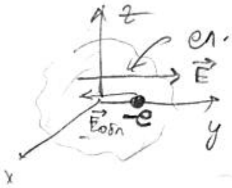
Супстанцијалне средине у статичким пољима

Густина електронског облака атома водоника је дата са $\rho(\vec r)=eC\left(1-\frac{r}{2a}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a}}$, где је e наелектрисање електрона, док су C и a позитивне константе. Израчунати поларизабилност атома β у слабом статичком пољу, занемарујући деформацију облака.



ел. облак са центром у координ. почетку

$\vec E = E\vec e_y$ спољње ел. поље раздваја наелектрисања, помера протон из координ. почетка у тачку где су изједначене силе од спољњег ел. поља и електронског облака

$\vec E_{обл} = E_{обл}(r)\vec e_r$; Гаусова теорема: $\oint \vec E_{обл}\cdot d\vec S = \int \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$

$$E_{обл}(r)\cdot 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi} eC\left(1-\frac{r}{2a}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a}}\, r^2 \underbrace{\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}_{4\pi}$$

$$= \frac{eC}{\varepsilon_0}4\pi \int_0^r r'^2\left(1+\frac{r'^2}{4a^2}-\cancel{2}\frac{r'}{2a}\right)e^{-\frac{2r'}{a}}dr'$$

$$\boxed{E_{обл}(r) = \frac{eC}{\varepsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2\left(1+\frac{r'^2}{4a^2}-\frac{r'}{a}\right)e^{-\frac{2r'}{a}}dr'}$$; Протон у $r\vec e_y$! $-e(E_{обл}+E)=0$ $\Rightarrow \boxed{E=-E_{обл}(r)}$

$$\vec p = -e\cdot \underbrace{r\vec e_y}_{\text{положај протона}} = \beta\vec E = \beta E\vec e_y = -\beta E_{обл}(r)\vec e_y$$

дип. момент атома

$$-e\cdot r = -\beta\frac{eC}{\varepsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2\left(1+\frac{r'^2}{4a^2}-\frac{r'}{a}\right)e^{-\frac{2r'}{a}}dr'$$

развијемо $e^{-\frac{2r'}{a}} \approx 1-\frac{2r'}{a}$ може и само 1 јер нам треба члан $\sim r^3$ из $\int$.

$$-er \approx -\beta\frac{eC}{\varepsilon_0 r^2}\int_0^r r'^2 dr' = -\beta\frac{eC}{\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\frac{r^{\cancel{3}}}{3} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3\varepsilon_0}{C}}$$

Ако је поларизабилност молекула зависна од правца, онда енергија интеракције молекула са спољашњим пољем зависи од њихове оријентације. Због тога, упоредо са деформационим механизмом делује и оријентациони механизам поларизовања иако молекули немају сталне диполне моменте. Услед тога, диелектрична константа средине која се састоји од хаотично распоређених молекула зависи од температуре. Испитати описану појаву на примеру разређеног двоатомског гаса, ~~састоји~~ који се налази у слабом константном електричном пољу $\vec E$. Израчунати коефицијент поларизабилности диелектрика α, ако је подужна поларизабилност молекула β_1, а попречна β_2. Број молекула по јединици запремине је N.

$$\vec P = N\langle\vec p\rangle = \hat\alpha\vec E \leftarrow \text{Поларизација } \vec P \text{ ; } \hat\alpha \text{ поларизабилност}$$

тражимо $\langle \vec p\rangle$ преко Болцманове расподеле

$$\langle\vec p\rangle = \frac{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \vec p\, e^{-\frac{W_{int}}{k_B T}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-\frac{W_{int}}{k_B T}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

усредњавамо диполни момент по правцима!

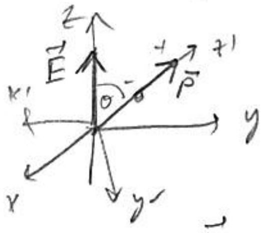
$\vec{p} = \underbrace{\vec{p}_0}_{\text{сопствени диполни момент}} + \underbrace{\hat{\beta}\vec{E}}_{\text{индуковани диполни момент}}$; $\vec{p}_0 = 0 \Rightarrow \vec{p} = \hat{\beta}\vec{E}$

$$W_{int} = -\int \underbrace{\vec{F}}_{\text{сила на дипол}} d\vec{r} = -\int (\vec{p}_{\parallel}\nabla)\vec{E}\, d\vec{r} = -\int (\beta\vec{E}\nabla)\vec{E}\, d\vec{r} = -\int \beta\vec{E}\cdot d\vec{E} = \boxed{-\frac{1}{2}\beta\vec{E}\cdot\vec{E}} = -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}$$

које садржи $\vec{p}$!

добија се сабир. зато $\frac{1}{2}$!

$\hat{\beta}$ дато у систему у коме је дипол дуж z-осе



$\vec{p} = \vec{p}'$ изражено преко ' координата

$$\vec{p} = \vec{p}' = \hat{\beta}'\cdot\vec{E}' = \begin{pmatrix} \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \\ E_z' \end{pmatrix} = \beta_2 E_x'\vec{e}_x' + \beta_2 E_y'\vec{e}_y' + \beta_1 E_z'\vec{e}_z'$$

$$\vec{E} = E\vec{e}_z = E_x'\vec{e}_x' + E_y'\vec{e}_y' + E_z'\vec{e}_z'$$

$$\vec{p} = \beta_2(E_x'\vec{e}_x' + E_y'\vec{e}_y' + E_z'\vec{e}_z') - \beta_2 E_z'\vec{e}_z' + \beta_1 E_z'\vec{e}_z' = \beta_2\vec{E} + (\beta_1-\beta_2)E_z'\vec{e}_z'$$

$E_z' = E\cos\theta$; $\vec{e}_z' = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$, φ угао x, x' оса

$$\vec{p} = \beta_2 E\vec{e}_z + (\beta_1-\beta_2)E\cos\theta(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z)$$

$$= (\beta_1-\beta_2)E\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + (\beta_1-\beta_2)E\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + (\beta_1 E\cos^2\theta + \beta_2 E\sin^2\theta)\vec{e}_z$$

$\boxed{\vec{E}\cdot\vec{p} = E^2(\beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta)}$ $\quad W_{int} = -\frac{1}{2}\hat{\beta}\vec{E}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{E}$ због индуковања!

