Лежандрови полиноми

Лежандрови полиноми су решења дифренцијалне једначине:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}]+n(n+1)P_n=0, \tag{1}$$

где је $-1 \leq x \leq 1$ и $n = 0, 1, 2, ...$

Неколико првих полинома:

$$P_0(x)=1,\;\; P_1(x)=x,\;\; P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\;\; P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x). \tag{2}$$

Општи облик полинома n-тог реда је:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{3}$$

Особине:

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \tag{4}$$

$$P_n(1)=1, \tag{5}$$

$$P_{2k+1}(0)=0,\;\; P_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}, \tag{6}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{7}$$

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x)dx=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!},\;\; \int_0^1 P_{2k}(x)dx=\delta_{k,0}. \tag{8}$$

Ако су m и n истовремено парни или непарни онда важи:

$$\int_0^1 P_n(x)P_m(x)dx=\frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}. \tag{9}$$

Може се показати да важе следеће рекурентне релације:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \tag{10}$$

$$(x^2-1)P_n'(x)=nxP_n(x)-nP_{n-1}(x), \tag{11}$$

$$P_{n+1}'(x)-xP_n'(x)=(n+1)P_n(x). \tag{12}$$

На интервалу $[-1,1]$ Лежандрови полиноми чине базис, односно они су потпуни скуп ортогоналних функција, тако да се произвољна непрекидна функција на том интервалу може развити у ред по Лежандровим полиномима:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{13}$$

где је:

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx. \tag{14}$$

Често се као аргумент полинома узима $x = \cos\theta$. У том случају једначина (1) добија облик:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0. \tag{15}$$

Ако се једначина (15) упореди са изразом за Лапласов оператор у сферним координатама добија се:

$$\Delta P_n(\cos\theta) = -\frac{n(n+1)}{r^2}P_n(\cos\theta), \tag{16}$$

$$\Delta(r^n P_n(\cos\theta)) = 0, \;\; \Delta\left(\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right) = 0. \tag{17}$$

Одавде се види да је решење Лапласове једначине $\Delta\varphi = 0$ сума Лежандрових полинома са произвољним коефицијентима:

$$\varphi = \sum_0^\infty (a_n r^n + b_n r^{-n-1})P_n(\cos\theta). \tag{18}$$

Сферни хармоници

Сферни хармоници се дефинишу на следећи начин:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{19}$$

где је $-l \leq m \leq l$, $l = 0, 1, 2, ...$, док су $P_l^m(\cos\theta)$ асоцирани Лежандрови полиноми дефинисани са:

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}. \tag{20}$$

Првих неколико сферних хармоника:

$$\begin{aligned}
Y_0^0(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad (21)\\
Y_1^0(\theta,\phi) &= i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \;\; Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi},\\
Y_2^0(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1-3\cos^2\theta), \;\; Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{\pm i\phi},\\
Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}.
\end{aligned}$$

Сфрени хармоници су ограничена решења диференцијалне једначине:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY_l^m}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)Y_l^m = 0. \tag{22}$$

При томе је дејство Лапласовог оператора на сферне хармонике:

$$\triangle Y_l^m(\theta,\phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta,\phi), \tag{23}$$

за $r \neq 0$.

Од многобројних особина сферних хармоника најчешће коришћена особина у електродинамици је ортогоналност:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_l^{*m}(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{24}$$

односно сферни хармоници су ортогоналне функције на сфери јединичног радијуса.

$$\int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta,\phi) d\phi = 2\pi\delta_{0m} Y_l^0(\theta,\phi), \tag{25}$$

$$\int_0^{2\pi} Y_l^{*m}(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) d\phi = 2\pi\delta_{mm'} Y_l^{*0}(\theta,\phi) Y_{l'}^0(\theta,\phi). \tag{26}$$