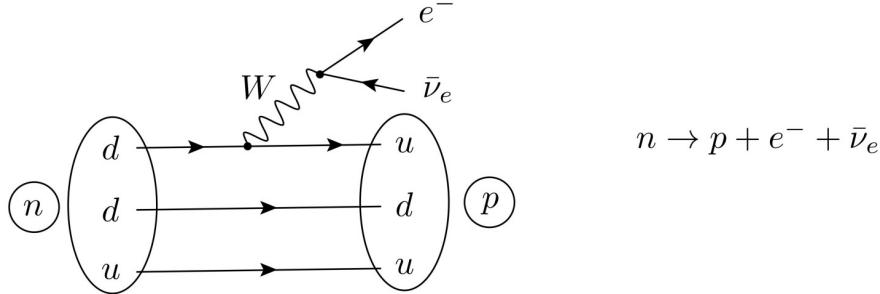
Fajnmanov dijagram je dat na slici 6.24.

Slika 6.24: Fajnmanovi dijagrami za raspad $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

Kod procesa u kojima učestvuju hadroni situacija je komplikovanija, jer su hadroni kompozitne čestice, sastavljene od kvarkova i mnogo virtuelnih čestica (gluona, kvarkova i antikvarkova). Pri raspadu neutrona

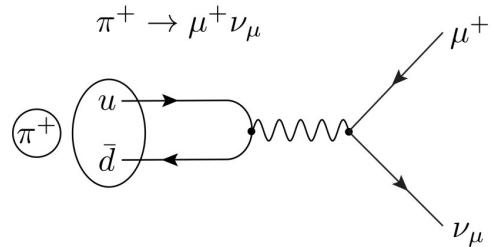
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

jedan d kvark u neutronu se raspada preko W bozona na u kvark, elektron i elektronski neutrino. Nastali u kvark sa d i u kvarkom iz neutra formira proton, slika 6.25

Slika 6.25: Fajnmanovi dijagrami za raspad $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

Raspad π^+ mezona, slika 6.26, je takođe semileptonski proces

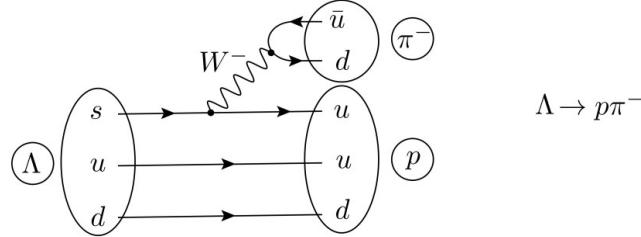
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Slika 6.26: Fajnmanovi dijagrami za raspad $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

Konačno, postoje i čisto hadronski slabi procesi. Jedan od njih je raspodjeljivanje Λ^0 bariona

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

Dijagram za ovaj proces je predstavljen na slici 6.27.



Slika 6.27: Fajnmanovi dijagrami za raspodjeljivanje $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$.

Zadaci

6.1. Pokazati da važi:

- a) $\bar{e}\gamma^\mu e = \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R$, gde je $e_L = P_L e = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)e$ i $e_R = P_R e = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)e$.
- b) $\bar{L}\gamma^\mu L = \frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\nu_L + \bar{e}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)e$.

6.2. Ispitati da li je član $m\bar{e}e$, gde je e Dirakov spinor koji opisuje elektron, invarijantan na globalne $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Proveriti zatim kako se član $\bar{e}_R\Phi^+L + \bar{L}\Phi e_R$ ponaša pri globalnim $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ transformacijama. Ovde je Φ Higsov dublet, L leptonski levi dublet i e_R lepronski desni singlet.

6.3. U standardnom modelu se može umesto Higsovog dubleta uzeti triplet kompleksnih skalarnih polja $\phi = (\phi^0, \phi^-, \phi^{--})^T$. Napisati kako kovarijantni izvod deluje na polje ϕ . Birajući vakuumsku očekivanu vrednost kao $\langle \phi \rangle_0 = (\frac{v}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$, analizirati spontano narušenje $SU(2)_L \times U(1)_Y$ simetrije. Odrediti koji su generatori očuvani i naći mase "gauge" bozona. Generatori $SU(2)$ grupe u vektorskoj reprezentaciji su:

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.4. Pokazati da se fizička polja W^\pm, Z^0, A pri $U(1)_Q$ transformišu kao

$$\begin{aligned} \delta W_\mu^\pm &= \pm \theta^3 W_\mu^\pm \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e} \partial_\mu (2\theta^3) \\ \delta Z_\mu &= 0. \end{aligned} \tag{6.6.37}$$

6.5. Da li je $u_R(\Phi^\dagger Q)$ invarijantan na $SU(2)_L$, $U(1)_Y$, $U(1)_Q$ transformacije?

6.6. U okviru Vajnberg-Salamovog modela elektroslabih interakcija nacrtati sve Fajnmanove dijagrame koji u najnižem redu teorije perturbacije opisuju procese:

- a) $e + e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e + \nu_e$.
- b) $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+$.
- c) $\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$.
- d) $n \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- + p$.
- e) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$.
- f) $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$.

6.7. Nacrtati sve Fajnmanove dijagrame sa jednim, dva i tri verteksa koji opisuju proces raspada Higsovog bozona u okviru Vajnberg-Salamovog modela elektroslabih interakcija.

6.8. U okviru Vajnberg-Salamovog modela elektroslabih interakcija izračunati u najnižem redu teorije perturbacije:

- a) širinu raspada $H \rightarrow e + e^+$.
- b) širinu raspada $Z^0 \rightarrow e + e^+$.
- c) širinu raspada $Z^0 \rightarrow W + W^+$.
- d) kvadrat amplitude prelaza $\langle |M|^2 \rangle$ za rasejanje $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu$ u sistemu centra masa.

U zadacima a) i b) uzeti da su izlazne čestice ultrarelativističke, tj. da važi $E \sim |\vec{p}| \gg m$. U zadatku d) uzeti limes $M_W \gg |\vec{k}| \gg m_\mu, m_e$, gde je \vec{k} razmenjeni impuls u procesu.

6.9. Izračunati širinu raspada za proces $Z^0 \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Uzeti da je polarizacija Z^0 u sistemu mirovanja data sa $\varepsilon^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)^T$ i da su izlazne čestice ultrarelativističke.

6.10. Otkriće neutralnih stru

a) Izračunati efikansi presek (u CM sistemu) za proces $e^- + \nu_\mu \rightarrow \mu^- + \nu_e$. Prepostaviti da je energija na kojoj se dešava interakcija mnogo manja od masa W^\pm i Z^0 bozona, kako i da je $m_e \approx 0$.

b) Izračunati efikasni presek (u CM sistemu) za proces $e^- + \nu_\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu$. Prepostaviti da je energija na kojoj se dešava interakcija mnogo manja od masa W^\pm i Z^0 bozona, kako i da je $m_e \approx 0$.

c) Pokazati da je

$$\frac{\sigma(e^- + \nu_\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu)}{\sigma(e^- + \nu_\mu \rightarrow \mu^- + \nu_e)} = \frac{1}{4} - \sin^2 \theta_w + \frac{4}{3} \sin^4 \theta_w.$$

Ovaj rezultat je korišćen u eksperimentu koji je potvrdio postojanje neutralnih stru u postavio eksperimentalnu vrednos ugla θ_w na $\theta_w \approx 29^\circ$.