$$\langle\vec{p}\rangle = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\beta_1-\beta_2)E\sin\theta\cos\theta\,\cancel{(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)} + (\beta_1 E\cos^2\theta + \beta_2 E\sin^2\theta)\vec{e}_z\right] e^{+\frac{1}{2}\frac{E^2}{k_BT}(\beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta)}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{+\frac{1}{2}\frac{E^2}{k_BT}(\beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta)}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} E\vec{e}_z(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)\, e^{+\frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)}\cdot\sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{+\frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)}\sin\theta\, d\theta}$$

$$\int_0^{\pi} e^{+\frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)}\sin\theta\, d\theta \approx \int_{-1}^{1}\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)\right)d\cos\theta = 2\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}\beta_2 + \frac{E^2}{2k_BT}(\beta_1-\beta_2)\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}\left(\beta_2 + \frac{\beta_1-\beta_2}{3}\right)\right) = \boxed{2\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}\,\frac{2\beta_2+\beta_1}{3}\right)}$$

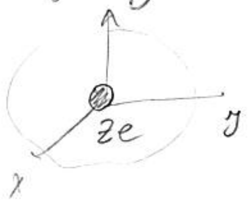
$$\int_0^{\pi}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)\, e^{+\frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)}\sin\theta\, d\theta \approx \int_0^{\pi}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta)\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-1}^{1}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)x^2)\left(1 + \frac{E^2}{2k_BT}(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)x^2)\right)dx = 2\left(\beta_2 + \frac{\beta_1-\beta_2}{3} + \frac{E^2}{2k_BT}\beta_2\left(\beta_2 + (\beta_1-\beta_2)\frac{1}{3}\right) + \frac{E^2}{2k_BT}(\beta_1-\beta_2)\left(\frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_1-\beta_2}{5}\right)\right)$$

$$\approx \frac{2\beta_2+\beta_1}{3}\cdot 2$$

$\langle\vec{p}\rangle = \frac{2\beta_2+\beta_1}{3}\vec{E}$; $\vec{P} = N\langle\vec{p}\rangle = N\frac{2\beta_2+\beta_1}{3}\vec{E} = \alpha\vec{E} \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = N\frac{2\beta_2+\beta_1}{3}\hat{I}}$

Јонизовани гас се састоји од јона наелектрисања Ze, средње концентрације N_0 и електрона концентрације n_0. Гас је у целини електронеутралан ($ZN_0 = n_0$). Сматрајући да се такав гас описује класичном статистиком, као и да је енергија интеракције честице мала у поређењу са k_BT наћи расподелу густине наелектрисања у близини јона.



$$\rho = \rho_j + \rho_e = Ze\cdot n_j(r) - e\,n_e(r); \quad n_j(r) = N_0 e^{-\frac{W_j}{k_BT}}, \; n_e = n_0 e^{-\frac{W_e}{k_BT}}$$

$$W_j = Ze\varphi(r); \quad W_e = -e\varphi(r)$$ енергија јона и електрона.

$$n_j = N_0 e^{-\frac{Ze\varphi(r)}{k_BT}}; \quad n_e = n_0 e^{+\frac{e\varphi(r)}{k_BT}}$$

$$\rho(r) = ZeN_0 e^{-\frac{Ze\varphi(r)}{k_BT}} - e\underbrace{n_0}_{ZN_0} e^{\frac{e\varphi(r)}{k_BT}} = ZeN_0\left(e^{-\frac{Ze\varphi(r)}{k_BT}} - e^{\frac{e\varphi(r)}{k_BT}}\right)$$

$$\approx ZeN_0\left(1 - \frac{Ze\varphi(r)}{k_BT} - 1 - \frac{e\varphi(r)}{k_BT}\right) = -\frac{Z(Z+1)e^2N_0}{k_BT}\varphi(r)$$

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Z(Z+1)e^2N_0}{\varepsilon_0 k_BT}\varphi(r); \quad \Delta\varphi(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi(r))$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(\varphi(r)\cdot r)}{dr^2} = \underbrace{\boxed{\frac{Z(Z+1)e^2N_0}{\varepsilon_0 k_BT}}}_{\kappa^2}\varphi(r); \quad \frac{d^2}{dr^2}(\varphi(r)\cdot r) = \kappa^2(\varphi(r)r)$$

$$\varphi(r)\cdot r = Ae^{-\kappa r} + \underbrace{B}_{0}e^{\kappa r}; \quad \varphi(r) = \frac{A}{r}e^{-\kappa r}$$

дивергира за $r \to \infty$

$$\varphi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{r} \Rightarrow A = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}; \quad \boxed{\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-\kappa r}}$$

$$\rho(r) = -\frac{Z(Z+1)e^2N_0}{k_BT}\varphi(r) = \boxed{-\frac{Z^2(Z+1)e^3N_0}{4\pi\varepsilon_0 k_BT}\frac{e^{-\kappa r}}{r}} = \boxed{-\frac{Ze\kappa^2}{4\pi}\frac{e^{-\kappa r}}{r}}$$

Атом са сферносиметричном расподелом наелектрисања изложен је у спољашње магнетно поље $\vec{B}$. Показати да је додатно поље магнетно условљено дијамагнетском струјом дато са $\vec{B}_{(0)} = -\frac{\mu_0\varepsilon_0 q}{3m}\varphi(0)\vec{B}$, где је $\varphi(0)$ електростат. потенцијал електрона на месту где је језгро.
$q = -e$ наелектр. електрона
m - маса електрона

У спољњем магнетном пољу електрони почну да ротирају $\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$, па се појави дијамагнетска струја $\vec{j} = \rho\cdot\vec{v} = \rho\cdot\vec{\omega}\times\vec{r} = -\frac{\rho q}{2m}\vec{B}\times\vec{r}$
Интересује нас магнетно поље од ове струје

$$\tilde{\vec{B}}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{0}-\vec{r}\,')}{r'^3}d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int -\frac{\rho q}{2m}\frac{(\vec{B}\times\vec{r})\times(-\vec{r})}{r^3}\,\frac{dV}{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}$$

