ZADACI IZ KVANTNE TEORIJE POLJA II

DOMAĆI ZADATAK I

1. U ovom zadatku razmatraćemo slobodnu jednodimenzionu česticu mase m.

   (a) Pokazati je amplituda prelaza data sa
   $$< q_f, t_f | q_i, t_i >= \sqrt{\frac{m}{2\pi i (t_f - t_i)}} e^{\frac{im}{2}\frac{(q_f-q_i)^2}{t_f-t_i}} \quad . \tag{0.1}$$

   (b) Pokazati da je faza eksponenta u delu (a) dejstvo slobodne čestice.

   (c) Pokazati da amplituda prelaza iz dela (a) zadovoljava Šredingerovu jednačinu uz granični uslov
   $$\lim_{t_f \to t_i} < q_f, t_f | q_i, t_i >= \delta(q_f - q_i) \ .$$

2. Talasna funkcija slobodne čestice u početnom trenutku je
   $$\psi(q, t=0) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(q-a)^2}{4\sigma^2}} \ .$$
   Pokazati da je
   $$|\psi(q,t)|^2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(q-a)^2}{2\sigma^2(t)}} \ ,$$
   gde je
   $$\sigma^2(t) = \sigma^2\left(1 + \frac{t^2}{4m^2\sigma^4}\right) \ .$$

3. Weyl-ovo uredjenje operatora $A_1 \dots A_n$ definisano je sa
   $$(A_1 \dots A_n)_W = \frac{1}{\text{brojpermutacija}} \sum_p A_{i_1} \dots A_{i_n} \ .$$
   Pokazati
   $$\begin{aligned} (pq^n)_W &= \frac{1}{n+1}(q^n p + q^{n-1} p q + \dots + p q^n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} q^l p q^{n-l} \end{aligned} \tag{0.2}$$
   kao i
   $$< q_{i+1} | (pq^n)_W | q_i >= \left(\frac{q_{i+1} + q_i}{2}\right)^n < q_{i+1} | p | q_i > \ .$$

4. Lagranžijan Lee-Yang modela je $L = \frac{1}{2} f(q)\dot{q}^2$ gde je $f = f(q)$ proizvoljna diferencijabilna funkcija. Pokazati da je amplituda prelaza data sa

$$< q_f, t_f | q_i, t_i >= N \int Dq e^{i \int dt (L(q,\dot{q}) - \frac{1}{2}\delta(0) \ln f(q))} \ .$$

DOMAĆI ZADATAK II

5. Vakuum-vakuum amplituda prelaza za linearni harmonijski oscilator u prisustvu spoljašnjeg izvora je
$$Z[J] = N \int Dq e^{i \int dt(\dot{q}^2/2 - \omega^2 q^2/2 + Jq)} \ . \tag{0.3}$$
Pokazati da je
$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2}\int dt dt' J(t) D(t-t') J(t')} \ , \tag{0.4}$$
gde $D(t-t')$ treba odrediti. Koju diferencijalnu jednačinu zadovoljava Grinova funkcija $D(t-t')$. Naći euklidsku vakuum-vakuum amplitudu, $Z_E[J]$ i na osnovu nje oderediti Grinovu funkciju $D_E(\tau - \tau')$ i naći vezu izmedju Grinovih funkcija u euklidskom i Minkovskijevom prostoru .

6. Izračunati varijacioni izvod
$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4 y \partial_\mu J(y) V^\mu(y) \ .$$

7. Za slobodnu teoriju skalarnog polja eksplicitno izračunati Grinove funkcije $G_3(x_1, x_2, x_3)$ i $G_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

8. Ako je $A(\bar{x}, \bar{x}') = (-\Box_E + m^2)\delta^{(4)}(\bar{x} - \bar{x}')$ pokazati da je
$$\det A = e^{\mathrm{tr}\log A} = e^{\int d^4\bar{x} \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \ln(\bar{p}^2 + m^2)} \ .$$

9. Pokazati da vakuum-vakuum amplituda prelaza za slobodno skalarno polje, $Z_0[J]$ zadovoljava jednačinu
$$(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = J(x) Z_0[J] \ .$$

10. Dokazati
$$\int dy_1 \ldots dy_n e^{-\frac{1}{2}Y^T A Y + \rho^T Y} = (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln A} e^{\frac{1}{2}\rho^T A^{-1}\rho} \ ,$$
gde je $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ i $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)^T$.