6.11. Z^0 bozon

a) Na osnovu Fajnmanovih pravila, nacrtati dijagrame za sve moguće kanale raspada Z^0 bozona. Da li uočavate probleme u detekciji nekog od ovih kanala? Koje probleme i

zbog čega? Totalana širina raspada Z^0 bozona je zbir parcijalnih širina raspada za pojedine kanale. Izračunati parcijalnu širinu raspada za kanal $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, pretpostavljajući da je $M_Z^2 \gg m_\mu^2$.

b) Razmotriti rasejanje

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

u blizini Z^0 pola (na energijama $E^2 \approx M_Z^2$). Izračunati efikasni presek za ovaj proces i razmotriti njegovo ponašanje na niskim energijama ($E \ll M_Z$), energijama reda M_Z i visokim energijama ($E > M_Z$). Kako Z^0 nije stabilna čestica, za propagator koristiti izraz $\frac{-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_Z^2)}{k^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z}$, gde je $\Gamma_Z \approx 2.5\text{GeV}$ širina raspada Z^0 bozona. Nacrtati grafik zavisnosti $\sigma(E)$ za ovo rasejanje, vodeći računa o doprinosu EM procesa na niskim energijama.

6.12. R-faktor kao dokaz postojanja boje

a) Nacrtati Fajnmanov dijagram za proces $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, pa zatim izračunati efikasni presek u ultrarelativističkom limesu ($m_e \ll m_\mu \ll E$, gde je E energija raspoloživa u procesu).

b) Za proces $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$, gde su q i \bar{q} kvark i odgovarajući antikvark, nacrtati Fajnmanov dijagram. Zatim izračunati efikasni presek u ultrarelativističkom limesu. Ovaj proces tretirati kao čist QED proces, zanemarujući efekte jake interakcije. Takodje, uzeti u obzir da se svaki kvark javlja u 3 boje.

c) Na zadatoj energiji procesa od 2GeV , izračunati

$$R = \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)}.$$

Objasniti rezultat, pa zatim opisati rečima kakve promene očekujete u dobijenom rezultatu sa povećanjem energije u procesu.

Glava 7

Kvantna hromodinamika

U ovoj glavi ćemo ukratko razmotriti interakciju izmedju kvarkova, jaku interakciju. Za njen opis nam neće trebati mehanizam spontanog narušenja simetrije, pa bi se moglo reći da je formalizam jake interakcije jednostavniji od formalizma (elektro)slabe interakcije. Ipak, videćemo da jaka interakcija ima dosta neobičnih osobina, od kojih su neke kontraintuitivne. Kvantna teorija jake interakcije se naziva kvantna hromodinamika (Quantum Chromodynamics).

7.1 Dejstvo za jaku interakciju

Videli smo u poglavlju 2.9 da kvarkovi nose kvantni broj boje. Ovaj kvantni broj predstavlja naboј za jaku interakciju. Leptoni nemaju boju i ne učestvuju u jaku interakciji. Teorija jake interakcije je zasnovana na $SU(3)_c$ lokalnoj simetriji i ona se naziva kvantnom hromodinamikom. Indeks c je od "colour", pa ovu grupu često zovemo kolorna grupa.

Kvarkovi su kolorni triplet. Svaki kvark može biti crven, plav ili zelen:

$$\psi_u = \begin{pmatrix} \psi_{uR} \\ \psi_{uB} \\ \psi_{uG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{u1} \\ \psi_{u2} \\ \psi_{u3} \end{pmatrix},$$

gde su $\psi_{1,2,3}$ bazisni vektori u trodimenzionoj definicionoj reprezentaciji. To jest

$$\psi_R = \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_B = \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_G = \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

Lagranžijan koji opisuje jaku interakciju kvarkova ima standardni oblik Jang-Milsovog Lagranžijana:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n_q} \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) \psi_k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (7.1.2)$$

gde su

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig_s A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}) \psi, \quad (7.1.3)$$

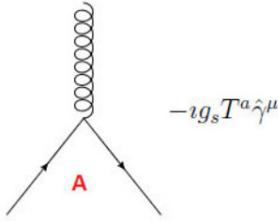
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (7.1.4)$$

kovarijantni izvod i tenzor jačine polja, respektivno. Matrice λ^a su Gelmanove matrice (2.5.1), $a = 1, \dots, 8$ i f^{abc} su strukturne konstante $su(3)_c$ algebre.

Prenosioci jakih interakcija, potencijali $A^{\mu a}$, $a = 1, \dots, 8$ nazivaju se gluoni. Oni pripadaju osmodimenzionoj (pridruženoj) reprezentaciji grupe $SU(3)_c$. Konstanta m_k je masa k -tog kvarka, a g_s konstanta jake interakcije. Interacija gluona sa kvarkovima je data sa

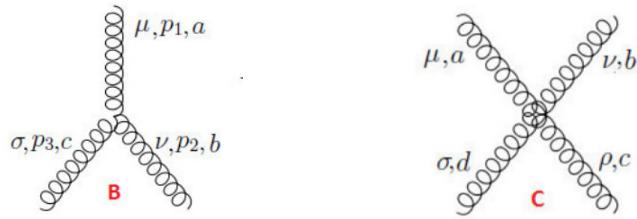
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s \bar{\psi}_i \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \gamma^\mu \psi_j A_\mu^a, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.1.5)$$

Odgovarajući verteks je dat na slici 7.1.



Slika 7.1: Verteks izmedju kvarkova i gluona.

Kao i u svim neabelovim gradijentnim teorijama, gluoni interaguju medjusobno. Verteksi koji odgovaraju ovoj interakciji su prikazani na slici 7.2.



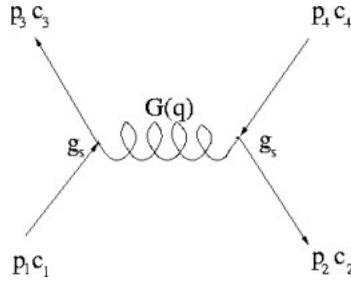
Slika 7.2: Gluonski verteksi.

Odredimo jačinu interakcije (kolorni faktor) za dijagram sa slike 7.3. On će predstavljati proizvod $SU(3)_c$ doprinosa verteksim.

Izaberimo prvo da su $c_1 = G$, $c_2 = R$, $c_3 = R$ i $c_4 = G$. Onda je jačina kuplovanja

$$f = g_s^2 \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_{31}^a}{2} \frac{\lambda_{13}^a}{2} = \frac{g_s^2}{4} (\lambda_{31}^5 \lambda_{13}^5 + \lambda_{31}^4 \lambda_{13}^4) = \frac{g_s^2}{2}. \quad (7.1.6)$$

Kao drugi primer, možemo izabrati $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = R$. U tom slučaju dobijamo $f = \frac{2}{3} g_s^2$.

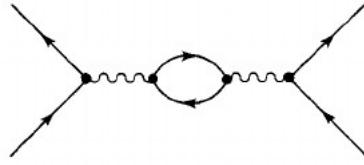


Slika 7.3: Rasejanje kvarkova u kvantnoj hromodinamici.