(det. - лакше тк.)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{2m}\int\frac{\rho}{r}\left(\vec{r}(\vec{B}\cdot\vec{r}) - \vec{B}r^2\right)\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 q}{8\pi m}\int\frac{\rho}{r^{\cancel{2}}}\left(B\cdot r^2\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{e}_z + \overbrace{\sin\theta\,\vec{e}_{r_c}}^{0 \text{ после } \int}) - Br^2\vec{e}_z\right)dV = \frac{\mu_0 q\vec{B}}{8\pi m}\int\frac{\rho}{r}(\cos^2\theta - 1)\,dV$$

$$\tilde{\vec{B}}(r=0) = \frac{\mu_0 q \vec{B}}{8\pi m}\int \frac{\rho}{r}(\cos^2\theta - 1)\,dV = \frac{\mu_0 q \vec{B}}{8\pi m}\int \frac{\rho}{r}(\cos^2\theta-1)\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = -\int_0^{-\pi} \cos^2\theta \, d\cos\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = 2 \Rightarrow \boxed{\int \cos^2\theta \frac{\rho}{r}\,dV = \frac{1}{3}\int \frac{\rho}{r}\,dV}$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}}(r=0) = \frac{\mu_0 q \vec{B}}{8\pi m}\int \frac{\rho}{r}\left(\frac{1}{3}-1\right)dV = -\frac{2}{3}\frac{\mu_0 q \vec{B}}{8\pi m}\int \frac{\rho}{r}\,dV$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{0}-\vec{r}'|}\,d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho}{r}\,dV \Rightarrow \int \frac{\rho}{r}\,dV = 4\pi\varepsilon_0\varphi(0)$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}=0) = -\frac{\mu_0 q \vec{B}}{12\cancel{\pi} m}\cdot 4\cancel{\pi}\varepsilon_0 \varphi(0) = \boxed{-\frac{\mu_0 \varepsilon_0 q \vec{B}\,\varphi(0)}{3m}}$$

Наћи диелектрични тензор $\hat{\varepsilon}(\omega)$ диелектрика који се састоји од N атома у јединичној запремини и налази се у константном и хомогеном магнетном пољу $\vec{B}_0$. Користити модел слабо везаног електрона и занемарити дисипацију енергије

II Њ. закон за електрон у атому

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-m\omega_0^2\vec{r}}_{\text{модел еластично везаног електрона}} + e\vec{E}_0 e^{i\omega t} + e\vec{v}\times\underbrace{\left(\frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}_0 e^{i\omega t}\right)}_{\text{магн. поље ЕМ таласа}} + e\vec{v}\times\vec{B}_0$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2\vec{r} + \frac{e\vec{E}_0}{m}e^{i\omega t} + \frac{e}{m}\vec{v}\times\vec{B}_0 \qquad \vec{v}\times\vec{B}_0 = (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z)\times B_0\vec{e}_z = (\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y)B_0$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x + \frac{eE_{0x}}{m}e^{i\omega t} + \frac{e}{m}B_0\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y + \frac{eE_{0y}}{m}e^{i\omega t} - \frac{e}{m}B_0\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_0^2 z + \frac{eE_{0z}}{m}e^{i\omega t} \end{aligned}\right\}$$

$\vec{r} = \vec{r}_h + \vec{r}_p$; $\vec{r}_h$ – осциловање, $\vec{r}_p$ – одговор на побуду

Нама треба $\vec{r}_p = \vec{C}e^{i\omega t}$ партикуларно решење.

$$\begin{aligned} C_x (i\omega)^2 &= -\omega_0^2 C_x + \frac{eE_{0x}}{m} + \frac{e}{m}B_0 C_y i\omega \\ C_y (i\omega)^2 &= -\omega_0^2 C_y + \frac{eE_{0y}}{m} - \frac{e}{m}B_0 C_x i\omega \\ C_z (i\omega)^2 &= -\omega_0^2 C_z + \frac{eE_{0z}}{m} \end{aligned}$$

$$C_x(\omega_0^2-\omega^2) - C_y\frac{eB_0 i\omega}{m} = \frac{eE_{0x}}{m}$$

$$C_x\frac{eB_0 i\omega}{m} + C_y(\omega_0^2-\omega^2) = \frac{eE_{0y}}{m}$$

$$\boxed{C_z = \frac{eE_{0z}}{m(\omega_0^2-\omega^2)}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & -2i\omega\omega_L \\ 2i\omega\omega_L & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{eE_{0x}}{m} & -2i\omega\omega_L \\ \frac{eE_{0y}}{m} & \omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \omega_0^2-\omega^2 & \frac{eE_{0x}}{m} \\ 2i\omega\omega_L & \frac{eE_{0y}}{m} \end{vmatrix}, \quad \omega_L = \frac{eB_0}{2m}$$

Ларморова прецесија

$$C_x = \frac{\frac{eE_{0x}}{m}(\omega_0^2-\omega^2) + \frac{eE_{0y}}{m}2i\omega\omega_L}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_L^2} \qquad C_y = \frac{\frac{eE_{0y}}{m}(\omega_0^2-\omega^2) - \frac{eE_{0x}}{m}2i\omega\omega_L}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - 4\omega^2\omega_L^2}$$

$$\vec{p} = e\vec{r}_p = \frac{e^2}{m}\begin{pmatrix} \frac{E_{0x}(\omega_0^2-\omega^2) + E_{0y}2i\omega\omega_L}{\Delta} \\ \frac{E_{0y}(\omega_0^2-\omega^2) - E_{0x}2i\omega\omega_L}{\Delta} \\ \frac{E_{0z}}{(\omega_0^2-\omega^2)} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \underbrace{\boxed{\frac{e^2}{m}\begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Delta} & \frac{2i\omega\omega_L}{\Delta} & 0 \\ -\frac{2i\omega\omega_L}{\Delta} & \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \end{pmatrix}}}_{\hat{\beta}} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \hat{\beta}\vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\hat{\beta}\vec{E} = \varepsilon_0(\hat{\varepsilon}_r - I)\vec{E} \Rightarrow \boxed{\hat{\varepsilon}_r = I + \frac{N}{\varepsilon_0}\hat{\beta}}$$

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_r = I + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Delta} & \frac{2i\omega\omega_L}{\Delta} & 0 \\ -\frac{2i\omega\omega_L}{\Delta} & \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \end{pmatrix}}$$

Одредити тензор поларизабилности атома $\hat{\beta}(\omega)$ у пољу равног монохроматског таласа, при слабом константном и хомогеном магнетном пољу $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Користити модел еластично везаног електрона и метод сукцесивних апроксимација. Занемарити дисипацију енергије.