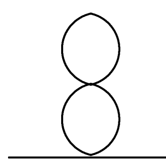
DOMAĆI ZADATAK III

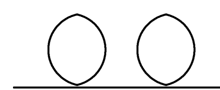
11. Pokazati

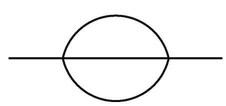
$$
\begin{aligned}
G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= G_c^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) + G_c^{(2)}(x_1,x_2)G_c^{(2)}(x_3,x_4) \\
&+ G_c^{(2)}(x_1,x_3)G_c^{(2)}(x_2,x_4) \\
&+ G_c^{(2)}(x_1,x_4)G_c^{(2)}(x_2,x_3)\ .
\end{aligned} \tag{0.5}
$$

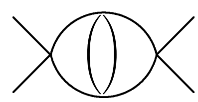
12. Lagranžijan interakcije ϕ^3 teorije je $L_{\rm int} = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$. Izračunati generišući funkcional $Z[J]$ i Grinove funkcije $G^{(2)}(x_1,x_2)$ i $G^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$ u prvom redu po konstanti interakcije.

13. Naći faktore simetrije za sledeće dijagrame:

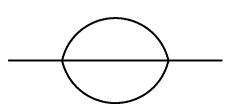
(a) 

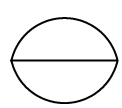
(b) 

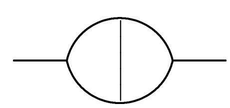
(c) 

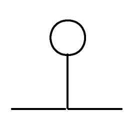
(d) 

14. Naći faktore simetrije za sledeće dijagrame:

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

15. Lagranžijan je dat sa

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m^2\chi^2 + g\phi^2\chi^2 \ .$$

    (a) Odredite izraz za generišuće funkcionale $Z[J, j]$ i $W[J, j]$ do prvog reda po konstanti interakcije g. Predstaviti rezultate grafički.

    (b) Izračunajte povezanu dvotačkastu Grinovu funkciju za polje ϕ u koordinatnom i u impulsnom prostoru. Predstaviti rezultat grafički.

16. Dejstvo za kompleksno (naelektrisano) skalarno polje je

$$S_J = \int d^4x(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi + J^*\varphi + J\varphi^*) \ , \tag{0.6}$$

gde smo uključili i članove sa izvorima.

    (a) Naći $Z_0[J, J^*]$.

    (b) Naći sve dvotačkaste Grinove funkcije diferenciranjem $Z_0[J, J^*]$.

    (c) Ako je Lagranžijan interakcije $L_{\rm int} = -\frac{g}{2}(\varphi^*\varphi)^2$ naći $Z[J, J^*]$.

17. Na času je izračunat generišući funkcional povezanih Grinovih funkcija, $W[J]$ za φ^4 teoriju.

    (a) Izračunati klasično polje, $\varphi_c(x)$.

    (b) Pokazati da se perturbativnim rešavanjem jednačine dobijene pod (a) dobija

$$J(x) = (\Box + m^2)\varphi_c + \frac{\lambda}{6}[\varphi_c(x)]^3 + \frac{i\lambda}{2}\Delta_F(0)\varphi_c(x) + o(\lambda^2) \ .$$

    (c) Na osnovu predhodnih rezultata pokazati da je efektivno dejstvo dato sa

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi_c] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\varphi_c(\Box + m^2)\varphi_c \\ &- \frac{i\lambda}{4}\Delta_F(0)\int d^4x(\varphi_c)^2 - \frac{\lambda}{24}\int d^4x(\varphi_c)^4 + o(\lambda^2)\end{aligned}$$

    (d) Odrediti verteksne funkcije $\Gamma^{(2)}(p_1, p_2)$ i $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

18. Napisati Švinger-Dajsonovu jednačinu za φ^3 teoriju. Njenim diferenciranjem po struji $J(y)$ dobiti jednačinu koja povezuje odgovarajuće Grinove funkcije.

19. U okviru φ^4 teorije izračunati diferencijalni presek za rasejanje

$$skalar + skalar \to skalar + skalar$$

u najnižem redu teorije perturbacije.