7.2 Asimptotska sloboda i zarobljenost kvarkova

U ovom poglavlju objasnićemo fenomen asimptotske slobode karakterističan za neabelove gradijentne teorije. Mi ćemo prezentovati samo nekoliko osnovnih rezultata, jer detaljna analiza zahteva poznavanje renormalizacije i renormalizacione grupe, koje se detaljno izučavaju na kursu Kvantne teorije polja.

Krenućemo od kvantne elektrodinamike. Fajnmanov dijagrami za rasejanje elektrona na protonu uključuju dijagrame sa polarizacijom vakuuma i dat je na slici 7.4. Ispostavlja se da je ovaj dijagram odgovoran za renormalizaciju naelektrisanja elektrona.



Slika 7.4: Polarizacija vakuuma u QED.

Direktnom primenom Fajnmanovih pravila imamo

$$i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = -(-ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\frac{1}{k - q - m_0 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{k - m_0 + i\epsilon} \gamma^\mu \right). \quad (7.2.7)$$

Konstanta \$e_0\$ je tzv. golo naelektrisanje elektrona, a \$m_0\$ gola masa elektrona. Za velike impulse \$k\$, ovaj dijagram se ponaša kao

$$\int^\Lambda \frac{k^3 dk}{k^2} \quad (7.2.8)$$

i on bi trebalo da bude kvadratno divergentan. Medutim zbog gradijentne simetrije, koja ublažuje divergenciju integrala ovaj dijagram je logaritamski divergentan. Može se pokazati [8] da on ima strukturu

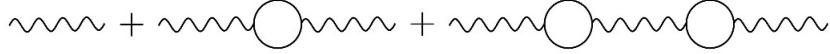
$$i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi(q^2), \quad (7.2.9)$$

gde je

$$i\Pi(q^2) = -\frac{ie_0}{2\pi^2} \left(\frac{1}{3\epsilon} - \frac{\gamma}{6} - \int_0^1 dx \ln \frac{m_0^2 - x(1-x)q^2}{4\pi\mu^2} \right). \quad (7.2.10)$$

Ovaj integral je izračunat u tzv. dimenzionoj regularizaciji u kojoj se uzima da je dimenzija prostora $D = 4 - \epsilon$, gde je ϵ mali regularizacioni parametar. Prvi član u (7.2.10) je divergentan, kao što smo očekivali. Konstanta γ je Ojlerova konstanta, a μ parametar koji ima dimenziju mase.

Pun fotonski propagator je prikazan na slici 7.5.



Slika 7.5: Sopstvena energija fotona.

Prvi dijagram je u najnižem redu teorije perturbacije i on ne sadrži petlje, dok su ostali dijagrami sa petljama i oni su višeg reda. Sumiranjem dijagonala višeg reda, dobijamo modifikaciju propagatora fotona

$$\frac{-ig^{\mu\nu}e_0^2}{q^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}e_0^2}{q^2 + i\epsilon} \left(1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots \right), \quad (7.2.11)$$

gde smo propagatoru dodali gola nanelektrisanja elektrona iz verteksa. Sumirajući dijagrame dobijamo

$$\frac{-ig^{\mu\nu}e_0^2}{q^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}e_0^2}{q^2(1 - \Pi(q^2)) + i\epsilon}. \quad (7.2.12)$$

Na osnovu ovog rezultata zaključujemo da se nanelektrisanje elektrona modifikuje i postaje

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\alpha_0}{1 - \Pi(q^2)}, \quad (7.2.13)$$

gde je $\alpha_0 = e_0^2/(4\pi)$, odnosno $\alpha_{\text{eff}} = e_{\text{eff}}^2/(4\pi)$. Nealektrisanje se zbog interakcije ne samo menja, tj. renormalizuje, već postaje zavisino od impulsa. Dakle, konstanta interakcije nije konstanta već zavisi od energije. Šta je onda nanelektrisanje elektrona e koje mi znamo? Ono je definisano izborom $q^2 = 0$, tj.

$$\alpha = \alpha_{\text{eff}}(q^2 = 0) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad (7.2.14)$$

odnosno

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0\Pi(0)}. \quad (7.2.15)$$

Lako se dobija da je efektivno nanelektrisanje elektrona dato sa

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \alpha(\Pi(q^2) - \Pi(0))} \quad (7.2.16)$$

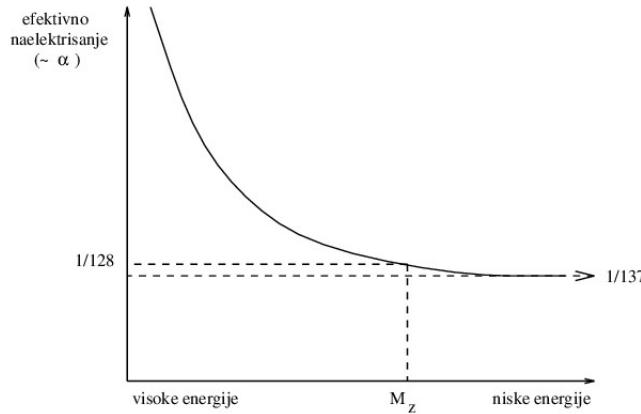
Za $-q^2 \gg m^2$ dobijamo

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{|q^2|}{m^2}\right), \quad (7.2.17)$$

odnosno

$$\frac{1}{\alpha_{\text{eff}}} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \ln \left(\frac{|q^2|}{m^2} \right) . \quad (7.2.18)$$

Zavisnost efektivne konstane interakcije od energije data je na slici 7.6.



Slika 7.6: Zavisnost konstante interakcije od energije u QED.

Vidimo da sa povećanjem energije (smanjivanjem rastojanja) konstanta interakcije raste. Ovo je kvantno mehanički analogon ekraniranja nanelektrisanja u elektrodinamici. Nanelektrisanje Q koje se nalazi u dielektriku efektivno je manje jer je ekranirano sredinom. Približavanjem nanelektrisanju, što odgovara većim energijama eksperimenta (merenja), vrednost nanelektrisanja raste.

Gornja procedura se može sprovesti u kvantnoj hromodinamici. Funkcije $\Pi(q^2) - \Pi(0)$ u kvantnoj hromodinamici je

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = -\frac{\alpha_0}{4\pi} \left(\frac{2}{3} n_k - 11 \right) \ln \frac{m^2}{-q^2} , \quad (7.2.19)$$

gde je

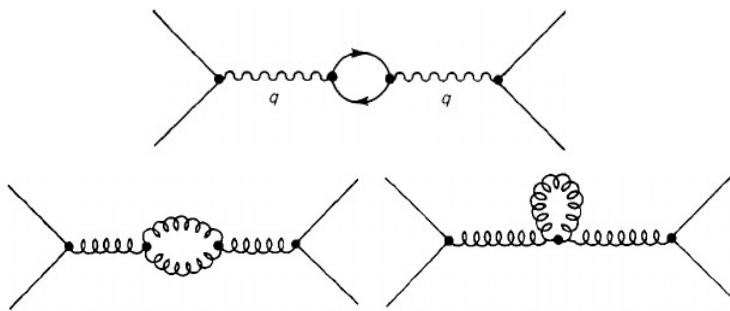
$$\alpha_0 = \frac{g_{s0}^2}{4\pi} , \quad (7.2.20)$$

a n_k je broj kvarkova. Dijagrami koji daju doprinos $\Pi(q^2)$ su prikazani na slici 7.7.

