Друга квантизација

1. Два идентична бозона спина 0 интерагују потенцијалом $V = \frac{k(\vec{r_1}-\vec{r_2})^2}{2}$. Израчунати својствене енергије и стања овог система.

2. Оператори $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$, $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ су фермионски оператори анихилације и креације. Одредити матрице оператора $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$ и $\hat{b}^\dagger\hat{b}$. Показати да су својствене вредности оператора броја честица $\hat{b}^\dagger\hat{b}$ 0 и 1.

3. Одредити и упоредити својствене векторе оператора $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{b}$ и $\hat{b}^\dagger$; $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ (бозонски) и $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$ (фермионски).

4. Нека су $\hat{a_i}$ и $\hat{a_i}^\dagger$ $(i = 1, 2)$ оператори анихилације и креације фотона узајамно ортогоналних линеарних поларизација. Одредити операторе анихилације и креације циркуларно поларисаних фотона.

5. Нека $\epsilon \in \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$. Израчунати $\mathtt{Tr}\ (\hat{a}^\dagger\hat{a}e^{-\epsilon\hat{a}^\dagger\hat{a}})$.

6. *(Додатни рад)* Нека су $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$ бозонски креациони и анихилациони оператор. Посматрајмо оператор $e^{\alpha_1\hat{a}^2+\alpha_2(\hat{a}^\dagger)^2+\alpha_3(\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a})}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ и нека је $\epsilon \in \mathbb{R}$. Наћи глатке функције f_0, f_1, f_2 и f_3 које зависе од параметра ϵ тако да је:

$$e^{\epsilon(\alpha_1\hat{a}^2+\alpha_2(\hat{a}^\dagger)^2+\alpha_3(\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}))} = e^{f_0(\epsilon)+f_1(\epsilon)(\hat{a}^\dagger)^2}e^{f_2(\epsilon)\hat{a}^\dagger\hat{a}}e^{f_3(\epsilon)\hat{a}^2}.$$

   Уврстите $\epsilon = 1$ и прокоментаришите резултат.

7. Показати да се за систем од више фермиона релације $\{\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger\} = 1$, $\{\hat{b}_k, \hat{b}_k\} = 0$ и $\{\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k^\dagger\} = 0$ добијају деловањем оператора $\hat{b}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, док за релације $\{\hat{b}_k, \hat{b}_r^\dagger\} = 0$, $\{\hat{b}_k, \hat{b}_r\} = 0$ и $\{\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_r^\dagger\} = 0$ дати оператор треба модификовати.

8. Користећи комутациону релацију $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ показати да је $e^{-\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = \alpha + \hat{a}$, где је $\alpha \in \mathbb{C}$. Помоћу добијеног резултата показати да је $|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ кохерентно стање, што значи да је $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

9. Показати да је $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$. Наћи еволуцију система који је у почетном тренутку $t = 0$ у кохерентном стању $|\alpha\rangle$. Одредити очекивану вредност координате и импулса у произвољном тренутку t.

10. Да би се изградио једноставан квантни компјутер неопходне су нам следеће логичке (оптичке) капије:

$$U_S = e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}},\ \text{фазни модулатор}$$
$$U_B = e^{\pi/4(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger)},\ \textit{beam splitter}$$
$$U_F = e^{\frac{\chi}{2}\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2-\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger)},\ \textit{Fredkin}\ \text{капија.}$$

   Израчунати: а. $U_S|n\rangle$ б. $U_B|01\rangle$ в. $U_F|011\rangle$, $U_F|101\rangle$, $U_F|xy0\rangle$, узети $\chi = \pi$. У свим примерима се ради о бозонским креационим и анихилационим операторима.