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} + e\vec{E}_0 e^{i\omega t} + e\vec{v}\times\overbrace{\left(\frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}_0\right)}^{\approx 0} e^{i\omega t} + e\vec{v}\times\vec{B}_0$$

, у претходном зад. егзактно, сада приближно решавање

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x + \frac{eE_{0x}}{m}e^{i\omega t} + \frac{e}{m}B_0\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y + \frac{eE_{0y}}{m}e^{i\omega t} - \frac{e}{m}B_0\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_0^2 z + \frac{e}{m}E_{0z} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \boxed{z_p = \frac{\frac{e}{m}E_{0z}e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

$x_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\alpha^k$; $y_p = \sum_{k=0}^{\infty} y_k\alpha^k$ заменимо у диф. ј-не

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{x}_k \alpha^k = -\omega_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} x_k \alpha^k + \frac{e}{m} E_{0x} e^{i\omega t} + \sum_{k=0}^{\infty} \dot{y}_k \alpha^{k+1} \qquad \alpha = \frac{eB_0}{m} \text{ мало}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{y}_k \alpha^k = -\omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} y_k \alpha^k + \frac{e}{m} E_{0y} e^{i\omega t} - \sum_{k=0}^{\infty} \dot{x}_k \alpha^{k+1}$$

уз α^0 :
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -\omega_0^2 x_0 + \frac{e}{m} E_{0x} e^{i\omega t} \\ \ddot{y}_0 &= -\omega_0^2 y_0 + \frac{e}{m} E_{0y} e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \quad x_{0p} = \frac{\frac{e}{m} E_{0x} e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad y_{0p} = \frac{\frac{e}{m} E_{0y} e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

уз α^1 :
$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \dot{y}_0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{e i\omega E_{0y}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$
$$\ddot{y}_1 = -\omega_0^2 y_1 - \dot{x}_0 \Rightarrow \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = -\frac{e i\omega E_{0x}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

$$x_{1p} = C_1 e^{i\omega t} \quad (\omega_0^2 - \omega^2) C_1 = \frac{i\frac{e}{m}\omega E_{0y}}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow C_1 = \frac{i\omega \frac{e}{m} E_{0y}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$y_{1p} = C_2 e^{i\omega t} \quad (\omega_0^2 - \omega^2) C_2 = -\frac{i\frac{e}{m}\omega E_{0x}}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow C_2 = -\frac{i\omega \frac{e}{m} E_{0x}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$x_p(t) = x_{0p}(t) + \alpha x_{1p}(t) + \ldots = \frac{eE_{0x}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} + i \frac{e\omega E_{0y}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} e^{i\omega t} \frac{eB_0}{m} + \ldots$$

$$y_p(t) = y_{0p}(t) + \alpha y_{1p}(t) + \ldots = \frac{eE_{0y}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} - i \frac{e\omega E_{0x}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} e^{i\omega t} \frac{eB_0}{m} + \ldots$$

$$\vec{p} = e\vec{r}_p = \frac{e^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{E_{0x}}{\omega_0^2 - \omega^2} + i \frac{\omega E_{0y} \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ \frac{E_{0y}}{\omega_0^2 - \omega^2} - i \frac{\omega E_{0x} \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \\ \frac{E_{0z}}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \frac{e^2}{m} \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} & \frac{i\omega\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} & 0 \\ \frac{-i\omega\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} & \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \hat{\beta} \vec{E}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{i\omega\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{-i\omega\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Веза између $\vec{E}$ и $\vec{D}$ у средини са временском дисперзијом дата је са: $\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_0 f(t-u) \vec{E}(u)\, du$ ако је $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где је f_0 константа. Одредити $\varepsilon(\omega)$.

Побуда ем талас $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f(t-u) \vec{E}(u)\, du = \varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} f_0 e^{-\frac{t-u}{\tau}} \vec{E}_0 e^{i\omega u}\, du$$
$$= \varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} + \varepsilon_0 f_0 \vec{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \int_{-\infty}^{t} e^{i\omega u + \frac{u}{\tau}}\, du = \varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} + \varepsilon_0 f_0 \vec{E}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} e^{i\omega u + \frac{u}{\tau}} \Big|_{-\infty}^{t}$$
$$= \varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} + \varepsilon_0 \vec{E}_0 f_0 \cancel{e^{-\frac{t}{\tau}}} \frac{\tau}{1 + i\omega\tau} e^{i\omega t + \cancel{\frac{t}{\tau}}} = \boxed{\varepsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} \left(1 + \frac{f_0 \tau}{1 + i\omega\tau}\right)}$$

Наћи диелектричну пропустљивост проводне средине $\varepsilon(\omega)$ сматрајући јоне непокретним и занемарујући ефекте везаних електрона. Дисипацију енергије урачунати увођењем силе трења $\vec{F}_{tr} = -\eta \dot{\vec{r}}$, која делује на електроне. Концентрација електрона је N.

Побуда је монохроматски талас $\vec{E}_0 e^{i\omega t} = \vec{E}$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\eta \dot{\vec{r}} + e\vec{E}_0 e^{i\omega t} + e\dot{\vec{r}} \times \left(\frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}_0 e^{i\omega t}\right)$$
занемарујемо

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\eta}{m} \dot{\vec{r}} + \frac{e\vec{E}_0}{m} e^{i\omega t} \qquad \vec{r}_p = \vec{C} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \vec{C} = -\frac{\eta}{m} i\omega + \frac{e\vec{E}_0}{m} \qquad \vec{C}\left(\omega^2 - \frac{\eta i\omega}{m}\right) = -\frac{e\vec{E}_0}{m}; \qquad \boxed{\vec{r}_p = -\frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2 - i\eta\omega} e^{i\omega t}}$$

$$\vec{p} = e\vec{r}_p = -\frac{e^2 \vec{E}_0}{m\omega^2 - i\omega\eta} e^{i\omega t} = \beta \vec{E} \qquad \boxed{\beta = -\frac{e^2}{m\omega^2 - i\omega\eta}}$$

$$\vec{P} = N\vec{p} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2 - i\omega\eta} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0(m\omega^2 - i\omega\eta)}}$$

Испитати могућност простирања лонгитудиналних равних монохроматских таласа код којих је вектор јачине електричног поља паралелан правцу простирања таласа у средини из претходног задатка.

$$\vec E = \vec E_0 e^{i(\omega t - \vec k \vec r)} \; ; \; \vec H = \vec H_0 e^{i(\omega t - \vec k \vec r)} \; ; \; \vec B = \mu_0 \vec H$$

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \qquad -i\vec k \times \vec E_0 = -i\omega\mu_0 \vec H_0 \qquad \vec E_0 \parallel \vec k$$ лонгитудинални талас $\Rightarrow \vec H_0 = 0$

$$\mathrm{rot}\,\vec H = \frac{\partial \vec D}{\partial t} \qquad -i\vec k \times \vec H_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)\, i\omega \vec E_0 = 0 \Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 0$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0(m\omega^2 - i\omega\eta)} = 0 \qquad \omega^2 - i\omega\frac{\eta}{m} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \qquad \boxed{\omega_{1,2} = \frac{\frac{i\eta}{m} \pm \sqrt{-\frac{\eta^2}{m^2} + \frac{4Ne^2}{\varepsilon_0 m}}}{2}}$$

Применом Крамерс-Кронигових релација израчунати реални део диелектричне пропустљивости $\varepsilon'(\omega)$ ако је имагинарни део пропустљивости дат са:

а) $\varepsilon''(\omega) = \frac{\lambda\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$, где су $\omega_0, \gamma, \lambda$ константе.