Efektivna konstanta jakih interakcija je [9]

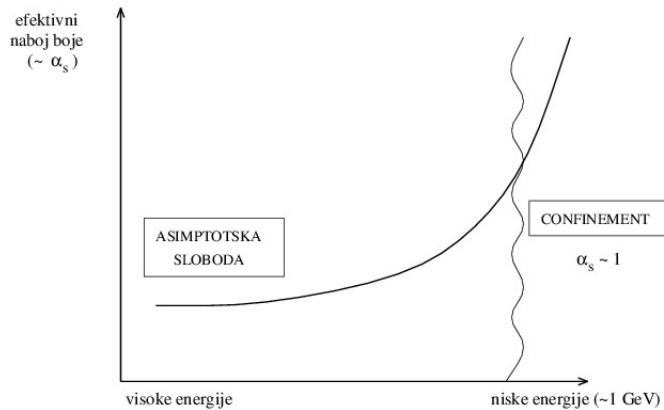
$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \left(11 - \frac{2n_k}{3} \right) \frac{\alpha(\mu^2)}{4\pi} \ln \left(\frac{|q^2|}{\mu^2} \right)} , \quad (7.2.21)$$

gde je μ^2 referentna tačka. Za broj kvarkova $n_k = 6$, dobijamo $\frac{2}{3} n_k - 11 = -7$. U ovom slučaju efektivna konstanta interakcija ima drugačije ponašanje od konstante interakcije u kvantnoj elektrodinamici. Ona opada sa energijom. Ovaj fenomen se naziva asimptotska sloboda. Nobelovu nagradu 2004 godine su za ovo otkriće podelili Politzer (D. Politzer),



Slika 7.7: Polarizacija vakuuma u kvantnoj hromodinamici na nivou jedne petlje.

Gros (D. Gross) i Vilček (F. Wilczek). Na ovaj način je objašnjena zarobljenost (confinement) kvarkova unutar hadrona. Na malim rastojanjima (veće energije eksperimenta) konstanta interakcije je slabija. Sa povećanjem rastojanja izmedju kvarkova u hadronu, konstanta interakcije raste i mi ne možemo da rastavimo hadron na kvarkove. Ovakvo ponašanje konstante interakcije je kontraintuitivno. Zavisnost konstante interakcije od energije u kvantnoj hromodinamici je prikazana na slici 7.8.



Slika 7.8: Zavisnost konstante interakcije od energije u QCD.

Zadaci

- 7.1.** Razmotriti kvark-kvark rasejanje. Nacrtati Fajnmanov dijagram, pa zatim napisati izraz za Fajnmanovu amplitutdu. Uporediti ovaj izraz sa Fanmanovom amplitudom za elektron-elektron rasejanje. Na osnovu poredjenja, može se zaključiti da potencijal koji

odgovara kvark-kvark interakciji ima oblik

$$V_{q\bar{q}} = -f \frac{\alpha_s \hbar c}{r},$$

gde je

$$f = \frac{g_s^2}{4} \sum_{a=1}^8 (c_3^+ \lambda_a c_1)(c_2^+ \lambda_a c_4) \quad (7.2.22)$$

kolorni faktor i predstavlja proizvod dva vretekса (do na gama-matrice). Izračunati kolor-faktore za ovo rasejanje. Diskutovati razliku izmedju tripletne i sekstetne konfiguracije.

7.2. Ponoviti prethodni zadatak za slučaj kvark-antikvark rasejanja. Diskutovati razliku izmedju singeltne i oktetne konfiguracije.

Dodatak A

Teorija grupa-kratak podsetnik

U ovom dodatku izložićemo osnovne elemente teorije grupa, a koje smo koristili ili implicirno predpostavljali da su čitaocu poznate. Mnogo detalja iz teorije grupa i njenoj vezi sa fizikom možete naći u [2, 3, 4, 16, 17, 18].

A.1 Grupe

- **Grupa** G je skup elemenata $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ sa operacijom množenja elemenata grupe koja zadovoljava sledeće aksiome:
 1. Proizvod svaka dva elementa grupe takodje je element grupe, tj.

$$(\forall g_i, g_j \in G) \quad g_i \cdot g_j \in G . \quad (1.1.1)$$

Ova aksioma je poznata kao aksioma zatvorenosti.

2. Množenje je asocijativno, tj. za svaka tri elementa grupe važi

$$(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k) . \quad (1.1.2)$$

3. Postoji jedinstveni jedinični element e takav da je

$$(\forall g_i \in G) \quad g_i \cdot e = e \cdot g_i = g_i . \quad (1.1.3)$$

4. Za svaki element grupe g_i postoji jedinstven inverzni element g_i^{-1} , takav da je

$$g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = e . \quad (1.1.4)$$

Broj elemenata diskretne grupe se naziva redom grupe, i označava se sa $|G|$.

- Za grupu ćemo reći da je **Abelova** ukoliko njeni elementi komutiraju.
- Za podskup H grupe G rećićemo da je **podgrupa** grupe G u odnosu na množenje u grapi G ako je H takodje grupa. Potreban i dovoljan uslov da je H podgrupa od G je da $h_i h_j^{-1}$ pripada H za svaka dva elementa h_i i h_j iz H .

- Podgrupa H je **invarijantna** (odnosno normalna) ukoliko za svaki element $h \in H$ i za svaki $g \in G$, element ghg^{-1} pripada podgrupi H . Grupa G je **prosta** ako ne sadrži invarijantne podgrupe. Ako grupa ne sadrži Abelove invarijantne pogrupe ona je **poluprosta**.
- Neka je H podgrupa grupe G , tj. $H < G$. Formirajmo skup $gH = \{g \cdot h_1, g \cdot h_2, \dots\}$, gde je g proizvoljan fiksiran element grupe G koji ne pripada podgrupi H . Skup gH se naziva **levi koset** od H u odnosu na element g . Menjajući g dobijamo različite leve kosete. Za dva elementa grupe g_1 i g_2 rečićemo da su ekvivalentna ($g_1 \sim g_2$) ako postoji $h \in H$ takvo da je $g_1 = g_2h$. Drugim rečima, dva elementa su ekvivalentna ako pripadaju istom kosetu.

Može se pokazati da je grupa G disjunktna unija coseta g_1H, g_2H, \dots . Skup koseta formira **koset prostor**. Generalno, koset prostor nije grupa. U specijalnom slučaju, kada je H invarijantna podgrupa, koset prostor G/H jeste grupa.

Desni koseti, Hg se definišu analogno. Ako je H invarijantna podgrupa, tada se levi i desni kosetni prostori poklapaju.

