Пертурбациони и варијациони рачун

1. Својствена стања хамилтонијана H_0 су $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$, са одговарајућим енергијама E_1 и E_2. У тренутку $t=0$, на систем који се налазио у стању $|\phi_1\rangle$ почне да делује пертурбација $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$. Одредити нова својствена стања и својствене енергије.
Уколико је $W_{11} = W_{22} = 0$ одредити вероватноћу да систем пређе у стање $|\phi_2\rangle$ у тренутку t.

2. Наћи у првом и другом реду теорије пертурбације поправку енергије за 1Д ЛХО у првом побуђеном стању ако је пертурбација:
а. $\hat{H}' = \alpha \hat{x}^3$.
б. $\hat{H}' = \beta \hat{x}^4$.

3. Наћи у првом реду теорије пертурбације померање енергетских нивоа честице у БДП јами
$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \in (0,a), \\ \infty, & \text{за } x \in (-\infty, 0) \cup (a, \infty), \end{cases}$$
ако је пертурбација
$$V'(x) = \begin{cases} 2V_0 \frac{x}{a}, & \text{за } x \in (0, \frac{a}{2}), \\ 2V_0(1 - \frac{x}{a}), & \text{за } x \in (\frac{a}{2}, a). \end{cases}$$

4. Одредити својствене енергије и својствена стања непертурбованог хамилтонијана и поправке енергије у првом реду теорије пертурбације ако је укупан хамилтонијан
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 100 & a & b \\ 100 & a & b & c \\ a & b & c & 200 \\ b & c & 200 & d \end{pmatrix}.$$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ су мали параметри. Као конкретан пример узети: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

5. Изотропни 2Д ЛХО је пертурбован са $\hat{H}' = \alpha \hat{x} \otimes \hat{y}$. Израчунати у првом реду теорије пертурбације раздвајање другог побуђеног нивоа.

6. Одредити енергију основног стања ЛХО варијационом методом користећи пробне функције облика $\psi_b(x) = Ae^{-bx^2}$.

7. Узимајући за пробну функцију $\psi_b(x) = Ae^{-bx^2}$, наћи енергију основног стања за једнодимензиони анхармонијски осцилатор са потенцијалном енергијом $U = \frac{m^2\omega^3 x^4}{6\hbar}$.

8. Проценити енергију 2Д изотропног ЛХО у основном стању варијационом методом користећи пробне функције облика $\psi_\alpha(\rho) = A\rho^2 e^{-\alpha\rho}$.

9. Одредити цепање енергетских нивоа крутог ротатора у равни за пертурбацију $\hat{H}' = \alpha \hat{x}\hat{y}$.

10. У првом реду рачуна пертурбације израчунати поправку енергије основног стања за честицу у бесконачно дубокој сферно симетричној потенцијалној јами. Пертурбација је $H' = \alpha r$.

11. Ротатор у простору, момента инерције I и диполног момента $\vec{d}$ налази се у константном, хомогеном електричном пољу $\vec{E}$. Одредити поправке енергетских нивоа до другог реда рачуна пертурбације сматрајући $-\vec{E}\vec{d}$ пертурбацијом.

12. Одредити енергију основног стања атома хелијума у првом реду рачуна пертурбације сматрајући $\frac{e^2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}$ пертубрацијом.

13. Одредити вероватноћу прелаза система из иницијалног стања $|\varphi_i\rangle$ у финално стање $|\varphi_f\rangle$ у првој и другој апрокцимацији ако на систем делује временски зависна пертурбација $\lambda W(t)$. Сматрати да су стања $|\varphi_i\rangle$ и $|\varphi_j\rangle$ својствена стања основног хамилтонијана.

14. Ако на систем делује временски зависна пертурбација

    а) $\lambda W \sin \omega t$;

    б) $\lambda W \cos \omega t$;

    одредити вероватноћу прелаза из иницијалног у финално стање. Какав је резултат ако на систем делује константна пертурбација?

15. За пертурбацију из претходног задатка дискутовати феномен резонанце. Када је резонантна апроксимација оправдана?

16. На изотропни 3Д ЛХО масе m и наелектрисања q, делује временски зависна пертурбација $q\vec{E}(t)\vec{r}$, где је $\vec{E}(t) = Ae^{-\frac{t^2}{\tau^2}}\vec{e}_z$, A и τ су реалне константе. Израчунати вероватноћу прелаза из основног стања у $t = -\infty$ у неко побуђено стање у $t = \infty$.

17. На једнодимензиону честицу која се налази у бесконачно дубокој потенцијалној јами између $x = -a$ и $x = a$ делује временски зависна пертурбација $V(x,t) = -\frac{Cx}{1+\frac{t^2}{\tau^2}}$. C и τ су константе одговарајућих димензија. Одредити вероватноћу прелаза из основног стања у тренутку $t = -\infty$ у n-то својствено стање у $t = \infty$.

18. На атом водоника који је у основном стању, у тренутку $t = 0$ почиње да делује временски зависно електрично поље $\vec{E} = \vec{E}_o e^{-t/\tau}$, где је τ позната константа. Сматрајући поље пертурбацијом, одредити вероватноћу да се после времена t атом нађе у првом побуђеном стању. Колика је та вероватноћа када је $t >> \tau$?