Skripta sa zadacima iz Osnova matematičke fizike

Verzija 15.10.2019.

Linearna nezavisnost

Ovo su zadaci sa drugog termina. Na prvom terminu smo obnovili kompleksne brojeve, rešavanje sistema jednačina, množenje matrica i determinante.
Oprostite ako u tekstovima nadjete slovne i pravopisne greške. Trudiću se da ih bude što manje.

1. Da li su sledeći vektori iz $\mathbb{R}^3$ linearno zavisni:
   - $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Raspisati linernu kombinaciju, dobiti homogeni sistem i ispitivati kada on ima netrivijalno rešenje.
2. Proveriti linearnu zavisnost sledećih vektora iz $\mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix}1\\i-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\0\\1+i\end{pmatrix}$.
   Uputstvo: Vidi se da se treći vektor direktno može izraziti preko drugog. Treba biti pažljiv jer su sada koeficijenti iz polja kompleksnih brojeva.
3. Odrediti parametar λ tako da sledeći vektori iz $\mathbb{R}^3$ budu linearno zavisni:
   - $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}0\\1\\\lambda\end{pmatrix}$.
   - $\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\4\\\lambda\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Najlakše je zahtevati da determinanta sistema bude jednaka nuli (Kroneker-Kapelijeva teorema).
4. Ispitati da li je skup $S = \{1, \sin x, \cos x\}$ linearno nezavisni prostor neprekidnih funkcija.
   Odgovor: Jeste. Nakon raspisivanja linearne kombinacije, jedna mogućnost rešavanja je uzimanje 3 partikularne vrednosti za x i rešavanje sistema. Druga opcija je diferenciranje linearne kombinacije i uzimanje partikularnih vrednosti ili direktno sabiranjem jednačina.
5. Da li su sledeći vektori linearno nezavisni u vektorskom prostoru V?
   - $V = P_3$ (polinomi stepena ne većeg od 3), $v_1 = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, $v_2 = t^3 - t^2 + 8t + 2$ i $v_3 = 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$.
   - $V = P_2$, $v_1 = (t-a)(t-b)$, $v_2 = (t-a)(t-c)$ i $v_3 = (t-b)(t-c)$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   - $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1 & -5\\-4 & 0\end{pmatrix}$.

   Odgovori: Da; zavisi od odnosa parametara a, b, c; ne.
6. Pokazati linearnu nezavisnost sledećih skupova neprekidnih funkcija:
   - $S = \{x, x^2, \mathrm{e}^{2x}\}$.
   - $S = \{1, x, x^2, ..., x^n\}, \quad n \in \mathbb{N}$,
   - $S = \{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\}, \quad n \in \mathbb{N}$,
   - $S = \{\sin x, \sin^2 x, ..., \sin^n x\}, \quad n \in \mathbb{N}$.

   Uputstvo:
   Prvi primer: Ispratiti šta se dešava za konkretne vrednosti x, na primer $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$.
   Drugi primer: diferencirati linearnu kombinaciju i pratiti šta se dešava za $x = 0$.
   Treći primer: množenje sa $\cos mx$, $m \in \{1, 2, .., n\}$ i intergracija od 0 do 2π.
   Četvrti primer: diferencirati linearnu kombinaciju i pratiti šta se dešava za x=0.

Bazis i potprostori

1. Ispitati da li sledeći skupovi funkcija realne promenljive čine vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, ako su sabiranje funkcija i množenje funkcije skalarom definisani na uobičajni način:
   a. Funkcije definisane na intervalu $[a, b]$.
   b. Skup funkcija $f(x) = \alpha + \ln(1 + x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   c. Skup funkcija $f(x) = \alpha \ln(1 + x^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Dat je prostor V i skup vektora $S \subset V$, kao i vektor $v \in V$. Proerite da li je S bazis i ako jeste izrazite v preko vektora bazisa.

   - $V = \mathbb{R}^3$; $S = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$; $v = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$.
   - $V = \mathbb{R}^{2x2}$; $S = \{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\}$; $v = \begin{pmatrix}6 & 7\\2 & 4\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Za skup S proveriti linearnu nezavisnost vektora i dimenziju. U oba primera dati skup jeste bazis, te se dati vektor može izraziti kao linearna kombinacija vektora bazisa.