- Grupa G je **direktan proizvod** podgrupa H_1 i H_2 , $G = H_1 \otimes H_2$, ako:
 - svaki element iz G možemo napisati u obliku $g = h_1 \circ h_2$, gde $h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2$.
 - H_1 i H_2 imaju samo jednični element zajednički. Zbog ove osobine faktori h_1 i h_2 su jedinstveni.
 - H_1 i H_2 su invarijantne podgrupe.
- Grupa G je **semidirektan proizvod** podgrupa H_1 i H_2 , $G = H_1 \wedge H_2$, ako:
 - svaki element iz G možemo napisati u obliku $g = h_1 \circ h_2$, gde $h_1 \in H_1$ i $h_2 \in H_2$.
 - H_1 i H_2 imaju samo jednični element zajednički. Zbog ove osobine faktori h_1 i h_2 su jedinstveni.
 - H_1 je invarijantna podgrupa.
- **Spoljašnji direktni proizvod** dve grupe G_1 i G_2 je Dekartov proizvod

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1 \wedge g_2 \in G_2\} \quad (1.1.5)$$

sa množenjem

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \circ g'_1, g_2 \circ g'_2) . \quad (1.1.6)$$

- **Homomorfizam** je preslikavanje grupe G_1 u grupu G_2 , $f : G_1 \rightarrow G_2$ koje čuva proizvod. To jest,

$$f(g_1) \circ f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2) , \quad (1.1.7)$$

za svaki $g_1 \in G_1$ i $g_2 \in G_2$. Množenje u grupi G_1 je obelženo sa \cdot , a u grupi G_2 sa \circ . Ovo preslikavanje ne mora da bude 1 – 1, to jest, više elementata is G_1 mogu da se preslikaju u jedan element iz G_2 . Jediničnom elementu I_2 iz G_2 odgovara

više elemenata I_1, I'_1, \dots iz G_1 , od kojih je samo jedan jedinični element iz G_1 . Ovi elementi čine podgrupu Z , koja je invarijantna podgrupa grupe G_1 i naziva se **kernel homomorfizma**. Faktor grupe G_1/Z je izomorfna grupi G_2 .

- Grupe G_1 i G_2 su **izomorfne** ako su elementi u 1 – 1 korespondenciji, koja je očuvana pri kompoziciji.
- **Lijeva grupa** je grupa koja ima strukturu diferencijabilne mnogostrukosti. Proizvoljan element Lijeve grupe je oblika

$$g = g(a^1, \dots, a^n) \equiv g(a), \quad (1.1.8)$$

gde su a^1, \dots, a^n koordinate na mnogostrukosti \mathcal{M}_G pridružene grupi G . Bez gubitka opštosti možemo uzeti da je jedinični element $e = g(0, \dots, 0)$.

Koordinate proizvoda svaka dva elementna su analitičke funkcije koordinata ta dva elementa i koordinate inverznog elementa g^{-1} su analitičke funkcije koordinata od g . Preciznije, za proizvod elemenata Lijeve grupe, $g(a)g(b) = g(c)$ zahtevamo da su parametri proizvoda

$$c^i = c^i(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) \quad (1.1.9)$$

glatke funkcije, tj. beskonačno puta diferencijabilne. Za inverzni element $(g(a))^{-1} = g^{-1}(\bar{a})$ takodje važi uslov da su $\bar{a}^i = \bar{a}^i(a^1, \dots, a^n)$ glatke funkcije. Dimenzija Lijeve grupe je dimenzija odgovarajuće mnogostrukosti.

- Proizvoljan element u okolini jedinice je $g(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ možemo da razvijemo u red oko jediničnog elementa

$$g(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n) = 1 + \epsilon^a \frac{\partial g}{\partial x^a} \Big|_{x^a=\epsilon^a} \equiv 1 + i\epsilon^a T^a. \quad (1.1.10)$$

Veličine T^a su generatori Lijeve grupe. Oni čine bazis tangentnog prostora jediničnog elementa.

- **Kompaktna grupa** je grupa kod koje je prostor parametara kompaktan.
- **Prosto-povezana grupa** je grupa kod koje je prostor parametara prosto-povezan, to jest svi zatvoreni putevi u prostoru parametara mogu da se skupe u tačku.

Višestruko povezana grupa je grupa čiji je prostor parametara višestruko povezan. To jest, svi zatvoreni putevi ne mogu da se skupe u tačku, ali postoje klase puteva koje mogu da se deformišu jedni u druge. Ako ovih klasa ima m , onda je G m -tostruko povezana.

- **Univerzalno natkrivajuća grupa** \bar{G} grupe G zadovoljava:
 - \bar{G} je prosto-povezana.
 - G i \bar{G} homoformne.
 - \bar{G} ne sadrži nijednu prosto-povezanu podgrupu homoformnu sa G .

A.2 Algebre

- **Realna Ljeva algebra** L dimenzije $n \geq 1$ je realni vektorski prostor dimenzije n i pravilom kompozicije koja se naziva Ljev proizvod $[a, b]$, takav da, za sve $a, b, c \in L$ važi:

$$-[a, b] \in L.$$

$$-[\alpha + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c], \text{ za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$-[a, b] = -[b, a].$$

$$-\text{-Jakobijev identitet: } [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]].$$

U slučaju matričnih algebri, Ljev proizvod je komutator.

- Za **Abelovu Ljevu algebru** važi $[a, b] = 0$, za svako $a, b \in L$.
- **Podalgebra** L' algebri L je podskup elemenata iz L , takvih da formiraju algebru u odnosu na istu kompoziciju kao u L . **Invarijantna podalgebra (ideal)** je ona podalgebra za koju važi da komutator svih njenih elementa sa celom algebrrom pripada podalgebri, tj. $[L', L] \subset L'$.
- **Prosta Ljeva algebra** je algebra koja je neabelova i koja ne sadrži nijednu invarijantnu podalgebru.

Poluprosta Ljeva algebra ne sadrži nijednu Abelovu invarijatnu podalgebru.

- Neka je $\{T_a\}$ bazis Ljeve algebri. Tada je komutator dat sa

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c, \quad (1.2.11)$$

gde su $f_{ab}{}^c$ strukturne konstante i važi $f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c$.

- **Veza Ljeve grupe i Ljeve algebri**

Svakoj linearnej grupi G dimenzije n , može se pridružiti realna linearna Ljeva algebra L .

-Svaki element $a \in L$ definiše jednoparametarsku podgrupu $A(t)$ grupe G , takvu da je $A(t) = e^{at}$ i $-\infty < t < \infty$.

-Svaki element $g \in G$, u maloj okolini jediničnog elementa, pripada nekoj jednoparameterskoj podgrupi $A(t)$.

-Ako je G kompaktna Ljeva grupa, svaki element povezane podgrupe može da se prikaže kao e^a , gde je a neki element iz Ljeve algebri L . Ako je Ljeva grupa G povezana i kompaktna, svaki element $g \in G$ može da se prikaže kao $g = e^a$, za $a \in L$.

- **Primeri matričnih grupa**

$GL(N, \mathbb{C})$, generalna linearna grupa $N \times N$ nesingularnih kompleksnih matrica. Dimenzija ove grupe je $2N^2$.

$GL(N, \mathbb{R})$, generalna linearna grupa $N \times N$ nesingularnih realnih matrica formata. Dimenzija ove grupe je N^2 .

$SL(N, \mathbb{C})$, specijalna linearna grupa je podgrupa $GL(N, \mathbb{C})$ matrica jedinične determinante. Dimenzija ove grupe je $2(N^2 - 1)$.

$SL(N, \mathbb{R})$, specijalna linearna grupa je podgrupa od $GL(N, \mathbb{R})$ matrica jedinične determinante. Dimenzija ove grupe je $N^2 - 1$.

$U(N)$, unitarna grupa kompleksnih matrica koje zadovoljavaju $UU^\dagger = U^\dagger = I$. Dimenzija grupe je N^2 .

$SU(N)$, specijalna unitarna grupa koja je podgrupa od $U(N)$ koje zadovoljavaju dopunski uslov da im je determinanta 1. Dimenzija grupe je $N^2 - 1$.

