Koordinatna i impulsna reprezentacija i relacije neodredjenosti

1. Pokazati da je operator $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ linearan i hermitski u prostoru diferencijabilnih funkcija koji su nula van intervala (a, b) sa skalarnim proizvodom $(\chi, \varphi) = \int_a^b \chi^* \varphi dx$.
2. Operatori koordinate i impulsa $\hat{x}$ i $\hat{p}$ imaju generalisane svojstvene vektore $|x\rangle$ i $|p\rangle$: $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ i $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, a $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$. Odrediti dejstvo operatora $\hat{U}(a) = e^{-\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}$ na generalisani vektor $|x\rangle$.
3. Odrediti sledeće "matrične elemente":
   a)$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle$, *b)*$\langle x|\hat{x}|\psi\rangle$, *v)*$\langle x|\hat{x}|x'\rangle$, *g)*$\langle x|\hat{p}|x'\rangle$, *d)*$\langle p|\hat{x}|p'\rangle$.
4. Odrediti svojstvene funkcije operatora $\alpha\hat{p} + \beta\hat{x}$ u koordinatnoj reprezentaciji.
5. Izračunati $\langle x|p\rangle$.
6. Ako je
   $$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \begin{cases} C \sin \alpha x, & \text{za } x \in [0, \frac{\pi}{\alpha}]; \\ 0, & \text{ostalo,} \end{cases}$$
   izračunati $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$.
7. U stanju opisanom talasnom funkcijom $\psi(x) = Ce^{\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$ gde su p_0, x_0 i a realni parametri, naći gustinu verovatnoće talasne funkcije u x, kao i neodred1enost koordinate i impulsa.
8. Talasna funkcija stanja čestice je $\psi(x) = Ce^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}\varphi(x)$, gde je $\varphi(x)$ realna funkcija realne promenljive, tako da je $\lim_{x\rangle\pm\infty} \varphi(x) = 0$. Pokazati da je p_0 srednji impuls čestice posmatranog stanja.
9. Čestica mase m kreće se u polju čiji je potencijal $U = \frac{kx^2}{2}$. Odrediti minimalnu moguću vrednost energije ove čestice.
10. Polazeći od relacija neodred1enosti odrediti energiju veze elektrona u osnovnom stanju kao i ravnotežno rastojanje elektrona od jezgra. Potencijal u kojem se elektron nalazi je Kulonov: $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.