3. Da li su sledeći skupovi vektora potprostori $\mathbb{R}^2$?

   - Skup svih radijus vektora čiji vrh leži u prvom kvadrantu.
     Odgovor: ne, uzmemo na primer vektor $-\vec{r}$.
   - Skup svih radijus vektora čiji vrh leži na nekoj pravoj.
     Odgovor: u opštem slučaju ne, ali za pravu koja prolazi kroz koordinatni početak da.

4. Odrediti bazis preseka potprostora odredjenih sledećim linealima: $U = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\}$ i $W = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\}$.

   Uputstvo: Prvo naći bazise u U i W a tek onda napisati opšti oblik vektora iz preseka i naći rešenje.

5. Vektorski prostor U definisan je na sledeći način:
   $U = \{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, b - c + 2d = 0\}$, a $W = \{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a = b,\ c = d\}$. Odrediti bazisne vektore i dimenzije prostora $U, W, U \cap W$.

   Rešenje za $U \cap W$: $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

6. Odredite bazis zbira i preseka potprostora U i W, $U, W \subset \mathbb{R}^4$.

   - $U = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}$.
   - $W = \mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\}$.

   Što se tiče preseka, uputstvo je isto kao i u prethodnim zadacima. Što se zbira tiče, ako se potprostori ne sadrže jedan u drugom, uglavnom imamo situaciju da razapinju čitav prostor. To je slučaj i ovde. Bazis pravimo kada npr. uzmemo tri vektora iz U i jedan iz W.

Skalarni proizvod

1. Odrediti norme vektora u i v, njihov skalarni proizvod kao i kosinus ugla koji dati vektori zaklapaju, pod uslovom da imamo jasnu geometrijsku interpretaciju.

   - $u = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.
   - $u = \begin{pmatrix}5\\0\\-12\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
   - $u = \begin{pmatrix}1\\4-i\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}-i\\2+3i\end{pmatrix}$.
   - $u = \begin{pmatrix}1+i\\2-i\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Paziti kako se vrši adjungovanje u slučaju rada nad poljem kompleksnih brojeva.

2. Odrediti norme sledećih vektora: $a = \sin t$, $b = \cos t$, $c = \sin t + \cos t$ i $d = t \sin t$, u odnosu na skalarni proizvod u prostoru neprekidnih funkcija, definisan izrazom:

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Uputstvo: Koristiti različite cake za računanje integrala koje su poznate od radnije.

3. Odrediti norme vektor i njihov skalarni proizvod:
   - $u=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.
   - $u=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 0 & i\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}-i & i\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: paziti na definiciji skalarnog proizvoda u prostoru matrica ili otići na izomorfnu varijantu.

4. Koristeći osobine skalarnog proizvoda dokazati Pitagorinu teoremu i pravilo paralelograma.
   Uputstvo: Napraviti paralelu izmedju čisto geometrijske slike i slike u kojoj npr. dijagonale paralelograma mogu da se izraze kao zbir i razlika vektora koji igraju uloge stranica. Napisati odgovarajuće norme i iskoristiti linearnost skalarnog proizvoda.

5. Dokazati da su $\sin(mx)$ i $\cos(kx)$, $m,k\in\mathbb{N}$, ortogonalne funkcije u odnosu na skalarni proizvod u prostoru neprekidnih funkcija, definisan izrazom:
$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$
   Uputstvo: Iskoristiti ili Ojlerovu formulu (zapis kompleksnog broja jedinične dužine uz pomoć trigonometrijskih formula) ili transformacije proizvoda u zbir (adicione formule).

6. Odrediti projekciju i normalu vektora u na pravac vektora v. $u=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Pokazati da je $u_p=\frac{(v,u)}{(v,v)}v$, a $u_n=u-u_p$.

7. Odrediti razvoje vektora $u=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ i $v=\begin{pmatrix}-i\\ 2+i\\ 5\end{pmatrix}$ po ortonormiranom bazisu $\beta\in\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Pokazati da je odgovarajući koeficijent u razvoju (e_i,u) odnosno (e_i,v). Pri tome koristiti ortonormiranost bazisa, kao i osobine skalarnog proizvoda.