$O(N)$, ortogonalna grupa realnih matrica formata $N \times N$ koji zadovoljavaju uslov $M^T M = MM^T = I$. Dimenzija grupe je $\frac{1}{2}N(N - 1)$.

$SO(N)$, specijalna ortogonalna grupa je podgrupa $O(N)$ grupe čiji elementi zadovoljavaju dopunski uslov da im je determinanta jednaka jedan. Dimenzija grupe je $\frac{1}{2}N(N - 1)$.

$Sp(2N, \mathbb{C})$, simplektička grupa nad poljem kompleksnih brojeva. To je grupa čije matrice M zadovoljavaju uslov

$$M^T JM = J, \quad (1.2.12)$$

gde je J antisimetrična matrica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.13)$$

Dimenzija grupe je $2N(2N + 1)$.

$Sp(2N, \mathbb{R})$, simplektička grupa nad poljem realnih brojeva. To je grupa čije matrice M zadovoljavaju uslov

$$M^T JM = J. \quad (1.2.14)$$

Dimenzija grupe je $N(2N + 1)$.

$U(n, m)$, $n + m = N$, je pseudounitarna grupa kompleksnih matrica koje zadovoljavaju uslov $MgM^\dagger = g$, gde je g dijagonalna matrica sa n jedinica i m minus jedinica na dijagonalni,

$$g = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}. \quad (1.2.15)$$

Dimenzija ove grupe je N^2 .

$O(n, m)$, $n + m = N$, je pseudoortogonalna grupa realnih matrica koje zadovoljavaju uslov $MgM^T = g$. Dimenzija je $\frac{1}{2}N(N - 1)$.

$SO(n, m)$, $n + m = N$, je podgrupa pseudoortogonalne grupe koju čine matrice jedinične determinante. Dimenzija grupe je $\frac{1}{2}N(N - 1)$.

A.3 Reprezentacije

- Definišimo linearni, n -dimenzioni, vektorski prostor L_n i linerano preslikavanje T koje slika vektor $x \in L_n$ u vektor $x' = Tx \in L_n$. Preslikavanje T je linearne, invertibilno (ako je 1 – 1) i postoji jedinični element.

U slučaju grupe G , ako svakom elementu $g \in G$ odgovara linearni operator $T(g) \in L_n$, takav da važi $T(g_1 \circ g_2) = T(g_1)T(g_2)$, onda skup operatora $T(g)$ čini **n -dimenzionu reprezentaciju** grupe G . Skup operatora $T(g)$ čini grupu G' , koja je homomorfna sa G , odnosno izomorfna, ako je preslikavanje T 1 – 1.

Ako fiksiramo basis u prostoru L_n , onda svakom operatoru $T(g)$ odgovara $n \times n$ matrica $D(g)$. Skup matrica $D(g)$ za sve $g \in G$ čini **matričnu reprezentaciju** grupe G .

- Verna reprezentacija** $D(g)$ grupe G je 1–1 preslikavanje grupe G na grupu matrica $D(g)$. Različitim elementima grupe G odgovaraju različite matrice $D(g)$ i preslikavanje je izomorfno.
- Dve reprezentacije $D(g)$ i $D'(g)$ su **ekvivalentne**, ako pri promeni bazisa u L_n važi transformacija sličnosti: $D(g) = SD(g)S^{-1}$, gde je S nesingularna matrica.
- Reprezentacije $T(g)$ je **reducibilna reprezentacija**, ako postoji netrivijalni potprostor $L_m \subset L_n$, koga operatori $T(g)$ ostavljaju invarijantnim. Ako ne postoji takav potprostor, onda je reprezentacija **ireducibilna**.

Potpuno reducibilna reprezentacija se može prikazati kako direktni zbir dve reprezentacije: $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g)$ i matrica $D(g)$ ima blok dijagonalnu formu.

- Šurova lema:** Ako je $D(g)$ ireducibilna reprezentacija grupe G i A matrica za koju važi $D(g)A = AD(g)$, onda je A umnožak jedinične matrice.
- Unitarna reprezentacija** grupe G je reprezentacija $D(g)$, za koju važi:

$$D(g)D^+(g) = D^+(g)D(g) = I.$$

Za konačne grupe važi da je svaka reprezentacija ekvivalentan unitarnoj i svaka unitarna reprezentacija je ili ireducibilna ili potpuno reducibilna.

Za kompaktne Lijeve grupe važi da je svaka reprezentacija je ekvivalentna unitarnoj reprezentaciji. Takodje je svaka reducibilna reprezentacija potpuno reducibilna.

Ako je Ljeva grupa nekompaktna, onda su sve njene unitarne reprezentacije beskonačno dimenzione.

- Ireducibilne reprezentacije kompaktne grupe G su jednoznačne samo ako je G prosto-povezana grupa. U slučaju višestruko povezane grupe G , ireducibilne reprezentacije su više značne, dok univerzalno natkrivajuća grupa \bar{G} ima jednoznačne reprezentacije.

- **Kazimirov operator** je polinom po generatorima grupe koji komutira sa svim generatorima grupe G . Po Šurovoj lemi, Kazimirov operator se u ireducibilnim reprezentacijama svovodi na brojeve. Ti brojevi se koriste za obeležavanje (klasifikaciju) ireducibilnih reprezentacija.
- **Pridružena reprezentacija Lijeve algebre**, za svaki element X iz algebre, je definisana komutatorom

$$(\text{ad}X)T_b = [X, T_b] = (\text{ad}X)^c{}_b T_c . \quad (1.3.16)$$

Konkretno, za $X = T_a$ imamo

$$(\text{ad}T_a)T_b = [T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \quad (1.3.17)$$

pa je

$$(\text{ad}T_a)^c{}_b = i f_{ab}{}^c \quad (1.3.18)$$

Dakle, u pridruženoj reprezentaciji matrični elementi generatora Lijeve algebre su strukturne konstante.

- **Kilingova forma** Lijeve algebre je definisana sa

$$\mathcal{B}(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) . \quad (1.3.19)$$

Ona pridružuje svakom paru elemenata trag proizvoda ta dva elementa u pridruženoj reprezentaciji. Za generatore algebre ona postaje

$$g_{ab} = \text{Tr}(\text{ad}(T_a)\text{ad}(T_b)) = -f_{ca}{}^d f_{db}{}^c . \quad (1.3.20)$$

Veličina g_{ab} se naziva **Kartanovom metrikom**.

- Potreban i dovoljan uslov da Ljeva algebra bude poluprosta je da je Kartanova metrika nesingularna, tj. $\det g \neq 0$. Kartanova metrika realnih Ljevih algebri je pozitivno definitna.
- **Kartanova podalgebra** poluproste Lijeve algebre predstavlja maksimalan skup komutirajućih generatora algebre, H_1, \dots, H_l . Dakle,

$$[H_j, H_k] = 0 . \quad (1.3.21)$$

Dimenzija Kartanove podalgebre se naziva rangom algebre. Standardni bazis poluprostih Ljevih algebri, $H_1, \dots, H_l, E_1, \dots, E_{n-l}$ čine elementi Kartanove podalgebre i linearne kombinacije preostalih generatora koji zadovoljavaju

$$[H_i, E_k] = \rho_k(H_i)E_k . \quad (1.3.22)$$

Realne veličine $\rho_k(H_i)$ predstavljaju $n - l$ vektora koji imaju po l komponenti. Oni se nazivaju korenima. Kako operatori H_i komutiraju, to postoji njihov zajednički svojstveni bazis, koji nazivamo težinama.