б) $\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_0-1)\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$, где је τ константа.

Крамерс-Кронигове релације

$$\boxed{\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\, \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}\, dx} \; ; \quad \varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\, \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega}\, dx$$

важи: $\frac{1}{z \pm i\delta} = \mathrm{v.p.}\left(\frac{1}{z}\right) \mp i\pi\delta(z)$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega-i\delta}\, dx - i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\omega)\,\varepsilon''(x)\, dx\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega-i\delta}\, dx - i\varepsilon''(\omega)$$

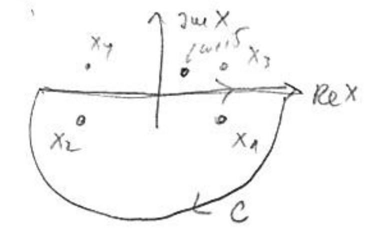
$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)\, dx}{x-\omega-i\delta}}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\gamma x}{(\omega_0^2-x^2)^2+\gamma^2x^2}\frac{1}{x-\omega-i\delta}\, dx = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{\lambda}{2i}\left[\frac{1}{\omega_0^2-x^2-i\gamma x} - \frac{1}{\omega_0^2-x^2+i\gamma x}\right]\frac{1}{x-\omega-i\delta}}^{f(x)}\, dx$$

$$\omega_0^2 - x^2 - ix\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = -\frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \qquad \omega_0^2 - x^2 + i\gamma x = 0 \Rightarrow \boxed{x_{3,4} = \frac{i\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

$$x^2 + ix\gamma - \omega_0^2 = 0$$

ово су полови у интегралу. $+\boxed{x_5 = \omega + i\delta}$



$$\oint f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx + \underbrace{\int_C f(x)\, dx}_{\to 0} = -2\pi i\left(\mathrm{Res}_{x_1} f(x) + \mathrm{Res}_{x_2} f(x)\right)$$

$$= -2\pi i\left[\frac{-1}{\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}\cancel{(x-x_1)}\frac{1}{x-\omega-i\delta}\Big|_{x=x_1} - \frac{1}{(x-x_1)\cancel{(x-x_2)}}\cancel{(x-x_2)}\frac{1}{x-\omega-i\delta}\Big|_{x=x_2}\right]$$

$$= +2\pi i \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x_1-\omega-i\delta} - \frac{1}{x_2-\omega-i\delta}\right) = \frac{+2\pi i}{2\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\left(\frac{1}{-\frac{i\gamma}{2}+\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\omega-i\delta} - \frac{1}{-\frac{i\gamma}{2}-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}-\omega-i\delta}\right)$$

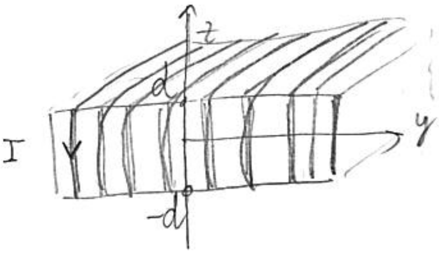
$$= \frac{-i\pi}{\cancel{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}} \frac{2\cancel{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}}{\left(\omega+i\delta+\frac{i\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}}\Bigg|_{\delta=0} = \frac{-2\pi i}{\omega^2 - \cancel{\frac{\gamma^2}{4}} + i\omega\gamma - \omega_0^2 + \cancel{\frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{+2\pi i}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{2i}\frac{+2\pi i}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} = 1 + \frac{\lambda}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} = 1 + \frac{\lambda(\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\lambda(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}$$

б) $\varepsilon' = 1 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{1+\omega^2\tau^2}$ решење!

Широка равна метална плоча магнетне пропустљивости μ и дебљине $2d$ обмотана је жицом кроз коју тече струја $I = I_0 e^{-i\omega t}$. Број намотаја жице по јединици дужине је n. Занемарујући ефекте крајева наћи реалну амплитуду магнетног поља у квазистационарној апроксимацији.



$$I = I_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec E \, ; \quad \vec B = \mu_0 \mu_r \vec H = \mu \vec H$$ за хомогене и изотропне средине

$(\mu = \text{const.}$ не тензор!$)$

Максвелове јне: $\operatorname{div} \vec B = 0$; $\operatorname{rot} \vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$; $\operatorname{rot} \vec H = \vec j^{sl} + \frac{\partial \vec D}{\partial t} \ll \vec j^{sl}$

занемарујемо — то је квазистац. апроксимација!

$\vec j^{sl} = \sigma \vec E$ - Омов закон

$$\operatorname{rot} \vec H = \vec j^{sl} = \sigma \vec E \quad / \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec H = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec H}_{0} - \Delta \vec H = \sigma \operatorname{rot} \vec E = -\sigma \frac{\partial \vec B}{\partial t} \, ; \quad \operatorname{div} \vec H = \operatorname{div} \frac{\vec B}{\mu} = 0$$

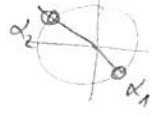
$$\Delta \vec H = \sigma \frac{\partial \vec B}{\partial t} \, ; \quad \vec H = \frac{\vec B}{\mu} \qquad \boxed{\Delta \vec B = \mu \sigma \frac{\partial \vec B}{\partial t}}$$ јна дифузије

Претпостављамо решење $$\vec B = \begin{cases} B(z)\, e^{-i\omega t}\, \vec e_y, & |z|<d \\ \mu_0 n I_0\, e^{-i\omega t}\, \vec e_y, & |z|>d \end{cases}$$ (у области ограниченој жицом)