   Domaći: Ponoviti šta je ortokomplement nekog vektorskog prostora (potprostora).

Gram-Šmitov postupak ortonomiranja

1. Odrediti ortokomplement vektorskog prostora V. $V=\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\\ i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ i\\ 1\end{pmatrix}\}$.

   Uputstvo: Kolika je dimenzija $V_\perp$? Šta je osobina bilo kog vektora iz $V^\perp$? Rešenje je: $V_\perp=\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}-i\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\}$.

2. Odrediti projekciju vektora $v=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ na ravan obrazovanu vektorima: $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, kao i rastojanje vrha vektora v od ravni.

   Uputstvo: Da bismo mogli da nadjemo projekciju na ravan preko pojedinačnih projekcija na pravce, u ravni moramo imati ortonormirani bazis.

3. Gram-Šmitovim postupkom ortonormirati sledeći skup vektora iz $\mathbb{R}^3$. $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$.

4. Gram-Šmitovim postupkom ortonormirati sledeći skup vektora iz $\mathbb{C}^{2x2}$. $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$.

   Uputstvo: Ovde možete koristiti skalarni proizvod u prostoru matrica ili iskoristiti izomorfnost vektorskog prostora $\mathbb{C}^{nxn}$ sa $\mathbb{C}^{2n}$.

5. Korišcenjem Gram-Šmitove procedure ortonormirati vektore iz prostora neprekidnih funkcija sa skalarnim proizvodom definisanim kao $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
   a. Vektori: $\{1,x,x^2\}$ i preko ortonormiranog bazisa predstaviti vektor $p(x)=x^2+x+1$.
   b. (Domaći) Vektori: $\{4,x-2,3x^2\}$ i predstaviti vektor x^2+5x+6 preko tog ortonormiranog bazisa.
   Rešenja: a. $\beta=\{1/\sqrt{2}, x\sqrt{3/2}, (3x^2-1)\sqrt{5}/\sqrt{8}\}$, dekompoziciju nadjite sami na jedan od dva načina - direktno pravljenjem linearne kombinacije i rešavanjem sistema jednačina koji vodi do koeficijenata ili korišcenjem skalarnog proizvoda.

Domaći: Pogledajte zadatke sa prethodnih kolokvijuma i rokova vezano za Gram-Šmitov postupak.

Operatori i reprezentacije

1. Ispitati linearnost sledećih operatora:
   a. $Af(t) = f(t^2)$.
   b. $Df(t) = df/dt$.
   c. $Bf(t) = \sqrt{f(t)}$.
   Rešenja: a. da, b. da, c. ne.

2. Odrediti matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čije je dejstvo definisano na sledeći način: $A(x, y, z) = (2x-y, y+z, x)$.
   Napomena: ako ništa nije dodatno rečeno podrazumevamo standardni (apsolutni) bazis.
   Rešenje: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Odrediti matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ u bazisima β_1 i γ_1.
   $A(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x - z)$, $\beta_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\gamma_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
   Rešenje: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Odrediti matricu operatora diferenciranja u prostoru polinoma stepena manjeg od 4, zadatog pomoću sledećih bazisnih vektora: $\{1, x, x^2, x^3\}$.
   Rešenje: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Uraditi proveru na nekom jednostavnom primeru, npr. $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 6$.

5. (Domaći) Odrediti matricu operatora diferenciranja u potprostoru neprekidnih funkcija, preko bazisa $\{e^x, \cos x, \sin x\}$.
   Rešenje: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. U apsolutnom bazis reprezentovati:
   a. Rotaciju za ugao ϕ oko z ose.
   b. Rotaciju za ugao ϕ oko x ose.
   c. Refleksiju u odnosu na xOy ravan.
   d. Refleksiju u odnosu na ravan koja sadrzi z osu i simetralu ugla izmedju osa Ox i Oy.
   Uputstvo: Posmatrati gde se prilikom geometrijske transformacije premeštaju koordinatne ose.

