Operatori 2

Domaći: Probajte sami, rešenja imate kod Marka u skripti.

1. Pokazati da je $[A, e^H] = \int_0^1 e^{\lambda H}[A, H]e^{(1-\lambda)H}d\lambda$.
2. Pokazati da je $[A^m, B] = \sum_{s=0}^{m-1} A^s[A, B]A^{m-s-1}$.
3. Pokazati $e^A e^B = e^{A+B+\frac{[A,B]}{2}}$ ako važi $[A, [A, B]] = 0 = [[A, B], B]$.

Sad ono što smo uradili danas:

1. Rešiti zajednički svojstveni problem operatora A i B
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. Neka je $trA = \sum_n \langle n|A|n\rangle$. Pokazati da važe relacije
$$tr(A + B) = trA + trB, \text{ i } tr(AB) = tr(BA),$$
u slučaju kada su ovi izrazi dobro definisani.
3. Pokazati da je $detA = e^{tr \ln A}$.
4. Neka su $|u\rangle$ i $|v\rangle$ dva vektora konačne norme. Pokazati da važi $Tr(|u\rangle\langle v|) = \langle v|u\rangle$.
5. Dokazati da trag i determinanta ne zavise od izbora bazisa.
6. Dokazati osobine statističkog operatora (mešano stanje):
   - ρ je hermitski.
   - tr $\rho = 1$.
   - tr $\rho^2 \leq 1$, razmisliti kada važi jednakost.
7. Domaći: Za svaki linearni operator A pokazati da važi da su $AA^\dagger$ i $A^\dagger A$ hermitski operatori čiji su tragovi jednaki sumi kvadrata modula matričnih elemenata operatora $A^\dagger$ i A, redom. Pokazati je $Tr(A^\dagger A) = 0 = Tr(AA^\dagger)$ akko $A = 0$.
8. Domaći Kakvi su brojevi $\langle m|A|n\rangle$ ako je $|n\rangle$ svojstveni bazis operatora A koji je:
a) *hermitski*, b) *unitaran*, c) *projektor*.