DOMAĆI ZADATAK IV

20. Eksplicitno izračunati sledeći integral

$$I_4(M) = \int \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\theta_3 \mathrm{d}\theta_4 e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta} \ ,$$

gde su θ_i Grasmanove varijable a M antisimetrična matrica.

21. Izračunati sledeće integrale Grasmanovih promenljivih (a je realan broj):

(a) $\int \mathrm{d}\theta e^{a\theta}$,

(b) $\int \mathrm{d}\theta \frac{1}{1-a\theta}$,

(c) $\int \mathrm{d}\theta \log(1+\theta)$,

(a) $\int \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\theta^* \theta\theta^* e^{-a\theta^*\theta}$.

22. Dokazati

$$\int \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi^T \theta} = \sqrt{\det M} e^{-\frac{1}{2}\chi^T M^{-1} \chi} \ .$$

23. Izračunati $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ za slobodno Dirakovo polje.

24. Majorana spinor je definisan sa $\psi = C\bar{\psi}^T$. Lagranžijan za Majorana spinor je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\bar{\psi}\psi) \ .$$

Odrediti generišući funkcional Z_0 i naći $\langle 0| T\psi(x)\bar{\psi}(y) |0\rangle$, $\langle 0| T\psi(x)\psi(y) |0\rangle$ i $\langle 0| T\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y) |0\rangle$.

25. Teorija interakcije Dirakovog i skalarnog polja je zadata lagranžijanom

$$L = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\phi \ . \qquad (0.7)$$

Odredite:

(a) Odrediti generišuće funkcionale $Z(J, \eta, \bar{\eta})$ i $iW(J, \eta, \bar{\eta})$ zaključno sa članom drugog reda po konstanti interakcije, g.

(b) Naći

$$\langle 0|T(\bar{\psi}(x)\psi(y))|0\rangle_c$$

koristeći deo (a).

DOMAĆI ZADATAK V

26. Aksijalni gauge je $n^\mu A^a_\mu = 0$, gde je $n_\mu n^\mu = 1$. Odrediti propagator gauge polja u ovoj kalibraciji.

27. Odredite Fadejev-Popov determinantu u aksijalnom gaugu.

28. Odrediti Fadajev-Popov determinatu ako se za gauge uslov u QED izabere

$$\partial_\mu A^\mu - \lambda A_\mu A^\mu = 0$$

29. Izračunati

$$\Gamma^{(3)} = \frac{\delta^3 S}{\delta A^c_\gamma(x_3)\delta A^b_\beta(x_2)\delta A^a_\alpha(x_1)}\Big|_{A^a_\mu=0} ,$$

gde je S Yang-Mills-ovo dejstvo. Trogluonski verteks je $V_3 = -i\Gamma^{(3)}$. Odredite ga u impulsnom prostoru.

DOMAĆI ZADATAK VI

30. Efektivno dejstvo na jednu petlju (the one-loop EA) dato je sa

$$\Gamma = S + \Gamma^{(1)} = S + \frac{i}{2}\mathrm{tr}\log S''(\varphi)\ ,$$

gde je S klasično dejstvo, a $\varphi(x)$ klasično polje (background polje). Pokazati da je za φ^4 teoriju kvadratna korekcija dejstva[1] data sa

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^4x\tilde{\varphi}[-\Box - m^2 - \frac{\lambda}{2}\varphi^2]\tilde{\varphi}\ ,$$

gde je $\tilde{\varphi}$ kvantno polje. $\Gamma^{(1)}$ je onda dato sa

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)} &= \frac{i}{2}\mathrm{tr}\log(\Box + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2)\\ &= \frac{i}{2}\mathrm{tr}\log(\Box + m^2) + \frac{i}{2}\mathrm{tr}\log[1 + (\Box + m^2)^{-1}\frac{\lambda}{2}\varphi^2]\\ &= \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{tr}[(\Box + m^2)^{-1}\frac{\lambda}{2}\varphi^2)]^n\ ,\end{aligned} \tag{0.8}$$

gde smo odbacili član koji ne zavisi od klasičnog polja. Očigledno je

$$\mathrm{tr}(GV)^n = \int d^4x_1 ... d^4x_n G(x_1 - x_2)V(x_2)...V(x_n)G(x_n - x_1)V(x_1)\ .$$