за $|z|<d$ $$\Delta\left(B(z) e^{-i\omega t} \vec e_y\right) = \sigma \frac{\partial B(z) e^{-i\omega t}}{\partial t} \vec e_y$$

$$\frac{d^2 B}{dz^2} \cancel{e^{-i\omega t}} \cancel{\vec e_y} = -i\omega\sigma B(z) \cancel{\vec e_y} \cancel{e^{-i\omega t}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 B}{dz^2} + i\omega\sigma B(z) = 0}$$

$$B(z) \sim e^{\alpha z} \qquad \alpha^2 + i\omega\sigma = 0 \qquad \alpha^2 = \omega\sigma e^{-\frac{i\pi}{2}} \, ; \; \alpha_1 = \sqrt{\omega\sigma}\, e^{-\frac{i\pi}{4}} \, ; \; \alpha_2 = \sqrt{\omega\sigma}\, e^{-\frac{i\pi}{4} + i\pi}$$



$$\alpha_1 = \sqrt{\omega\sigma}\, \frac{1-i}{\sqrt 2} \, ; \quad \alpha_2 = \sqrt{\omega\sigma}\, \frac{i-1}{\sqrt 2} \qquad \boxed{K = \sqrt{\frac{\omega\sigma}{2}}}$$ ознака

$$\vec B = \left(C_1 e^{k(1-i)z} + C_2 e^{k(i-1)z}\right) e^{-i\omega t} \vec e_y \quad ; \; C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

$B(z) = B(-z)$ из симетрије $\Rightarrow \boxed{C_1 = C_2} \equiv C$

$$\vec B = C\left(e^{k(1-i)z} + e^{-k(1-i)z}\right) e^{-i\omega t} \vec e_y$$

гр. услов $\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1)\Big|_{z=d} = \vec\tau = 0 \Rightarrow B(d) = \mu_0 n I_0$

$$\Rightarrow C\left(e^{k(1-i)d} + e^{-k(1-i)d}\right) = \mu_0 n I_0$$

$$C = \frac{\mu_0 n I_0}{e^{k(1-i)d} + e^{-k(1-i)d}} \, ; \quad \vec B_< = \mu_0 n I_0 \frac{e^{k(1-i)z} + e^{-k(1-i)z}}{e^{k(1-i)d} + e^{-k(1-i)d}}\, e^{-i\omega t} \vec e_y$$

Тражи се реална амплитуда, тј. део без хармонијског члана.

$$\vec{B}_< = \mu_0 I_0 n \cdot w \cdot e^{-i\omega t} \quad ; \quad w = |w| e^{i\varphi}$$

$$w = \frac{e^{k(1-i)z} + e^{-k(1-i)z}}{e^{k(1-i)d} + e^{-k(1-i)d}} \quad ; \quad |w| = \frac{|e^{k(1-i)z} + e^{-k(1-i)z}|}{|e^{k(1-i)d} + e^{-k(1-i)d}|}$$

$$|e^{k(1-i)z} + e^{-k(1-i)z}| = |e^{kz}(\cos kz - i\sin kz) + e^{-kz}(\cos kz + i\sin kz)|$$

$$= |\cos kz \cdot 2\mathrm{ch}\, kz - i\sin kz \cdot 2\mathrm{sh}\, kz| = 2\sqrt{\cos^2 kz\, \mathrm{ch}^2 kz + \sin^2 kz\, \mathrm{sh}^2 kz}$$

$$|w| = \frac{\sqrt{\cos^2 kz\, \mathrm{ch}^2 kz + \sin^2 kz\, \mathrm{sh}^2 kz}}{\sqrt{\cos^2 kd\, \mathrm{ch}^2 kd + \sin^2 kd\, \mathrm{sh}^2 kd}}$$

$$\vec{B}_< = \underbrace{\boxed{\mu_0 I_0 n \sqrt{\frac{\cos^2 kz\, \mathrm{ch}^2 kz + \sin^2 kz\, \mathrm{sh}^2 kz}{\cos^2 kd\, \mathrm{ch}^2 kd + \sin^2 kd\, \mathrm{sh}^2 kd}}}}_{\vec{B}_0 \text{ амплитуда}} e^{-i\omega t + i\varphi}$$

Анизотропне средине

Раван монохроматски талас простире се у бесконачној феритној средини намагнетисаној до засићења, дуж x осе. Магнетна пропустљивост ферита је: $\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}$. Наћи фазне брзине тог таласа и испитати поларизацију $\varepsilon_r = 1$.

Раван монохроматски талас: $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$; $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$, $\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$;

$\underline{\varepsilon_r = 1}$: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$\vec{B} = \mu_0 \hat{\mu}_r \vec{H}$

$\operatorname{div}\vec{D} = 0$; $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\operatorname{rot}\vec{M} = \varepsilon_{ijk}\partial_j M_k \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} M_{0k} \partial_j e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_i = -i\varepsilon_{ijk} M_{0k} k_j e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_i = -i\vec{k}\times\vec{M}$$

$$\operatorname{div}\vec{M} = \partial_i M_i = M_{0i}\partial_i e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = -ik_i M_{0i} = -i\vec{k}\cdot\vec{M}$$

$$-i\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 \; ; \; -i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0, \; -i\vec{k}\times\vec{E} = -i\omega\vec{B}, \; \boxed{-i\vec{k}\times\vec{H} = i\omega\vec{D}}$$

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{H}) = -\omega(\vec{k}\times\varepsilon_0\vec{E}) = -\omega\varepsilon_0\omega\vec{B} = -\varepsilon_0\omega^2\mu_0\hat{\mu}_r\vec{H} = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\mu}_r\vec{H}$$

$$\boxed{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{H}) - \vec{H}k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\mu}_r\vec{H}}$$

$\vec{k} = k\vec{e}_x$ по услову задатка! $\vec{k}\cdot\vec{H} = k\cdot H_x$

$$\hat{\mu}_r\vec{H} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

x: $k^2 H_x - k^2 H_x = -\frac{\omega^2}{c^2}(\mu_\perp H_x - i\mu_a H_y)$

y: $-H_y\cdot k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}(i\mu_a H_x + \mu_\perp H_y)$

z: $-H_z\cdot k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\parallel H_z$

Хомоген систем $\Rightarrow \det = 0$ за нетривијално решење

$$\begin{aligned} H_x\cdot\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp - H_y\frac{\omega^2}{c^2}i\mu_a &= 0 \\ H_x\frac{\omega^2}{c^2}i\mu_a + H_y\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp - k^2\right) &= 0 \\ H_z\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\parallel - k^2\right) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp & -\frac{\omega^2}{c^2}i\mu_a & 0 \\ \frac{\omega^2}{c^2}i\mu_a & \frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\mu_\parallel - k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\perp - k^2\right) - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2\mu_a^2\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\parallel - k^2\right) = 0 \Big/ \cdot\frac{1}{k^6} \quad \boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$$