7. Data su dva bazisa prostora $\mathbb{R}^2$, β_1 i β_2, i matrica operatora A u bazisu β_1. Odrediti matricu operatora A u bazisu β_2.
   a. $A_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. β_1 je standardni bazis dok je $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\}$.
   Rešenje: $\begin{pmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   b. $A_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. β_1 je standardni bazis dok je $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$.
   Rešenje: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & 37 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}$.

8. Odrediti nul-potprostor i potprostor likova sledećih operatora:
   a. $A(x, y, z) = (x - 3y - z,\ y + z,\ x + 2z)$.
   b. $B(x, y, z) = (z,\ -x - y,\ 2x + y)$.
   Upustvo: Nul-potprostor čine vektori koje operator slika u nula vektor. Prostor likova dobijamo kada napravimo slike vektora bazisa i nadjemo one koji su linearno nezavisni. $\dim N(A) + \dim R(A) = (dim)V$, gde je V vektorski prostor koji čini domen operatora.

9. Odrediti adjungovane operatore sledećih operatora:
   a. $A(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$. Rešenje: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   b. $A(x, y, z) = (iy + iz, x - y, ix - iz)$. Rešenje: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$.

Rešavanje svojstvenog problema

1. Napraviti klasifikaciju operatora u odnosu na adjungovanje. Simetrični, antisimetrični, ermitski i unitarni. Šta važi za svaku pojedinačnu klasu operatora?

2. Da li je proizvod dva ermitska operatora ermitski?
   Rešenje: U opštem slučaju nije, samo ako ta dva operatora komutiraju.

3. Da li je proizvod dva unitarna operatora unitaran?
   Rešenje: Jeste, eksplicitna provera.

4. Kako proveravamo da je neki operator projektor?
   Rešenje: Moramo da proverimo da li je ermitski ($P = P^\dagger$) i idempotentan ($P^2 = P$).

5. Odrediti projektore na sledeće potprostore: a. $\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ b. $\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ $\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\i\\-i\end{pmatrix}\}$.

   Uputstvo: Prvo treba normirati vektore pa tek onda potražiti projektore u formi $e_u e_u^\dagger$. Jednostavna računska provera je trag - suma dijagonalnih elemenata projektora koja mora biti jednaka dimenziji potprostora na koji dati pojektor slika.
   Rešenje: a. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ c. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-i&i\\i&1&-1\\-i&-1&1\end{pmatrix}$.

6. Odrediti matricu projektora na potprostore: a. $\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ b. $\mathcal{L}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$.

   Uputstvo: Ako je bazis u višedimenzionom potprostoru ortonormiran, projektor je zbir projektora na pojedinačne pravce - jedinične vektore. Ako to nije slučaj prvo se bazis mora ortonormirati, na primer Gram-Šmitovom procedurom, pa tek onda računati projektor.
   Rešenje: a. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3&0\\3&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

7. Naći svojstvene potprostore operatora $A:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$. $A=\begin{pmatrix}1&0&i&0\\0&1&0&0\\-i&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ Kako izgledaju projektori na svojstvene potprostore? Šta je reprezentacija operatora A u svojstvenom bazisu?
   Svojstvene vrednosti su $0, 1$ i 2, gde je svojstvena vrednost 2 dvosturko degenerisana.

8. Jednostavniji zadaci u kojim je važno proveriti sve, od osobine operatora i doći do matrica transformacije apsolutnog u svojstveni bazis kako biste potvrdili očekivanja. Kompletno rešiti svojstveni problem za sledeće operatore $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$.
   a. $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ b. $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ c. $Z=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ d. $R_\phi=\begin{pmatrix}\cos\phi&\sin\phi\\-\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}$.