U ovom zadatku potrebno je da se odredi efektivni potencijal, tj. ne zanimaju nas članovi sa izvodima. Zato možemo da uzmemo da je $\varphi =$ const. Tada je

$$\Gamma = -\int d^4x V_{eff}(\varphi)\ .$$

Potkazati da je efektivni potencijal dat sa

$$\begin{aligned}V_{eff} &= \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{32\pi^2}\Big(\Lambda^2 - 2m^2\ln\frac{\Lambda}{m} - \frac{1}{2}m^2\Big)\frac{\lambda\varphi^2}{2}\\ &- \frac{1}{32\pi^2}\frac{\lambda^2\varphi^4}{8}\Big(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{1}{2}\Big)\\ &+ \frac{1}{64\pi^2}\Big(m^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\Big)^2\ln\Big(1 + \frac{\lambda\varphi^2}{2m^2}\Big)\\ &+ \frac{A}{2}\varphi^2 - \frac{B}{4!}\varphi^4\ ,\end{aligned}$$

[1] kvadratna po kvantnim poljima

gde smo u poslednjem redu dodali kontračlanove. Koristiti impulsni cut-off za regularizaciju integrala. Ako se za renormalizacione uslove uzme

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_{eff}}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi=0} &= m^2 \\ \frac{d^4 V_{eff}}{d\varphi^4}\Big|_{\varphi=0} &= \lambda \end{aligned}$$

naći izraz za efektivni potencijal. Analizirati slučaj $\lambda\varphi \gg m^2$. Efektivni potencijal je poznat kao Colman-Weinberg-ov potencija

31. Peskin-Schreder, Problem 6.3

32. V. Radovanović, Problem Book in .. (PBQFT), Problem 11.1

DOMAĆI ZADATAK VII

33. Primenom Fajnmanovih pravila napisati izraz za polarizaciju vakuuma, $i\Pi^{\mu\nu}$ u QED.
    (a) Naći izraz $i\pi = g_{\mu\nu} i\Pi^{\mu\nu}$.
    (b) Naći divergentni i konačni deo izaraza $i\pi$ primenom cut-off metoda.
    (c) Naći divergentni i konačni deo izaraza $i\pi$ primenom dimenzione regularizacije.
    (d) Primenom cutting rule (pravilo presecanja) naći diskontinuitet izraza π.
34. Rešiti zadatak 11.12 iz Problem Book in .. (PBQFT) primenom dimenzione regularizacije (kao u PBQFT) i primenom cut-off metoda.

DOMAĆI ZADATAK VIII

35. (a) Izračunati beta funkciju, β, anomalnu dimenziju mase, γ_m i polja γ_d u φ^4 teoriji u MS suptrakciji.
    (b) Proveriti da Grinova funkcija $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4, m, \lambda, \mu)$ zadovoljava jednačinu renormalizacione grupe.
    (c) Na času smo našli efektivnu konstantu interakcije $\tilde{\lambda}(t)$. Odredite sada i efektivnu masu $\tilde{m}(t)$.

36. PBQFT Zadatak 11. 14. Pored toga uraditi i
    (a) Odrediti β funkciju, γ_m iγ_d.
    (b) Naći efektivnu konstantu interakcije $\tilde{g}(t)$.

37. Odrediti beta funkcije β_g i β_λ za model iz zadatka 11.12 (PBQFT)

38. Peskin-Schreder, Problem 10.1 b

39. Peskin-Schreder, Problem 10.2

40. Peskin-Schreder, Problem 11.3 (bez dela f)

41. Peskin-Schreder, Problem 12.2

42. (a) Odrediti anomalnu dimenziju za Dirakov spinor i elektromagnetno polje u QED. Takodje naći masenu anomalnu dimenziju Dirakovog polja.
    (b) Proveriti da verteksna vunkcija Γ^μ zadovoljava jednačinu renormalizacione grupe.

43. Nacrtati one-loop dijagrame koji doprinose sopstvenoj energiji gauge polja. Naći divergentne delove dijagrama u kojem je propagator ghost polje kao i dijagrama u kojem su gauge polja propagatori.