Атом водоника

1. Показати да се проблем кретања две интерагујуће честице масе m_1 и m_2 може редуковати на проблем кретања једне честице ефективне масе $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ која се креће у потенцијалу $V(r)$ међусобне интеракције те две честице.

2. Израчунати енергетске нивое и својствене функције водониковог атома. Дискутовати дегенерацију ових нивоа.

3. Можемо претходни рачун спровести на нешто другачији начин.
(а) Показати да диференцијална једначина за радијални део Шредингерове једначине атома водоника може написати у бездимензионом облику

$$\chi``(x) + (-\frac{1}{4} + \frac{2m_e Ze^2}{\hbar^2 x} - \frac{l(l+1)}{x^2})\chi(x) = 0,$$

где је $x = r\epsilon$, при чему је $-\frac{2m_e Ze^2}{\epsilon\hbar^2} = (\frac{\epsilon}{2})^2$.

(б) Размотрити диференцијалну једначину

$$y``(x) + (-\frac{1}{4} + \frac{2j+k+1}{2x} - \frac{k^2-1)}{4x^2})y(x) = 0.$$

Показати да се ова једначина поједностављује ако решење тражимо у облику

$$y(x) = e^{-x/2} x^{\frac{k+1}{2}} f(x),$$

и идентификовати функције $f(x)$.

(в) Упоредити диференцијалне једначине из претходна два дела овог задатка и наћи решење бездимензионе радијалне Шредингерове једначине за атом водоника.

(г) Одредити спектар и таласне функције.

4. Основно стање атома водоника је $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, где је a_0 Боров радијус. Израчунати:
а)Највероватније растојање електрона од језгра. *б)*$\langle \frac{1}{r} \rangle$ *в)*$\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ *г)*$\langle r^k \rangle$ *д)*$\langle p_x^2 \rangle$ *ђ)*$\langle U(r) \rangle$ *е)*$\langle T \rangle$.

5. Израчунати $\langle r \rangle$ и Δr у n-том својственом стању максималног момента импулса атома водоника. Да ли су орбите боље дефинисане за стања са већом или мањом енергијом?

6. Одредити очекиване вредности $\langle r^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ и $\langle z^2 \rangle$ за електрон у атому водоника који је у стању $\psi_{2,1,0}(r, \theta, \phi)$.