Тражимо $\omega(k)$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\omega^2}{c^2}(\mu_\perp^2 - \mu_a^2) - k^2\mu_\perp\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_\parallel - k^2\right) = 0$$

$\Rightarrow \cancel{\omega = 0}$ или $\omega_1 = \sqrt{\frac{k^2\mu_\perp c^2}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}}$ или $\omega_2 = \sqrt{\frac{k^2 c^2}{\mu_\parallel}}$

$$1^\circ \; \boxed{v_{f1} = \frac{\omega_1}{k} = c\sqrt{\frac{\mu_\perp}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}}} \quad 2^\circ \; \boxed{v_{f2} = \frac{\omega_2}{k} = \frac{c}{\sqrt{\mu_\parallel}}}$$

Поларизација:

1° Талас има фреквенцију ω_1 заменимо у систем $\omega_1 = kc\sqrt{\frac{\mu_\perp}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}}$

1. једн. $H_x\cdot k^2\frac{\mu_\perp^2}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2} - H_y i\mu_a k^2\frac{\mu_\perp}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2} = 0$; $H_x = H_y\frac{i\mu_a}{\mu_\perp} \Rightarrow \boxed{H_{0x} = H_{0y}\frac{i\mu_a}{\mu_\perp}}$

друга јна даје то исто због нулте детерминанте;

3. једн. $H_z\underbrace{\left(k^2\frac{\mu_\perp\mu_\parallel}{\mu_\perp^2 - \mu_a^2} - k^2\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{H_z = 0} \Rightarrow \vec{H} = \left(\frac{i\mu_a}{\mu_\perp}\vec{e}_x + \vec{e}_y\right)H_{0y}e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$, $\underline{H_{0y}\in\mathbb{R}}$

$$\operatorname{Re}\vec{H} = -\frac{\mu_a}{\mu_\perp}H_{0y}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_x + H_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_y$$

одн: $(\operatorname{Re}\vec{H})_x = -\frac{\mu_a}{\mu_\perp}H_{0y}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$; $(\operatorname{Re}\vec{H})_y = H_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \Rightarrow \left(\frac{(\operatorname{Re}\vec{H})_x}{-\frac{\mu_a}{\mu_\perp}H_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{(\operatorname{Re}\vec{H})_y}{H_{0y}}\right)^2 = 1$

2° Талас има фреквенцију $\omega_2 = \frac{kc}{\sqrt{\mu_{\parallel}}}$

$$H_x \frac{k^2}{\mu_{\parallel}}\mu_\perp - H_y \frac{k^2}{\mu_{\parallel}} i\mu_a = 0$$
$$H_x \frac{k^2}{\mu_{\parallel}} i\mu_a + H_y\left(\frac{k^2}{\mu_{\parallel}}\mu_\perp - k^2\right) = 0$$

несагласан систем $\boxed{H_x = H_y \frac{i\mu_a}{\mu_\perp}}$ сем за $\frac{i\mu_a}{\mu_\perp} = \frac{\mu_\parallel - \mu_\perp}{i\mu_a}$

$$H_x = H_y \frac{1-\frac{\mu_\perp}{\mu_\parallel}}{\frac{i\mu_a}{\mu_\parallel}} = H_y \frac{\mu_\parallel - \mu_\perp}{i\mu_a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_\parallel \mu_\perp - \mu_\perp^2 = -\mu_a^2}$$

$$H_z \cdot 0 = 0 \Rightarrow H_{z0} \in \mathbb{R}$$

за $\mu_\parallel \mu_\perp \neq \mu_\perp^2 - \mu_a^2$ $\quad \vec{H} = H_{0z} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_z$

за $\mu_\parallel \mu_\perp = \mu_\perp^2 - \mu_a^2$ $\quad H_x = \frac{i\mu_a}{\mu_\perp} H_y$, $H_{0y} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mu_\parallel = \frac{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}{\mu_\parallel} \Rightarrow \boxed{v_{f1} = v_{f2}}$ – тј ако је x-оса оптичка оса, поклапају се фазне брзине

$$\vec{H} = H_{0y} \frac{i\mu_a}{\mu_\perp} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_x + H_{0y} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \vec{e}_y + H_{0z} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r} + \varphi} \vec{e}_z$$

$$\mathrm{Re}\vec{H} = -H_{0y}\frac{\mu_a}{\mu_\perp}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_x + H_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_y + H_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \underbrace{\varphi}_{})\vec{e}_z$$

да не буде у фази са H_y у општем случају.

Смер простирања нередовног таласа у једноосном кристалу заклапа угао θ са оптичком осом. Одредити угао између таласног вектора $\vec{k}$ и електричног поља, и угао између смера зрака и оптичке осе кристала.

Кристал је једноосни $\quad \hat{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & & \\ & \varepsilon_\perp & \\ & & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0$; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$; $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\qquad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$

$\mathrm{div} \to -i\vec{k}\cdot$, $\mathrm{rot} \to -i\vec{k}\times$

$\Rightarrow -i\vec{k}\cdot\vec{D} = 0 \quad -i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \quad \boxed{-i\vec{k}\times\vec{E} = -i\omega\vec{B}} \quad -i\vec{k}\times\vec{H} = i\omega\vec{D}$

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = \mu_0\omega\,\vec{k}\times\vec{H} = -\mu_0\omega^2\vec{D} = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0\hat{\varepsilon}_r\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}_r\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{k}\cdot(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E}\cdot k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}_r\vec{E}}$$

; Оса кристала је z – $\varepsilon_\parallel$ је дуж z-осе ;

$\vec{k} = k\cos\theta\,\vec{e}_z + k\sin\theta\,\vec{e}_x$ (тако бирамо коорд. систем.)

