Колоквијум, 10.04.2019. Квантна механика 2

Максималан број поена који можете остварити је 50. Време израде колоквијума је 120 минута.

1. Електрон у атому водоника налази се у стању $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|2,\ 1,\ 0,\ +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2,\ 1,\ 1,\ -1/2\rangle$, у нотацији квантних бројева $|n, l, m_l, m_s\rangle$ који одговарају својственим вредностима хамилтонијана H, квадрату угаоног момента $\vec{L}^2$, z компоненти угаоног момента L_z и z компоненти спинског угаоног момента S_z, респективно.

   а. (8 поена) Одредити могуће појединиачне исходе, као и расподелу вероватноћа при мерењу сваке од опсервабли: $\vec{L}^2$, L_z, $\vec{S}^2$ и S_z у стању $|\psi\rangle$.
   б. (10 поена) Нека је $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ тотални угаони момент овог електрона. Који би били исходи мерења и одговарајуће вероватноће при мерењу опсервабли $\vec{J}^2$ и J_z?
   ц. (6 поена) Ако мерите положај честице, колика је густина вероватноће да је нађете у положају који је одређен координатама (r, θ, φ)?
   д. (6 поена) Ако се истовремено мере пројекција спина S_z и положај честице, колика је густина вероватноће да ћемо измерити пројекцију спина $+1/2$ на растојању r.

2. Честица наелектрисања q и масе m налази се у xy равни у потенцијалу $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$ и хомогеном спољашњем електричном пољу $\vec{E} = E\vec{e}_x$.

   а. (4 поена) Написати хамилтонијан система.
   б. (8 поена) Наћи својствене вредности хамилтонијана и испитати њихову дегенерацију.
   ц. (8 поена) Нека се честица налази у основном стању. Ако се електрично поље изненада искључи показати да је вероватноћа налажења честице са енергијом $(n + 1)\hbar\omega$ дата Пуасоновом дистрибуцијом $P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Наћи λ.

Подсетник:

$$R_{21}(r) = \frac{r}{a_0}\frac{e^{-r/2a_0}}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \tag{1}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos(\theta),\ Y_1^1(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin(\theta)e^{i\phi} \tag{2}$$

$$L_-|l, m_l\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m_l(m_l - 1)}\ |l, m_l - 1\rangle \tag{3}$$

$$a_x^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}(m\omega x - ip_x) \tag{4}$$

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)\exp(-\frac{1}{2}[A, B]). \tag{5}$$