Беселове функције

Диференцијална једначина

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0, \tag{1}$$

назива са Беселовом једначином. Њена партикуларна решења су Беселове функције реда $\pm\nu$:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(j+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{2}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(j-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \tag{3}$$

То су Беселове функције прве врсте реда $\pm\nu$. Ако је ν цео број тада је $J_{-\nu}(x)=(-1)^\nu J_\nu(x)$, тј. оне су линеарно зависне. Ако ν није цео број J_ν и $J_{-\nu}$ су линеарно независне функције. Дакле, када $\nu\in Z$ треба наћи друго линеарно независно решење једначине (1).

Нојманова функција $N_\nu(x)$ (или Беселова функција друге врсте) такође је решење једначине (1)

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{4}$$

Ако ν није цео број онда су J_ν и N_ν линеарно независна решења једначине (1). У лимесу $\nu\to m\in Z$ Беселове функције прве и друге врсте су и даље линеарно независне.

Беселове функције треће врсте или Ханкелове функције дефинисане су као:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x)+iN_\nu(x), \tag{5}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x)-iN_\nu(x). \tag{6}$$

Оне су такође линеарно независна решења Беселове диференцијалне једначине (1).

Беселове функције задовољавају следеће рекурентне везе:

$$\Omega_{\nu-1}+\Omega_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu, \tag{7}$$

$$\Omega_{\nu-1}-\Omega_{\nu+1} = 2\frac{d\Omega_\nu}{dx}, \tag{8}$$

$$\frac{d\Omega_0(x)}{dx} = -\Omega_1(x), \tag{9}$$

$$\int_0^x z\Omega_0(z)dz = x\Omega_1(x). \tag{10}$$

где је $\Omega_\nu=\{J_\nu,N_\nu,H_\nu\}$. Ове функције се једним именом називају цилиндричним функцијама.

Када је аргумент функције $x\ll 1$ имамо:

$$J_\nu(x)\to\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \tag{11}$$

$$N_\nu(x)\to\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+0,5772+\ldots\right), & \nu=0\\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu\neq 0.\end{cases} \tag{12}$$

За $x \gg 1$ имамо:

$$J_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{13}$$

$$N_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \tag{14}$$

Већ из (13-14) је јасно да Беселове функције имају бесконачно пуно нула. Нуле Беселове функције ν-тог реда обележићемо са $x_{\nu n}$. Беселове функције $J_\nu(\frac{x_{\nu n}\rho}{a})$, за фиксно ν, чине ортогоналан скуп функција на интервалу $0 \leq \rho \leq a$,

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}) J_\nu(\frac{x_{\nu n'}\rho}{a}) = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'} \ . \tag{15}$$

Произвољну функцију $f(\rho)$ $(0 \leq \rho \leq a)$ можемо развити у Фурије-Беселов ред:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \ , \tag{16}$$

где је

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a d\rho \rho f(\rho) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \ . \tag{17}$$

Функцију $f(\rho)$ непрекиднуу на интервалу $0 < \rho < \infty$ можемо разложити у Фурије-Беселов интеграл

$$f(\rho) = \int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda\rho) \lambda d\lambda, \tag{18}$$

где је ν произвољан цео број. Коефицијенте c_λ одређујемо користећи релације ортогоналности

$$\int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho) J_\nu(\lambda'\rho) \rho d\rho = \frac{1}{\lambda}\delta(\lambda' - \lambda). \tag{19}$$

Диференцијална једначина

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0, \tag{20}$$

назива се модификованом Беселовом једначином. Њена решења су модификоване Беселове функције $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ и $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$. Оне су линеарно независна решења једначине (20).