Диракова δ функција

δ функцијом се назива таква функција $\delta(x-x_0)$, која је свуда једнака нули, осим у тачки $x=x_0$, у којој тежи бесконачности, али тако да је интеграл те функције на произвољном интервалу, који садржи тачку x_0, једнак јединици:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases} 0, & x\neq x_0, \\ \infty, & x=x_0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)dx = 1 \text{ ако је } a<x_0<b. \tag{2}$$

Најважнија својства δ функције изражавају се једнакостима:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=\begin{cases} f(x_0), & \text{ако је } a<x_0<b, \\ 0, & \text{ако је } x_0<a \text{ или } b<x_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0), \tag{4}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)dx=\delta(x_1-x_2) \text{ ако је } a<x_1<b \text{ или } a<x_2<b, \tag{5}$$

$$\delta(-x)=\delta(x), \tag{6}$$

$$x\delta(x)=0, \tag{7}$$

$$|x|\delta(x^2-\epsilon)=\delta(x) \text{ када } \epsilon\to+0, \tag{8}$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{9}$$

$$\delta(f(x))=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|f'(x_n)|}\delta(x-x_n), \tag{10}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a)). \tag{11}$$

У формулама (3) и (4) функција $f(x)$ је непрекидна. Наведене једнакости треба схватити у смислу су интеграли леве и десне стране исте једнакости једнаки. У формули (10) x_n $(n=1,\ldots,N)$ су прости корени једначине $f(x)=0$, који при том нису стационарне тачке диференцијабилне функције $f(x)$. Пошто је δ функција парна функција, из релација (2) и (3), при $a=-b<0$ и $x_0=0$, следе једнакости:

$$\int_0^b \delta(x)dx=\frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\int_0^b f(x)\delta(x)dx=\frac{1}{2}f(0). \tag{13}$$

Интеграли који садрже извод δ функције израчунавају се парцијалном интеграцијом:

$$\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx=-\int_a^b f'(x)\delta(x-x_0)dx=-\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}, \tag{14}$$

где је $a<x_0<b$. Важан случај ове формуле записује се понекад као:

$$x\frac{d}{dx}\delta(x)=-\delta(x). \tag{15}$$

δ функција се може добити и диференцирањем функције:

$$\eta(x-x_0)=\begin{cases}1, & x>x_0,\\ 0 & x<x_0,\end{cases} \tag{16}$$

као:

$$\delta(x-x_0)=\frac{d}{dx}\eta(x-x_0). \tag{17}$$

Постоји више аналитичких репрезентација δ функције. Неке од најчешће коришћених су:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk=\frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin Lx}{L}, && (18)\\
\delta(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin^2 Lx}{Lx^2}, && (19)\\
\delta(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma}{\gamma^2+x^2}, && (20)\\
\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\mu\to\infty}\mu e^{-\mu^2x^2}. && (21)
\end{aligned}$$

Ако δ функција у облику (18)-(21) стоји под знаком интеграла, онда се прво врши интеграција, па затим гранични процес.

Тродимензионална δ функција одређена је релацијом:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0). \tag{22}$$

Њено основно својство је изражено једначином:

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=f(\vec{r}_0), \tag{23}$$

при чему се тачка са радијус вектором $\vec{r}_0$ налази у области V, а $f(\vec{r})$ је непрекидна функција дефинисана у тој области. Ако се поменута тачка налази ван области V, онда је интеграл у (23) једнак нули. Некада је корисно тродимензионалну δ функцију представити и као троструки интеграл у бесконачном $\vec{k}$ простору:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}d\vec{k}. \tag{24}$$

Тродимензионална δ функција задовољава релацију:

$$\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}=\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{25}$$

У произвољним ортогоналним криволинијским координатама (ξ,η,ζ) тродимензионална δ функција се записује као:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)\delta(\zeta-\zeta_0), \tag{26}$$

где је $\vec{r}=(\xi,\eta,\zeta)$, $\vec{r}_0=(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$, а $|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|$ јакобијан одговарајуће трансформације.