Vektorska analiza

1. Definisati pojmove krive, skalarnog polja i vektorskog polja. Navesti primere definisanih preslikavanja u fizici.
2. Data je kriva $\vec{r}(t)=\sin(t)\vec{e_x}-\cos(t)\vec{e_y}+t^2\vec{e_z}$. Odrediti:
   a. $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$; b. $\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2$; c. Jedinični vektor tangente u $t=\pi$; d. $|\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2|$ u $t=\pi$.
3. Definisati vektorski operator $\vec{\nabla}$ i napisati njegov način delovanja na skalarno i na vektorskog polje.
4. Koristeći vektorski proizvod definisati linijsku brzinu tačke tela koje rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, ako tačka ima vektor položaja $\vec{r}$. Potom odrediti $\vec{\nabla}\times\vec{v}$.
   Rešenja: $\vec{\omega}\times\vec{r}$, $2\vec{\omega}$.
5. Dato je skalarno polje $\Phi(x,y,z)=3x^2y-yz^2$. Izračunati $\nabla\Phi$ u tački $(1,0,-1)$.
   Rešenje: $2\vec{e_y}$.
6. Odrediti $\nabla\Phi$ za: a. $\Phi=\ln(r)$ b. $\Phi=1/r$, gde je $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - intenzitet vektora položaja.
   Rešenja: a. $\vec{r}/r^2$ b. $-\vec{r}/r^3$.
7. Odrediti normalu na površ zadatu jednačinom $x^2y+2xz=4$ u tački $(2,-2,3)$.
   Rešenje: $\frac{-\vec{e_x}+2\vec{e_y}+2\vec{e_z}}{6}$.
8. Dokazati da je rotor vektorskog polja zadatog u obliku $\vec{A}=f(r)\vec{e_r}$ jednak nuli. Zadatak uraditi eksplicitnom proverom i u Dekartovim i u sfernim koordinatama.
9. Dokazati da važi $\vec{\nabla}\times(r\vec{a})=\frac{\vec{r}\times\vec{a}}{r}$, gde je $\vec{a}$ konstantan vektor.
10. Pokazati da važe sledeći identiteti:
    a. $\vec{\nabla}(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{\nabla}\vec{B}$.
    b. $\vec{\nabla}(\Phi\vec{A})=\nabla\Phi\vec{A}+\Phi(\vec{\nabla}\vec{A})$.
11. Dokazati da je $\vec{nabla}\times\nabla\Phi=0$, za bilo koje skalarno polje Φ.
12. Dokazati da je $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, za bilo koje vektorsko polje $\vec{A}$.
13. Definisati Laplasov operator (laplasijan) za skalarno i vektorsko polje.
14. Izračunati $\Delta\frac{1}{r}$.
    Rešenje: nula, osim za $r=0$.
15. Kada za vektorsko polje kažemo da je potencijalno? Zašto za takvo polje možemo definisati skalarni potencijal? Do na koju veličinu je odredjen skalarni potencijal?
16. Kada za vektorsko polje kažemo da je solenoidno? Zašto za takvo polje možemo definisati vektorski potencijal? Do na koju veličinu je odredjen vektorski potencijal?
17. Ispitati da li je vektorsko polje $\vec{A}=2xyz\vec{e_x}+x^2z\vec{e_y}+x^2y\vec{e_z}$ potencijalno i ako jeste odrediti mu skalarni potencijal.
    Rešenje: Jeste, $\Phi=x^2yz+\mathrm{const.}$
18. Ispitati da li je vektorsko polje $\vec{A}=2r\vec{e_r}+\frac{1}{r}\vec{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\vec{e_\phi}$ potencijalno i ako jeste odrediti mu skalarni potencijal. Koristiti izraze za $\vec{\nabla}$ u odgovarajućim koordinatama.
    Rešenje: Jeste, $\Phi=r^2+\theta+\phi+\mathrm{const.}$

19. Ispitati da li je vektorsko polje $\vec{A} = \frac{\arctan(z)}{\rho}\vec{e_\rho} - \frac{1}{\rho}\sin(\phi)\vec{e_\phi} + \frac{\ln\rho}{1+z^2}\vec{e_z}$ potencijalno i ako jeste odrediti mu skalarni potencijal. Koristiti izraze za $\vec{\nabla}$ u odgovarajućim koordinatama.
Rešenje: Jeste, $\Phi = \ln\rho \arctan z + \rho\cos(\phi) + \text{const.}$

20. Odrediti da li je vektorsko polje $\vec{B} = 2y\vec{e_x} - z\vec{e_y} + 2x\vec{e_z}$ solenoidno i ako jeste odrediti njegov vektorski potencijal.
Uputstvo: Jeste, a kada se traži vektorski potencijal, neodredjenost je velika, do na gradijent skalarnog polja, pa možete uzimati više različitih oblika vektorskih potencijala.