$\vec{k}\cdot\vec{E} = k\cos\theta\,E_z + k\sin\theta\,E_x$

Пројектујемо на осе:

x: $k\sin\theta\,(k\cos\theta\,E_z + k\sin\theta\,E_x) - k^2E_x = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_x$

y: $-k^2E_y = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp E_y$

z: $k\cos\theta\,(k\cos\theta\,E_z + k\sin\theta\,E_x) - E_z k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel E_z$

$$E_x\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\cos^2\theta\right) + E_z k^2\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$E_y\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\right) = 0$$
$$E_x k^2\sin\theta\cos\theta + E_z\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel - k^2\sin^2\theta\right) = 0$$

Детерминанта система мора да буде једнака нули:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\cos^2\theta & 0 & k^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2 & 0 \\ k^2\sin\theta\cos\theta & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel - k^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\right)\left(\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\cos^2\theta\right)\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel - k^2\sin^2\theta\right) - k^4\sin^2\theta\cos^2\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - k^2\right)\left(\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp k^2\sin^2\theta - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel k^2\cos^2\theta + \cancel{k^4\sin^2\theta\cos^2\theta} - \cancel{k^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\right) = 0$$

$\Rightarrow \cancel{\omega=0}$ или $\boxed{\omega_1 = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}}$ или $\boxed{\omega_2 = kc\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}}}$

$$v_{f1} = \frac{\omega_1}{k} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}} \qquad v_{f2} = \frac{\omega_2}{k} = \boxed{c\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}}}$$

Нередовни талас је онај код кога фазна брзина зависи од правца простирања, тј. v_{f2} одговара нередовном таласу.

Тражи се $\measuredangle(\vec E, \vec k)$

заменимо ω_2 у систем и решимо по $\vec E$:

$$E_x\left(k^2\frac{\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta}{\cancel{\varepsilon_\perp}\varepsilon_\parallel}\cancel{\varepsilon_\perp}-\cancel{k^2}\cos^2\theta\right)+E_z \cancel{k^2}\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow E_z = -E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \boxed{-E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta}$$

$$E_y\left(k^2\frac{\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}\varepsilon_\perp-k^2\right)=0 \rightsquigarrow E_y=0$$ (уопштем случају $\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta\neq\varepsilon_\parallel$)
јер $\theta\neq0$ уопште!
за $\theta=0$ редовни талас.

$$E_x k^2\sin\theta\cos\theta + E_z\left(\cancel{k^2}\frac{\varepsilon_\perp\sin^2\theta+\varepsilon_\parallel\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp\cancel{\varepsilon_\parallel}}\cancel{\varepsilon_\parallel}-\cancel{k^2}\sin^2\theta\right)=0$$

$$E_x\sin\theta = -E_z\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\cos\theta \Rightarrow E_z = -E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boxed{-E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta}$$ (1. и 3. јна дају исто јер је дет. $=0$)

$$\Rightarrow \vec E = E_x\vec e_x - E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta\,\vec e_z \quad ; \quad \vec k = k\sin\theta\,\vec e_x + k\cos\theta\,\vec e_z$$

$$\vec E\cdot\vec k = E_x\cdot k\sin\theta - E_x\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta\, k\cos\theta = E_x\sin\theta\cdot k\left(1-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\right) = E_x\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta\right)^2}\cdot k\cdot\cos\measuredangle(\vec E,\vec k)$$

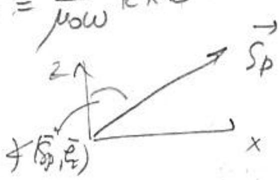
$$\cos\measuredangle(\vec E,\vec k) = \frac{\cancel{E_x}\sin\theta\,\cancel{k}\left(1-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\right)}{\cancel{E_x}\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta\right)^2}\,\cancel{k}} = \frac{\sin\theta(\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp)}{\sqrt{\varepsilon_\parallel^2+\varepsilon_\perp^2\operatorname{tg}^2\theta}} = \boxed{\frac{\sin\theta\cos\theta(\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp)}{\sqrt{\varepsilon_\parallel^2\cos^2\theta+\varepsilon_\perp^2\sin^2\theta}}}$$

Правац зрака је правац вектора $\vec S_p = \vec E\times\vec H$, оптичка оса кристала је z-оса

$$\cos\measuredangle(\vec S_p,\vec e_z) = \frac{\vec S_p\cdot\vec e_z}{|\vec S_p|}$$

$\vec S_p = \vec E\times\vec H$; $\vec E$ познато $\quad \vec k\times\vec E = \omega\vec B = \omega\mu_0\vec H \Rightarrow \vec H = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec k\times\vec E$

$$\vec S_p = \vec E\times\frac{1}{\mu_0\omega}(\vec k\times\vec E) = \frac{1}{\mu_0\omega}\left(\vec k\cdot E^2-\vec E\cdot(\vec k\cdot\vec E)\right) = S_{px}\vec e_x + S_{pz}\vec e_z$$



$$\operatorname{tg}\measuredangle(\vec S_p,\vec e_z) = \frac{S_{px}}{S_{pz}} = \frac{k_x\cdot E^2-E_x\cdot(\vec k\cdot\vec E)}{k_z\cdot E^2-E_z(\vec k\cdot\vec E)}$$

$$E^2 = E_x^2\left(1+\frac{\varepsilon_\perp^2}{\varepsilon_\parallel^2}\operatorname{tg}^2\theta\right) \quad , \quad \vec k\cdot\vec E = kE_x\sin\theta\,\frac{\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}$$

$$\operatorname{tg}\measuredangle(\vec S_p,\vec e_z) = \frac{\cancel{k}\sin\theta\,\cancel{E_x^2}\left(1+\frac{\varepsilon_\perp^2}{\varepsilon_\parallel^2}\operatorname{tg}^2\theta\right)-\cancel{E_x^2}\cancel{k}\sin\theta\,\frac{\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}}{\cancel{k}\cos\theta\,\cancel{E_x^2}\left(1+\frac{\varepsilon_\perp^2}{\varepsilon_\parallel^2}\operatorname{tg}^2\theta\right)+\cancel{E_x^2}\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta\,\cancel{k}\sin\theta\,\frac{\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}} = \frac{\sin\theta\left(\cancel{1}+\frac{\varepsilon_\perp^2}{\varepsilon_\parallel^2}\operatorname{tg}^2\theta-\frac{\cancel{\varepsilon_\parallel}-\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\right)}{\cos\theta\left(1+\cancel{\frac{\varepsilon_\perp^2}{\varepsilon_\parallel^2}\operatorname{tg}^2\theta}+\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\frac{\varepsilon_\parallel-\cancel{\varepsilon_\perp}}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}^2\theta\right)}$$

$$= \operatorname{tg}\theta\,\frac{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\left(1+\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}^2\theta\right)}{1+\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}^2\theta} = \boxed{\operatorname{tg}\theta\,\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}}$$