- **Kazimirovi operatori** komutiraju sa svim generatorima (bazisnim vektorima) algebre L . Ako je algebra poluprosta ili prosta ranga r , onda postoji r nezavisnih Kazimirovih operatora. Kazimirovi operatori Lijeve algebre L se koriste za određivanje ireducibilnih reprezentacija odgovarajuće grupe G .

Dodatak B

Vajlovi spinori

U ovom dodatku ćemo uvesti leve i desne Vajlove spinore i diskutovati vezu izmedju kiralnosti i heliciteta čestica i antičestica.

B.1 Vajlove jednačine

U Vajlovoj (kiralnoj) reprezentaciji γ matrice su

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

dok je γ_5 matrica

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Svojstvene vrednosti matrice γ_5 su ± 1 . Pomoću ove matrice se mogu konstruisati projektori

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Nazivamo ih levim i desnim projektorom, jer oni projektuju Dirakov spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

na levi, odnosno desni spinor:

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1.3}$$

$$P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Levi i desni Vajlov spinor su svojstveni spinori operatora kiralnosti (matrica γ_5). Dirakova jednačina u Vajlovoj reprezentaciji gama matrica je

$$\begin{pmatrix} -m & i\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \\ i\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_R &= m\psi_L , \\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_L &= m\psi_R . \end{aligned}$$

Ako je $m = 0$ prethodne jednačine su dekuplovane

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_R = 0 , \quad (2.1.5)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right) \psi_L = 0 \quad (2.1.6)$$

i nazivaju se Vajlovim jednačinama. Ove jednačine opisuju bezmasenu česticu spina (heliciteta) $1/2$.

B.2 Levi Vajlovi spinori

Partikularno rešenje za levi Vajlov spinor ψ_L je

$$\psi_L = \phi e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} . \quad (2.2.1)$$

Zamenom u jednačinu (2.1.6) dobijamo $E = \pm E_p = \pm|\mathbf{p}|$, tj. postoje pozitivno i negativno energetska rešenja. Neka je $p^\mu = (E_p, \mathbf{p})$. Pozitivno energetsko rešenje za levi spinor je

$$\psi_L = u(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} .$$

Impuls ovog stanja je \mathbf{p} . Zamenom ovog partikularnog rešenja u (2.1.6) dobijamo

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u(\mathbf{p}) = -u(\mathbf{p}) .$$

Iz poslednje jednačine vidimo da je helicitet¹ ovog stanja $\lambda = -\frac{1}{2}$. Specijalno, ako je $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$, onda je $u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pa je partikularno rešenje dato sa

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} .$$

¹U Vajlovoj reprezentaciji matrica Σ je

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} .$$

U četvorokomponentnoj notaciji rešenje je

$$u_2(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x}. \quad (2.2.2)$$

Energija ovog rešenja je $E_p = |\mathbf{p}|$, impuls $p\mathbf{e}_z$ a helicitet je negativan.

Analizirajmo sada negativno energetsko rešenje

$$\psi_L = v(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}.$$

Zamenom u (2.1.6) dobijamo

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} v(\mathbf{p}) = -v(\mathbf{p}).$$

Ako je $\mathbf{p} = p\vec{e}_z$, onda je $v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pa je partikularno rešenje

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x}.$$

U četvorokomponentnoj notaciji rešenje je dato sa

$$v_1(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x}. \quad (2.2.3)$$

Energija ovog rešenja je $E = -|p|$, impuls $-p\mathbf{e}_z$, a helicitet je $+\frac{1}{2}$. Odsustvo ovakvog rešenja u (Dirakovoj) teoriji šupljina interpretira se kao prisustvo antičestice energije $+|\mathbf{p}|$, impulsa \mathbf{p} i pozitivnog heliciteta. Opšte rešenje za levo Vajlovo polje je

$$\psi_L = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|}} \left(u_2(\mathbf{p})c_2(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + v_1(\mathbf{p})d_1^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \right). \quad (2.2.4)$$

U okviru kvantne teorije polja, kreacioni operatori c_2^\dagger i d_1^\dagger , delovanjem na vakuum, kreiraju jednočestična stanja. Jednočestično stanje $c_2^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ ima pozitivnu energiju, impuls \mathbf{p} i negativan helicitet (levu polarizaciju). Stanje $d_1^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ opisuje antičesticu pozitivne energije, impulsa \mathbf{p} i pozitivnog heliciteta (desna polarizacija).

B.3 Desni Vajlovi spinori

Partikularno rešenje za desni Vajlov spinor ψ_R je

$$\psi_R = \phi e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.3.1)$$

Zamenom u jednačinu (2.1.5), dobijamo $E = \pm E_p = \pm |\mathbf{p}|$. Kao i za levi Vajlov spinor, i ovde postoje pozitivno i negativno energetska rešenja. Pozitivno energetski desni spinor je

$$\psi_R = u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} .$$

Zamenom ovog partikularnog rešenja u (2.1.5) dobijamo

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p}) .$$

Iz poslednje jednačine vidimo da je helicitet ovog stanja $\lambda = +\frac{1}{2}$, jer je impuls čestice \mathbf{p} .

Ako je $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$, onda je $u(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je partikularno rešenje

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} .$$

U četvorokomponentnoj notaciji rešenje je

$$u_1(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} . \quad (2.3.2)$$

Energija ovog rešenja je $E_p = |p|$, impuls $p\mathbf{e}_z$, a helicitet je pozitivan.

Za negativno energetsko rešenje

$$\psi_R = v(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} .$$

Iz (2.1.5) dobijamo

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} v(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}) .$$

Helicitet ovog rešenja nije $+\frac{1}{2}$, već $-\frac{1}{2}$, jer je impuls ovog stanja $-\mathbf{p}$. Ako je $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$, onda je $v(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je partikularno rešenje

$$\psi_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} .$$

U četvorokomponentnoj notaciji rešenje je

$$v_2(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip \cdot x} . \quad (2.3.3)$$

Opšte rešenje za desno Vajlovo polje je onda

$$\psi_R = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 p \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|}} \left(u_1(\mathbf{p}) c_1(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + v_2(\vec{p}) d_2^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right). \quad (2.3.4)$$

Kreacioni operatori c_1^\dagger i d_2^\dagger delovanjem na vakuum kreiraju jednočestična stanja. Jednočestično stanje $c_1^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ ima pozitivnu energiju, impuls \mathbf{p} i pozitivan helicitet (desnu polarizaciju). Stanje $d_2^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ opisuje antičesticu pozitivne energije, impulsa \mathbf{p} i negativnog heliciteta (levu polarizaciju).

Lako se vidi da su svojstvene vrednosti operatora kiralnosti $\frac{1}{2}\gamma_5$ za stanja

$$u_1(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, u_2(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}, v_1(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} \text{ i } v_2(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}$$

respektivno data sa $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$. Zaključujemo da se za bezmasene čestice operator kiralnost i helicitet se poklapaju, dok antičestice imaju suprotnu kiralnost u odnosu na helicitet. Uporedite ovaj rezultat sa zadatkom 4.13 iz reference [11]. Ako se podsetimo klasifikacije IR reprezentacija Lorencove grupe, glava 1.1, zaključujemo da se kiralnost zapravo odnosi na kvantne brojeve j_1 i j_2 . Čestice leve kiralnosti se transformišu po reprezentaciji $(j_1, 0)$, a čestice desne kiralnosti se transformišu po reprezentaciji $(0, j_2)$. Operator parnosti je u kiralnoj reprezentaciji dat sa

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Primećujemo da on prebaca čestice leve kiralnosti u čestice desne kiralnosti, tj. reprezentaciju $(j, 0)$ prevodi u reprezentaciju $(0, j)$. To znači da teorija koja je invarijantna na parnost mora da sadrži leve i desne Vajlove spinore na isti način. Primer takve teorije je Kvantna elektrodinamika, gde levi i desni Vajlov spinor zajedno čine Dirakov spinor. Sa druge strane, teorija koja narušava parnost, mora da na različit način uključuje leve i desne Vajlove spinore. Primer takve teorije je teorija elektroslabih (ili slabih) interakcija. Opis slabe interakcije ne bi bio moguć kada bi se koristili Dirakovi spinori.

Skicirajmo na kraju kako je eksperimentalno pokazano da su sva neutrina leve kiralnosti, tj. da ne postoje neutrina desne kiralnosti. U eksperimentu je analiziran raspad piona na mion i odgovarajući neutrino. Na primer

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Ako prepostavimo da se pion raspada iz mirovanja (uvek možemo preći u referentni sistem vezan za pion), antimion i mionski neutrino će se razleteti pod uglom od 180° , imaće suprotne impulse. Prepostavimo da su ove čestice ultrarelativističke, tj. da je helicitet dobar kvantni broj. Helicitet μ^+ se može izmeriti, a helicitet ν_μ se onda izračuna, koristeći zakone održanja i činjenicu da π^+ ima spin nula. U ponovljenim eksperimentima je uvek dobijano da je helicitet μ^+ negativan, što znači da je helicitet ν_μ uvek negativan, tj. ν_μ je uvek leve kiralnosti. Ne postoji nijedan eksperiment sa suprotnim rezultatom, pa je prema tome zaključeno da ne postoje neutrina desne kiralnosti.

Dodatak C

Maseno vektorsko polje

U ovom dodatku ćemo izložiti osobine masenog polja spina 1, tj. masenog vektorskog polja.

C.1 Dejstvo i jednačina kretanja

Gustina lagranžijana masenog vektorskog polja je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}V_\mu V^\mu , \quad (3.1.1)$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. Variranjem ovog dejstva dobija se jednačina kretanja

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 V^\nu = 0 . \quad (3.1.2)$$

Delovanjem sa ∂_μ na ovu jednačinu, dobijamo da maseno vektorsko polje zadovoljava sledeći uslov

$$\partial_\nu V^\nu = 0 . \quad (3.1.3)$$

Prema tome, maseno vektorsko polje ima tri stepena slobode. Jednačina kretanja se onda svodi na

$$(\square + m^2)V^\mu = 0 . \quad (3.1.4)$$

Partikularno rešenje ove jednačine je

$$\epsilon^\mu(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} , \quad (3.1.5)$$

gde je $\epsilon^\mu(\mathbf{k})$ vektor polarizacije. Zamenom (3.1.5) u (3.1.3) dobijamo $k_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{k}) = 0$. Postoje tri nezavisna stanja polarizacije $\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})$, $r = 1, 2, 3$ koja zadovoljavaju relacije ortogonalnosti

$$\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})\epsilon_{rs}^*(\mathbf{k}) = -\delta_{rs} . \quad (3.1.6)$$

Polarizacioni vektori zavise od sistema reference. U sistemu u kome se čestica impulsa k kreće duž z -ose, za vektore polarizacije možemo izabrati

$$\epsilon_1(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \epsilon_2(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \epsilon_3(k) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega_k \end{pmatrix} . \quad (3.1.7)$$

Ovi vektori zadovoljavaju uslov (3.1.3), ortogonalni su i deo su bazisa u prostoru Minkovskog. Četvrti vektor u bazisu je $\epsilon_0^\mu = k^\mu/m$. Projekcija spina na z -osu vektora $\epsilon_3(k)$ je 0. Sa vektora ϵ_1 i ϵ_2 prećićemo na

$$\epsilon_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.8)$$

za koje je projekcija spina na z -osu ± 1 . Polarizacioni vektori zadovoljavaju relacije kompletnosti

$$\sum_{r=1}^3 \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_r^{\nu*}(\vec{k}) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}. \quad (3.1.9)$$

Opšte rešenje jednačine (3.1.4) je

$$V^\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \epsilon_r^{\mu*}(\mathbf{k}) b_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right). \quad (3.1.10)$$

U kvantnoj teoriji polja $a_r(\mathbf{k})$ i $b_r(\mathbf{k})$ su anihilacioni operatori za čestice odnosno antičestice, dok su $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ i $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ odgovarajuće kreacioni operatori. Oni zadovoljavaju standardne bozonske komutacione relacije.

C.2 Propagator

Propagator je definisan sa

$$\begin{aligned} iD^{\mu\nu}(x-y) &= <0|TV^\mu(x)V^{\nu\dagger}(y)|0> \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)}, \end{aligned}$$

gde je

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{i \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.2.1)$$

Primetimo da se propagator za bezmaseno vektorsko polje

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

ne može dobiti iz (3.2.1) uzimajući limes $m \rightarrow 0$. Ovo je povezano i sa diskontinuitetom u broju stepeni slobode. Naime, maseno vektorsko polje ima tri stepena slobode, dok bezmaseno vektorsko polje ima samo dva.

Literatura

- [1] S. Weinberg, Quantum Field Theory (vol I), CUP (2005).
- [2] G. Costa and G. Fogli, Symmetries and Group Theory in Particle Physics, Springer (2012)
- [3] D. B. Lichtenberg, Unitary Symmetry and elementary particles, Academic Press (1978).
- [4] H. F. Jones, Groups, Representations and Physics, IoP (1998).
- [5] W. Greiner and B. Muller, Quantum Mechanics, Symmetries, Springer (2001).
- [6] T. Cheng and L. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford UP (1998).
- [7] C. Burgess and G. Moore, The Standard Model: A Primer, CUP (2006).
- [8] M. Peskin and D. Schroeder, Quantum Field Theory, Addison Wesley (1995).
- [9] C. Quigg, Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, Princeton University Press (2013), second edition
- [10] W. N. Cottingham and D.A. Greenwood, An introduction to the Standard Model of Particle Physics, CUP (2007), second edition
- [11] V. Radovanović, Problem Book in Quantum Field Theory, Springer (2008).
- [12] V. Radovanović, Kvantna teorija polja 1, skripte (2017).
- [13] S. G. Avery and B. U. W. Schwab, Noether's second theorem and Ward identities for gauge symmetries, JHEP **1602** (2016) 031, [arXiv:1510.07038].
- [14] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.
- [15] P. W. Anderson, Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, Phys. Rev. 130, 439 1963.
- [16] M. Damnjanović, Hilbertovi prostori i grupe, Fizički fakultet (2000).
- [17] H. Osborn, Symmetries and Groups, Lecture notes DAMTP (2017).

- [18] A. Zee, Group theory in Nutshell for Physicsts, PUP (2016).
- [19] M. Peskin, Concepts of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, (2019)